ELEMENTI

DI

MATEMATICHE

COMPILATI

DA GIOVANNI INGHIRAMI

DELLE SCUOLE PIE

PROFESSORE DI ASTRONOMIA E DI MATEMATICHE SUPERIORI

NEL COLLEGIO DI FIRENZE

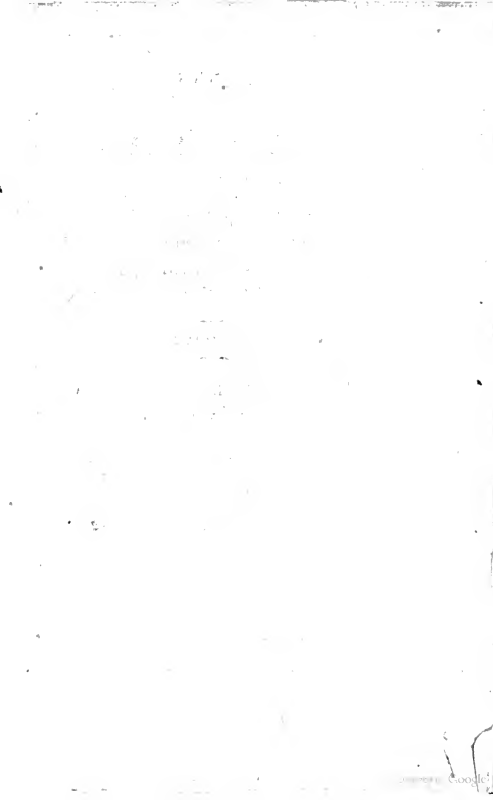
SECONDA EDIZIONE

TOMO I.

ARITMETICA, ALGEBRA E GEOMETRIA

FIRENZE

COI TIPI CALASANZIANI

1841

AVVISO

DELL' AUTORE

Questa edizione, quantunque porti il titolo di seconda, non è a vero dire che quella del 1832, ma bensì corredata di variazioni, miglioramenti ed aggiunte qua e là in tanto numero artificiosamente interpolate da potere a buon diritto venir presentata al pubblico siccome nuova. I più notabili cangiamenti si troveranno sparsi nella teoria delle frazioni continue, che è stata resa sommamente più facile e più completa, in special modo in quella parte che si riferisce alla piena soluzione dell'equazione $Q-lx^2=\pm1$; nei preliminari delle equazioni dei gradi superiori al secondo, e più particolarmente là dove guidano a stabilire l'*equazione delle differenze;* nelle equazioni reciproche; nell'analisi indeterminata di primo e secondo grado; nei principj dell'analisi derivata; nelle proposizioni che tendono a dimostrare non potersi da un punto dato condurre che una sola normale ad una retta data; nell'esposizione delle dottrine che insegnano a determinare i gradi contenuti in un dato arco, o la lunghezza lineare di un arco contenente un dato numero di gradi; nella Trigonometria sferica; nel trattato della trasformazione degli assi delle coordinate nelle curve piane; nell'analisi dell'equazione generale delle curve algebriche

di second' ordine; nel problema della trisezione dell'angolo sciolto colla intersezione dell' iperbola; nei metodi d' integrare i differenziali binomj ad una sola variabile, e finalmente nel calcolo delle variazioni. Altri cambiamenti e non poche aggiunte, che non è riescito di comodamente interpolare, si sono riunite in forma di appendice al termine di ciascuno dei due volumi.

Rammenteremo che gli studiosi non dovranno applicarsi alle materie che vedonsi impresse in minor carattere, prima di aver percorso tutte quelle che sono esposte in carattere maggiore.

LEZIONI ELEMENTARI

DI MATEMATICHE

Tutto ciò che può crescere o scemare si chiama *Quantità*; i numeri, il moto, il peso, il tempo, la luce, ec. son quantità.

Le Matematiche comprendon tutte le Scienze che trattano delle proprietà e rapporti di quelle fra le quantità, le quali possono assoggettarsi a misura, o tra cui può comunque instituirsi un confronto. Ciascuna di queste Scienze ha un nome particolare secondo l'oggetto che contempla. Si chiama *Aritmetica* la Scienza dei numeri; *Geometria* la Scienza delle misure in lunghezza, larghezza e profondità; *Meccanica* la Scienza del moto; *Ottica* quella della luce ec.

Benchè diverse d'oggetto, hanno tutte queste Scienze un' indole stessa, e stretti legami fra loro, e l'une sull'altre si appoggiano. L'Aritmetica è bisognevole in tutte; e conviene perciò cominciar da questa, che in oltre è di tanto uso nella Società.

ELEMENTI DI ARITMETICA

1. È impossibile definir l' *unità*; tutti però ne hanno un' idea distinta; come non vi è chi non sappia, che la riunione di più unità simili, o prese come simili, produce la *pluralità*; che la pluralità varia secondo il maggiore o minor quantitativo di unità che concorrono a formarla; e che per esprimere appunto questo quantitativo s'immaginarono i *numeri*.

2. I numeri si distinguono in *concreti* ed in *astratti*; in *semplici* ed in *composti*. Si chiaman *concreti*, quando le unità alle quali si riferiscono sono di specie determinata, come allorchè si dice *tre braccia*, *cinque libbre*, *mille giorni*. Si chia-

mano *astratti*, quando non è espressa la specie delle loro unità, come dicendosi *tre*, *nove*, *dodici*, senz' altro aggiunto.

3. I numeri si dicon *semplici*, quando non esprimono o non rappresentano più di nove unità; *composti* in ogni altro caso. I semplici non son dunque più di nove, rappresentati come ognun sa dalle note cifre

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove.

Quanto ai composti facile è il concepire che procedono all'infinito, e che impossibile sarebbe stato l'assegnare a ciascuno, siccome ai semplici, e cifre e denominazioni particolari. A ciò fu riparato coll' ingegnoso e noto metodo dell'Aritmetica *decimale*.

4. Consiste questo metodo nel classare i numeri in *unità*, *diecine*, *centinaia*; *migliaia*, *diecine* e *centinaia* di *migliaia*; *milioni*, *diecine* e *centinaia* di *milioni*; *migliaia*, *diecine* e *centinaia* di *migliaia* di *milioni*; *bilioni* ec. Dieci unità semplici formano una diecina, o unità di *second' ordine*; dieci diecine un centinaio, o unità di *terz' ordine*; dieci centinaia un migliaio, o *unità* di *quart' ordine*; dieci migliaia una diecina di migliaia, o unità di *quint' ordine*; dieci diecine di migliaia un centinaio di migliaia, o unità di *sest' ordine*; dieci centinaia di migliaia formano l'unità dei milioni, o d'*ordine settimo*; dopodichè con altri sei ordini d'unità nel modo medesimo espressi, si passa ai *bilioni*, quindi ai *trilioni*, ai *quadrilioni* ec.

5. Le cifre medesime con le quali si rappresentano le unità semplici, o di prim' ordine, servono egualmente a rappresentare quelle di tutti gli ordini susseguenti: così la cifra 8 tanto s'impiega per esprimere otto unità semplici, quanto per esprimere otto diecine, otto centinaia, otto milioni, otto centinaia di migliaia di milioni. Se non che quando rappresenta semplici unità si pone assolutamente e senz' altro aggiunto; quando rappresenta diecine o unità di second' ordine, le si pone alla destra uno *zero* „ o „, due zeri quando rappresenta centinaia, tre quando rappresenta migliaia, e così sempre uno zero di più per ogni ordine successivo. Per tal modo mentre 8 non rappresentava che otto unità semplici, con 80 si rappresentano otto diecine, con

800, 8000 ec. si rappresentano otto centinaia, otto migliaia ec. Lo zero non è dunque una vera cifra, ma piuttosto un indice, immaginato per fissare l'ordine, al quale debbono riferirsi le unità rappresentate da ciascuna cifra semplice.

6. Ma sia il dato numero composto di più ordini di unità. La convenzione ha stabilito, che scritta la cifra dell'unità d'ordine maggiore, si ponga alla destra di essa quella dell'ordine immediatamente seguente, e quindi con lo stesso metodo quelle di tutti gli ordini successivi, e gli zeri si faccian rimaner soltanto nei luoghi degli ordini che mancassero. Così il numero *cinquemila seicento trenta quattro* si scrive 5634; ed il numero *trecentomila cento sessanta*, ove mancano le diecine e unità di migliaia, e le unità semplici, si scrive 300160.

7. È osservabile che in questo sistema 1°. ciascuna cifra, trasportata che sia successivamente di posto in posto dalla destra alla sinistra, acquista un valore relativo sempre dieci volte più grande; cosicchè se è un 5, e trovasi in ultimo luogo, non rappresenta che cinque unità semplici; collocata al secondo luogo rappresenta cinque diecine; al terzo cinque centinaia ec. Quindi 2°. se il numero si accresca di uno zero alla destra, tutte le cifre salendo allora di un posto, ed acquistando perciò un valore dieci volte maggiore, anche il numero diverrà dieci volte maggiore; come del pari e per consimil ragione diverrà cento, mille, diecimila volte più grande, se si aggiungono due, tre, quattro zeri, ec. 3°. Ciascuna cifra occupa nel numero il posto corrispondente all'ordine di unità che rappresenta; così le unità semplici occupano il primo luogo a destra; le diecine o unità di second'ordine il secondo; le centinaia o unità di terz'ordine il terzo. Questa osservazione regola il modo di leggere un numero scritto in cifre.

Sia infatti da leggersi il numero 5463. La cifra 5 tenendo quì il quarto posto rappresenta unità di quart'ordine cioè migliaia(4), e perciò deve leggersi *cinquemila*; la seguente che tiene il terzo, rappresenta unità di terz'ordine cioè centinaia, e deve leggersi *quattrocento*; la terza tenendo il secondo, rappresenta diecine e deve leggersi *sessanta*; e l'ultima rappresenta unità semplici: onde tutto il numero vale *cinquemila quattrocento sessanta tre*

8. Ma dovendo leggere un numero di molte cifre, tornerà comodo separarle in classi di tre in tre, cominciando dall' ultima a destra, e non curando che la classe estrema a sinistra rimanga completa o no. Ogni classe deve leggersi come se fosse isolata; se non che dopo la lettura di ciascuna classe di posto pari si pronunzierà la voce *mila*; dopo quelle della penultima, terz' ultima ec. classe di posto impari si pronunzieranno respettivamente le voci *milioni*, *bilioni*, *trilioni* ec. Gli zeri, ovunque s' incontrino, si taceranno. Con ciò il numero . . . . 1 030 010 125 812 600 003, diviso come vedesi in classi, si leggerà *un trilione trenta mila dieci bilioni centoventicinque mila ottocento dodici milioni seicento mila tre*.

Ciascuna delle classi di cui abbiam parlato ha una denominazione particolare. L'ultima a destra si chiama classe delle centinaia; la seguente classe delle migliaia; le altre, classi delle centinaia di milioni, delle migliaia di milioni, delle centinaia di bilioni, delle migliaia di bilioni, e così seguitando.

9. Rimane da osservare che, qualunque sia il numero, la prima cifra a sinistra, per quanto possa esser piccola, ha un valor relativo più grande del numero rappresentato da tutte le rimanenti; ed aumentandola di una sola unità il numero cresce assai più, che se si aumentino quanto si voglia tutte le altre cifre.

10. Dal fin qui detto facilmente si rileva che, supposta a l'm^{sima} cifra del numero, sarà dunque $10^{m-1}a$ il valore che l'è dovuto; e per l'espressione generale di un numero di m cifre avremo $N=10^{m-1}a+10^{m-2}b+10^{m-3}c+$ ec. ... $+z$, ove a,b,c ec. sono una qualunque delle dieci cifre primitive, compresovi lo zero. Da questa intanto si apprende: 1°. che spezzando il numero N in due parti A,B, l'ultima delle quali abbia m cifre, sarà $N=10^m A+B$; 2°. che un numero è multiplo di 10^m se l'ultime m cifre sieno zero; 3°. è multiplo di 2^m o di 5^m se ne saranno multiple l'ultime m cifre.

11. Si divida adesso il numero dato N in classi, di m cifre per ciascheduna, cominciando dalla prima cifra a destra, e non curando che l'ultima classe a sinistra riesca completa o no. Rappresentati con S_1, S_2, S_3, S_4 ec. i respettivi valori di queste classi, e introdottigli nell' espressione generale rovesciata, troveremo $N=$ ... $S_1+10^m S_2+10^{2m}S_3+10^{3m}S_4+$ ec., formula che facilmente si trasforma nelle due:

I[a] $N=S_1+S_2+S_3+$ec. $+(10^m-1)S_2+(10^{2m}-1)S_3+(10^{3m}-1)S_4+$ ec.

II[a] $N=S_1+S_3+S_5+$ ec. $-(S_2+S_4+S_6+$ ec.$)+(10^m+1)S_2+(10^{2m}-1)S_3+$..... $(10^{3m}+1)S_4+(10^{4m}-1)S_5+$ec.

Ora, per ciò che avemmo occasione di osservare nelle progressioni geometriche, i due coefficienti binomiali 10^m-1 nella I^a, e 10^m+1 nella II^a sono respettivamente summultipli di tutti i seguenti. Se dunque si faccia $S_1+S_2+S_3+$ ec. $=S$ somma totale delle classi, $S_1+S_3+S_5-(S_2+S_4+S_6)=D$ differenza tra le somme delle classi alternative di posto pari e di posto impari, la prima potrà compendiosamente rappresentarsi con la III^a $N=(10^m-1)P+S$, e la II^a. con la IV^a. $N=(10^m+1)P'+D$.

12. Ciò premesso, sia in primo luogo $m=1$, nel qual caso S_1, S_2, S_3 ec. rappresentano le semplici cifre del numero dato. La III^a in cui $10^m-1=9$, darà $N=9P+S$, e la IV^a in cui $10^m+1=11$ darà $N=11P'+D$; e di quì e da quanto si è detto facilmente concluderemo: 1° che dividendo per 9 un numero qualunque dato, si ha lo stesso resto, che dal divider per 9 la sola somma delle sue cifre; 2° che se la somma delle cifre è multipla di 9, tutto il numero è multiplo di 9; sarà poi multiplo di 3, se la somma delle cifre è semplicemente multipla di 3; e in quest'ultimo caso sarà multipla anche di 6, se il numero è pari; 3° se da un numero si toglie la somma delle sue cifre, il resto è multiplo di 9; 4° se si abbian due numeri formati con le medesime cifre differentemente disposte, oppure tali che le somme delle medesime sieno eguali in ambedue, la lor differenza sarà multipla di 9. In fine 5° che un numero sarà multiplo d' 11, se le somme delle sue cifre alternative sieno eguali, come accade in 27368.

Sia in secondo luogo $m=2$: la III^a darà $N=99P+S=9.11P+S$. Quindi un numero sarà multiplo di 9 o d' 11, se sarà multipla di 9 o d'11 la somma S delle sue classi binarie, come avviene, rapporto ad 11, in 38423; ove $23+84+3=110$.

Sia in terzo luogo $m=3$: avremo nella IV^a $10^3+1=1001=7.11.13$, e quindi $N=7.11.13P'+D$; e perciò un numero sarà multiplo di 7, o d' 11, o 13 se diviso in classi ternarie, la differenza D tra le somme delle classi di posto pari e di posto impari sarà multipla o di 7, o d' 11, o di 13. Sarà poi multiplo di quei tre numeri insieme, se la predetta differenza sia zero. In egual modo potranno trovarsi altri consimili teoremi.

13. I numeri sono *interi* o *rotti*. Nei primi, ogni unità è un tutto; come due uomini, sette, mille ec; negli altri, ogni unità è parte d'un tutto; come due terzi di miglio, sette ventesimi di lira ec.

Del resto poichè i numeri son suscettivi d'aumento e di diminuzione, è chiaro, che possono assoggettarsi a due specie d'operazioni; l'una con cui si aumentano si chiama *somma* o *addizione*; l'altra con cui si diminuiscono si chiama *sottrazione*. Tutte le altre operazioni dell'Aritmetica dipendono più o meno da queste due.

Somma

14. La *somma* non è che l'operazione con la quale trovia-

mo un numero equivalente a due o più numeri presi insieme. Se questi son semplici, o anche se rappresentano unità del medesimo ordine (5), l'abitudine fin dall'infanzia deve averci già addestrati a sommargli. Così non vi è forse chi non sappia, che 3 unità riunite a 5 unità fanno 8 unità; come 30 unità o 3 diecine con 50 unità o 5 diecine fanno 80 unità o 8 diecine; 300 unità o 3 centinaia con 500 unità o 5 centinaia fanno 800 unità o 8 centinaia ec. Tutto ciò compendiosamente si esprime scrivendo $8+5=13$, $50+30=80$ ec. Il segno $+$, chiamato anche *segno positivo*, indica dunque addizione o somma, e si pronunzia *più*; il segno $=$ indica egualità, e si pronunzia *eguale*.

15. Quanto ai composti, è evidente che la loro somma totale deve equivalere alle somme parziali delle loro unità, delle loro diecine, centinaia ec. Come però la somma dell'unità può contenere una o più diecine, quella delle diecine può contenere una o più centinaia ec. quindi perchè la somma intera risulti classata con l'ordine stabilito (4), converrà che il numero di diecine contenute nella somma delle unità si unisca alla somma delle diecine; quello delle centinaia contenute nella somma delle diecine si unisca alla somma delle centinaia, e così di seguito. Tutto questo conduce direttamente alla seguente regola pratica: *si scrivano gli uni sotto gli altri i numeri da sommarsi, in modo che le cifre del medesimo ordine si corrispondano in una stessa colonna. Quindi si sommino ad una ad una ed in ordine tutte le classi o colonne, cominciando da quella delle unità semplici: e si avverta di* portare *o aggiungere alla somma delle diecine il numero delle diecine contenute nella somma delle unità semplici; alla somma delle centinaia il numero delle centinaia contenute in quella delle diecine ec.* A schiarimento della qual pratica serviranno gli esempj che seguono.

34	4526	73	42
672	31	4156	768
89	129	8	909
274	82	43	31
1069	4768	4280	1750

Sottrazione

16. Con la sottrazione si trova la *differenza* che passa fra due numeri dati, o il *resto*, o *avanzo* che si ottiene togliendo il minore dal maggiore, oppure ciò che bisogna aggiungere al minore per eguagliarlo al maggiore.

Se i numeri dati son semplici (3), o contengon soltanto unità di un ordine stesso (4), non vi è forse chi accostumato non sia per abito a trovarne la differenza. Qui riman solo da aggiungere, che volendosi esprimere per esempio, come tolto il 6 da 9 resta 3, tolto il 60 da 90 resta 30, tolto il 600 da 900 resta 300, si scrive 9—6=3, 90—60=30, 900—600=300. Il segno —, detto anche *segno negativo*, si pronunzia *meno*. Il numero che si toglie si chiama *sottraendo*, o anche *diminutore*; l'altro da cui si toglie *diminuendo*.

17. Se i dati numeri son composti, è chiaro che la lor differenza dovrebbe equivalere a quella delle loro unità, delle loro diecine, centinaia ec. E sarebbe quindi facile l'ottenerla, per dir così, a colpo d'occhio qualora tutte le unità di ciascun ordine del diminuendo fossero respettivamente maggiori delle unità corrispondenti del diminutore; così se debba sottrarsi 258 da 579, ove il diminuendo ha 3 centinaia, 2 diecine, ed un'unità più del diminutore, tosto si scorge che la differenza è 321.

Ma questa supposizione potendo non verificarsi nei più dei casi, si terrà perciò la regola seguente: *scritti i due numeri uno sotto l'altro, il minore cioè sotto il maggiore, in modo che le unità di ciascun ordine si corrispondano in colonna, si tolgano le unità del numero inferiore dalle loro corrispondenti nel superiore, ed ogni qualvolta queste sieno minori di quelle, si accrescano di dieci, e si consideri come diminuita di un' unità la cifra seguente del diminuendo.* Con ciò la sottrazione, ordine per ordine, è resa sempre possibile, nè risulta men vera la differenza finale. Infatti siccome ogni unità d'un ordine corrisponde a 10 unità dell'ordine immediatamente inferiore (4); se dunque quello si diminuisce di un'unità, e questo si accresce di 10, il valore effettivo del diminuendo non resta in modo alcuno alterato; e frattanto le 10 unità aggiunte, rendendo le cifre del diminuendo immancabilmente maggiori delle ci-

fre sottoposte del diminutore, che non possono oltrepassare il 9, potremo sempre toglier queste da quelle. Con tal regola, si troverà 13852—3684=10168, e 97131—96874=257.

18. Osservazione I^a^. Se la cifra del diminuendo per la quale occorre l'aumento di 10, sia preceduta da uno o anche più zeri, staccheremo l'unità della prima cifra significativa che incontreremo sulla sinistra, e considereremo come 9 tutti gli zeri intermedj. Infatti se lo zero è un solo, l'unità staccata dalla cifra precedente lo converte in 10, che poi si cangia in 9 per l'unità che presta alla cifra che segue; e se son più zeri di seguito, il primo già convertito in 10 si cangia in 9 per l'unità che presta al secondo, come del pari questo già divenuto 10 si cangia in 9 per l'unità che presta al terzo ec. Con ciò troveremo 20050—5678=14372; 7000— 145=6855.

Oss. II^a^. Se, come talvolta accaderà, il diminutore sia maggiore del diminuendo, si sottrarrà questo da quello, ed il resto si farà precedere dal segno —.

Oss. III^a^ Il resto, non essendo che l'eccesso del diminuendo sul diminutore, aggiunto al diminutore deve dunque rendere il diminuendo; il che può servir di prova all'operazione.

Oss. IV^a^. In luogo di toglier, come abbiam fatto, le cifre inferiori dalle superiori, si può avere il resto computando ciò che manca alle prime per giungere o *andare* alle seconde, aumentate all'occorrenza dell'oppurtuna diecina. Debbasi sottrarre 3947 da 5379. Dirò: dal 7 per andare al 9 mancano 2 unità, che segno; dal 4 al 7 mancano 3 unità, che segno alla sinistra del 2; dal 9 al 3 non può andarsi, ma si può bensì andare al 13 con 4 unità, che segno alla sinistra delle precedenti; e considerando il 5 come ridotto a 4 per la diecina prestata al 3, dirò dal 3 al 4 manca un'unita, che segno come sopra, ed ho il resto totale 1432.

Una più grande abitudine al calcolo insegnerà a sottrar più speditamente *sommando*, nel modo che segue. Vogliasi sottrarre 6358 da 11834. Dirò: 8 e 6 fanno 14; segno 6 e porto 1: 5 e 1 che porto 6, e 7 fanno 13; segno 7 e porto 1; 3 ed 1 che porto 4, e 4 fanno 8; segno 4 e porto nulla; 6 e 5 fanno 11; segno 5, ed ho di resto 5476. Nel qual modo d'operare è manifesto, che le quan-

tità le quali si sommano con le cifre del diminutore sono precisamente quelle che ad esse mancano per giungere alle cifre corrispondenti del diminuendo (16).

Moltiplicazione

19. La moltiplicazione è un modo compendioso di sommare nel caso che i numeri da sommarsi sieno tutti fra loro eguali. Può definirsi come *l' operazione, con la quale si trova speditamente la somma di un numero tante volte ripetuto, quante unità sono in un altro.* Il primo di questi due numeri dicesi *moltiplicando*, l' altro *moltiplicatore*; e con nome comune *fattori*; ciò che risulta dall' operazione si chiama *prodotto*. Per indicar la moltiplicazione si usa interporre fra i due fattori o un *punto*, o il segno $\times$, che si leggono *moltiplicato per*. Così volendo esprimer che il 6 moltiplicato per 3, o preso tre volte dà 18, si scrive $6.3 = 18$, oppure $6 \times 3 = 18$. Generalmente useremo di porre il moltiplicatore alla destra del segno, il moltiplicando alla sinistra.

20. Possono nella moltiplicazione darsi tre casi differenti: o i due fattori sono numeri semplici, o il moltiplicatore è semplice ed il moltiplicando composto, o sono ambedue composti.

Per moltiplicare nel primo caso conviene o già conoscere tutti i prodotti di ciascuna cifra semplice per tutte le altre, o ricorrere alla di contro tavoletta, nella quale le cifre segnate in fronte o nella colonna marginale sinistra son destinate a rappresentare i fattori, ed il prodotto si trova portandoci sulla colonna che ha in fronte l' uno dei fattori dati, e scendendo finchè non si giunga in linea del numero marginale corrispondente all' altro fattore. Così troveremo che $6 \times 7 = 42$; $5 \times 8 = 40$; $9 \times 3 = 27$ E qui sarà non inutile osservare, che i prodotti sono ora d' una, ora di due cifre: nel primo caso la cifra unica supera ciascuno dei due fattori, nel

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

secondo la prima delle due è minore dell'uno e dell'altro, nè mai giunge a 9.

21. Nel 2.° caso avremo il prodotto con moltiplicare successivamente per il dato moltiplicatore le unità di ciascun ordine del moltiplicando, facendoci dall'ultima a destra o dalle unità semplici; ed avvertendo di *portare* o aggiungere al prodotto parziale delle diecine il numero delle diecine contenute in quello delle unità, al prodotto parziale delle centinaia il numero delle centinaia contenute in quello delle diecine, e così di seguito. Così troveremo che $1738 \times 6 = 10428$; $3961 \times 5 = 19805$. Questa regola in tutto conforme a quella già data per la somma (15), è fondata sugli stessi principj, non ha bisogno d'ulteriore dimostrazione.

22. Piuttosto osserveremo 1°. che se nel moltiplicando abbiasi qualche zero, il suo prodotto, qualunque siasi il moltiplicatore, è sempre nullo. 2°. Qualora le unità del moltiplicatore in luogo di esser semplici o del prim'ordine, sieno d'un ordine qualunque maggiore (4), come per esempio se in vece di 6 si avesse 60, 600, 6000, potrà operarsi come se fossero semplici; ma dovremo aggiungere alla destra del prodotto uno zero se son diecine, due se centinaia, tre se migliaia ec. Infatti siccome il moltiplicatore passando dall'ordine delle semplici unità a quello di diecine, di centinaia, di migliaia acquista un valore dieci, cento, mille volte più grande (7.2°), anche il prodotto dovrà dunque risultare dieci, cento, mille volte maggiore, al che l'aggiunta finale d'uno, due, tre zeri ec. completamente supplisce.

23. Questa osservazione pone in piena evidenza la regola seguente per l'ultimo dei tre casi, quando cioè il moltiplicatore è composto. *Si facciano i prodotti di tutto intero il moltiplicando per le unità di ciascun ordine del moltiplicatore, considerandole come se fossero semplici ed isolate, avvertendo però di aggiungere uno zero alla destra di quello delle diecine, due a quello delle centinaia, ec. Si sommino in seguito tutti i prodotti parziali così ottenuti, ed avremo il prodotto totale cercato.* Eccone degli esempj.

574856 × 826	146327 × 5099
3449136	1316943
11497120	13169430
459884800	731635000
474831056	746121373

24. Si noti 1°. che siccome la prima cifra del moltiplicatore ha un valore relativo più grande di tutta la parte seguente (9), così anche il suo prodotto per l'intero moltiplicando è maggiore della somma di tutti i prodotti parziali antecedenti. Nel modo medesimo e per le stesse ragioni ciascun prodotto parziale supera la somma di tutti quelli che lo precedono.

2°. Se dal prodotto totale si tolga l'ultimo e maggiore dei prodotti parziali, il resto equivarrà al prodotto del moltiplicatore spogliato della sua prima cifra a sinistra, o della cifra d'ordine più elevato. Così se il moltiplicatore è composto di migliaia, centinaia, diecine ed unità, tolto l'ultimo prodotto o quello per le migliaia, il resto equivarrà al prodotto del moltiplicatore ridotto alle sole centinaia, diecine ed unità; se in seguito si toglie anche quello per le centinaia, il nuovo resto conterrà la somma dei prodotti per le diecine ed unità ec.

3°. Siccome gli zeri aggiunti a ciascun prodotto parziale non influiscono nella somma finale, potremo anche non segnargli; purchè le unità del prodotto per le diecine del moltiplicatore, si scrivano sotto le diecine del prodotto per l'unità semplici, quelle del prodotto per le centinaia sotto le centinaia; e così di seguito.

4°. Se nel moltiplicatore s'incontri o uno zero come nel secondo esempio, o un seguito di zeri, il loro prodotto pel moltiplicando essendo nullo, potremo ometterlo affatto; ferma stante però la disposizione dei prodotti successivi secondo l'ordine precedentemente stabilito.

5°. La moltiplicazione può anche effettuarsi in ordine inverso, cominciando cioè dalla prima cifra a sinistra del moltiplicatore. Ma i prodotti parziali dovranno allora segnarsi in modo, che le diecine del secondo cadano sotto le unità del primo, quelle del terzo sotto le unità del secondo ec; cosicchè ciascun prodotto sporga con una cifra al di fuori del suo precedente. Se

peraltro il moltiplicatore abbia o uno zero, o un seguito di più zeri, il cui prodotto come abbiam detto si tralascia, dovremo fare sporgere altrettante cifre di più nel prodotto che segue. Tutto ciò si rende evidente qualora si ristabiliscan gli zeri competenti a ciascun prodotto parziale.

6°. Qualunque sieno i fattori, è sempre lecito invertir l'ordine con cui son dati, cioè prender l'uno in luogo dell'altro per moltiplicatore o per moltiplicando. Così abbiamo lo stesso prodotto 15, o si moltiplichi 5 per 3, o 3 per 5, come anche risulta dalla Tavoletta (20). Infatti moltiplicando 5 per 3 non si fa che prendere tre volte ciascuna delle cinque unità componenti il numero 5. Ma ciascuna di queste unità presa tre volte dà 3: tutte le cinque unità daranno dunque cinque volte il 3, ossia l'equivalente del 3 preso cinque volte o moltiplicato per 5 (19).

7°. Può aversi un prodotto anche da un più gran numero di fattori. Così se il 63, prodotto del 7 per 9, si moltiplichi per 5, il nuovo prodotto 315 potrà considerarsi come proveniente dai tre fattori 7, 9, 5; il che si esprime scrivendo $7 \times 9 \times 5 = 315$. Incontrandosi espressioni di questa natura dovremo dunque operare sui primi due fattori, moltiplicarne il prodotto per il terzo, il nuovo prodotto per il quarto, e così di seguito. Vero è che potendo qui pure aver luogo l'inversione dei fattori, non sarà rigorosamente necessario di seguir l'ordine col quale son dati.

Di qui intanto si deduce, che se il moltiplicatore, o anche il moltiplicando, o l'uno e l'altro insieme manchino delle unità degli ultimi ordini, ossia se le loro ultime cifre sieno zeri (6), opereremo con le rimanenti come se non vi fossero questi zeri, che poi apporremo in egual numero alla destra del prodotto finale. Così se debba moltiplicarsi 7000 per 40; moltiplicheremo 7 per 4, e segneremo 280000 in prodotto. Infatti (5) $7000 = 7 \times 1000$, $40 = 4 \times 10$: dunque $7000 \times 40 = 7 \times 1000 \times 4 \times 10 = 7 \times 4 \times 1000 \times 10 = 28 \times 10000 = 280000$.

25. Allorchè i fattori son numeri molto grandi, come se si dovesse moltiplicare 385103648891 per 4836501279, gioverà di preparare innanzi i prodotti del moltiplicando per ciascuna delle 9 cifre semplici, col facilissimo modo che segue. Scritto

il moltiplicando come di contro, si segni sotto il medesimo il suo prodotto per 2. Se questo si sommi col moltiplicando, avremo visibilmente il prodotto per 3 (19); e se questo pure si sommi col moltiplicando avremo il prodotto per 4; Così proseguendo avremo tutti i successivi prodotti per ciascuna delle altre cifre semplici; ai quali potremo aggiungere anche quello per 10, unicamente per riprova; poichè, se l'operazione è ben fatta, questo deve trovarsi in tutto eguale al moltiplicando, con più uno zero in ultimo a destra della cifra finale (7. 2°.). E se di fianco a ciascun prodotto avremo cura di segnar la cifra semplice da cui risulta, non resterà per eseguire la moltiplicazione che prendere in ordine i prodotti corrispondenti a ciascuna cifra del moltiplicatore, disporgli nel modo già stabilito (24. 3°.), e quindi tutti sommargli.

38510364891	1
77020729782	2
115531094673	3
154041459564	4
192551824455	5
231062189346	6
269572554237	7
308082919128	8
346593284019	9
385103648910	10

26. Noteremo 1° che i prodotti così ottenuti per le cifre semplici si cangiano in prodotti per le corrispondenti unità di diecine, centinaia ec. con la sola aggiunta d'uno, due o più zeri (7. 2°); 2°. reciprocamente le cifre di fianco dovranno riguardarsi come diecine, se uno è lo zero aggiunto; come centinaia se son due, ec: il che tutto è evidente.

27. La prova diretta della moltiplicazione si ha dalla divisione come più sotto vedremo (31). Ma assai più comoda, e quindi molto usitata è la seguente, sebbene indiretta ed in alcuni pochi casi fallace. Sommo separatamente e fra loro le cifre prima dell'uno, poi dell'altro fattore, e in fine del prodotto; ma in modo che ogni qual volta nel sommare giungo ad un numero maggiore di 9, rigetto il 9 e ritengo solo l'eccesso per continuare la somma. Avrò così tre resti finali, che non potranno essere se non numeri semplici e minori di 9. Moltiplico i primi due, quelli cioè provenuti dai due fattori, e sommo le cifre del loro prodotto. Se questa somma eguaglia il terzo resto, quello cioè provenuto dal dato prodotto, o se non ne differisce che di 9 unità, l'operazione potrà supporsi ben fatta. Così ripreso il primo esempio di sopra (23), dal moltiplicatore 826, operando nel modo prescritto, ho il resto 7; dal moltiplicando

574856 ho il resto 8, dal prodotto 474831056 ho 2. I due primi moltiplicati danno 56, le cui cifre sommate danno 11, che differendo di 9 unità dal resto 2 del prodotto, mostra che l'operazione può supporsi ben fatta.

Vedremo a suo luogo i fondamenti di questa regola volgarmente conosciuta col nome di *riprova del* 9. Essa è fallace, 1°. quando nel prodotto sia stato scritto uno zero in luogo del 9 e viceversa; 2°. quando o l'una o l'altra di queste cifre sia stata o aggiunta o soppressa; 3°. quando siansi trasposte due o più cifre; 4°. quando gli errori commessi in una parte del prodotto sieno compensati da altri commessi in senso opposto nell'altra. È infatti evidente che in ciascuno di questi quattro casi la somma delle cifre torna la stessa, o toltone il 9 dà il medesimo avanzo. È però sempre vero che se la riprova, quando sia ben fatta, non torna, vi è certamente errore nel prodotto finale.

Divisione

28. La divisione è un'operazione con la quale si trova quante volte un numero è contenuto in un altro.

Ora è manifesto che un numero è contenuto in un altro tante volte, quante ne potrebbe esser sottratto; e perciò la via naturale per giungere a queste ricerche sarebbe di sottrarre quante volte si può il minore dal maggiore. Con ciò si troverebbe per esempio che il 12 contiene il 4 esattamente 3 volte; perchè sottraendo il 4 da 12 si ha 8, sottraendo di nuovo si ha 4, e sottraendo di nuovo nulla avanza. E parimente si troverebbe che il 9 è contenuto 2 volte nel 23, ed avanzano inoltre 5 unità; poichè da una prima sottrazione si ha 14, da una seconda si ha 5, che essendo minor di 9 non dà luogo a sottrazioni ulteriori. Questo metodo porterebbe per altro assai in lungo, e sarebbe nei più dei casi impraticabile, atteso il gran numero di sottrazioni che occorrerebbe di fare; perciò è stata immaginata la *divisione*, col cui mezzo le sottrazioni son risparmiate, e si giunge all'intento medesimo, ma con calcolo sommamente più breve. Prima di darne le regole premetteremo le seguenti nozioni.

29. Il maggiore dei due numeri, o quello che generalmente

si tratta di dividere, si chiama *dividendo*: il minore, e quello che dovrebbe sottrarsi o per cui si divide, si chiama *divisore*; il risultamento, o il numero delle volte che il dividendo contiene il divisore, *quoto* o *quoziente*, e l'avanzo finale *resto* della divisione Così nel primo esempio (28) sarebbe 12 il dividendo, 4 il divisore, 3 il quoziente; e nel secondo 23 il dividendo, 9 il divisore, 2 il quoziente, 5 il resto.

30. Quando non vi è resto, come nel primo esempio, il quoziente dicesi *esatto*, e l'operazione si accenna brevemente scrivendo $\frac{12}{4}=3$, oppure $12:4=3$; ove tanto la linea, che i due punti interposti fra il dividendo a sinistra e il divisore a destra, si pronunziano *diviso per*, e indican sempre una divisione da farsi. Quando vi è un resto, si pone alla destra del quoziente, facendolo precedere dal segno $+$ (14), e sotto di esso, interposta una linea, si segna il divisore. Così nel secondo esempio si scriverebbe $\frac{23}{9}=2+\frac{5}{9}$, con che viene ad indicarsi che il 23 contiene il 9 due volte, e restano ancor 5 unità da dividersi in 9 parti. Il quoziente unito al resto prende il nome di *quoziente completo*; separato, prende quello di *quoziente particolare*. Il resto, qualunque sia, deve esser sempre più piccolo del divisore, comecchè equivalente ad una quantità da cui il divisore non può sottrarsi (28).

31. Se quante volte si è potuto togliere o sottrarre il divisore dal dividendo, altrettante volte si aggiunga al resto avuto, è visibile che verrà a riprodursi il dividendo (18. III^a). E poichè il numero di tutte le possibili sottrazioni è indicato dall'unità del quoziente (29), prendendo dunque il divisore tante volte, quante son queste unità, ossia moltiplicandolo per il quoziente (19), e aggiungendo il resto al prodotto, avremo il dividendo. Così da $\frac{23}{9}=2+\frac{5}{9}$, viene $2\times9+5=18+5=23$. Dunque 1°. *il dividendo eguaglia il prodotto del quoziente nel divisore più il resto.* Quindi 2°. *se il resto è nullo, il prodotto del divisore nel quoziente deve eguagliare il dividendo*; e perciò 3°. *se nel caso del resto nullo, si divida il dividendo per il quoziente otte-*

nuto, avremo per nuovo quoziente il divisore: altrimenti questo moltiplicato per quello non riprodurrebbe il dividendo; d'onde 4°. *se un prodotto dato si divida per uno qualunque dei suoi fattori dovremo aver l'altro in quoziente;* nel che appunto consiste la prova diretta della moltiplicazione di cui parlammo di sopra (27). Che se il prodotto abbia più fattori (24. 7°.), dividendo per uno di essi, dovremo, siccome è chiaro, aver per quoziente il prodotto dei rimanenti; il che seguirà pure se si divida per il prodotto di due dei medesimi, di tre ec; e in ogni caso il quoziente sarà sempre esatto. Così se il 30, prodotto di 2, di 3 e di 5, si divida per 2, avremo in quoziente 15, prodotto di 3 per 5; se per 3, avremo 10, prodotto di 2 per 5; se per 5, avremo 6, prodotto di 2 per 3; e potremo anche dividerlo per 6, per 10, per 15 e per 30, prodotti di 2×3, di 2×5, di 3×5, e di 3×5, e di 6×5 o di $2\times3\times5$. Più in generale potremo quindi stabilire 5°. *che se un numero sia divisibile esattamente per due o più numeri dati, sarà divisibile altresì per tutti i prodotti che possono formarsi, moltiplicandoli o tutti, o parte fra loro.*

32. Se dunque sia A il dividendo, B il divisore, p il quoziente, ed R il resto, avremo $A=pB+R$; e sarà pB il massimo multiplo di B contenuto in A, ed il resto R l'eccesso di A al di sopra di questo multiplo. Per analogia chiamasi *resto* anche ciò che manca ad A per giungere al multiplo immediatamente superiore $(p+1)B$, e *quoziente* il numero $p+1$ di volte che il dividendo A entra in esso multiplo superiore, e poichè in tal caso, continuando a chiamar R il resto, abbiamo evidentemente $A=(p+1)B-R$, il quoziente primitivo cresce dunque d'un' unità, ed il resto è negativo. Spesso occorre di far uso di questo secondo modo di calcolo, specialmente, quando si vuole un resto di segno contrario a quello che si ha dal modo precedente. Così in luogo di dire che il 9 entra 2 volte nel 23 con 5 d'avanzo, si dice che v'entra 3 volte con l'avanzo -4: ed infatti $23=3\times9-4$.

33. Scendendo adesso alle regole osserveremo, che, come nella moltiplicazione (20), hanno luogo anche nella divisione tre casi distinti: 1° quando il dividendo è semplice, cioè d'una sola cifra, oppure è composto di due sole cifre in modo, che non giunga al prodotto del divisore per 10: 2° quando il divisore essendo semplice, il dividendo è composto di qualsivoglia numero di cifre: 3° quando il divisore e il dividendo sono ambedue composti. Le regole per ciascuno di questi tre casi sono appoggiate

al principio stabilito (31. 1°), che il dividendo deve eguagliare il prodotto del divisore pel quoziente più il resto.

34. Nel primo, cerco tra le cifre semplici quella che moltiplicata per il divisore o rende esattamente il dividendo, o dà il prodotto più prossimo inferiore. Questa sarà il quoziente; e la differenza fra il suddetto prodotto e il dividendo, qualora vi sia, darà il resto della divisione, che si segnerà come si disse (30). Così troveremo che $\frac{72}{8}=9, \frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}, \frac{38}{5}=7+\frac{3}{5}$. Che se riesca difficile il ritrovamento del quoziente nel modo indicato, potremo far uso della Tavoletta data per la moltiplicazione (20). Si cerchi nel margine sinistro la cifra corrispondente al divisore dato, ed in linea alla medesima il numero o eguale o immediatamente inferiore al dividendo. La colonna ove questo si trova avrà in fronte il quoziente cercato.

35. Quanto agli altri casi, daremo la regola per il terzo, che include quella pure per il secondo; e per fissar meglio le idee l' esporremo sopra un esempio.

Abbiasi da dividere 2878854 per 583; dovrà dunque aversi per quoziente un tal numero, che moltiplicato per 583 o renda esattamente il dividendo dato, o dia un prodotto differente in meno dal dividendo di una quantità minore di 583 (29. 30). Or questo numero deve evidentemente esser maggiore di 1000 e minore di 10000; perchè nel primo caso darebbe un prodotto minore del dividendo, nel secondo lo darebbe maggiore. Dunque sarà composto di quattro cifre, o di quattr' ordini di unità, cioè migliaia, centinaia, diecine ed unità semplici (7). Per trovarne il valore individuale comincio dall' unità di migliaia, e formata la tavola dei prodotti del divisore per le unità semplici (25), aggiungo mentalmente a ciascuno tre zeri per cangiargli in prodotti di migliaia (26) o dell' ordine più elevato del quoziente. Osservo che i primi prodotti, fino a quello per 4 inclusivamente, sono allora minori del dividendo, mentre quello per 5 con tutti i seguenti son maggiori. Concludo dunque che il quoziente è maggiore di 4000 e minore di 5000. Contiene quindi 4 migliaia, che è quanto dire comincia con la cifra 4, la quale scrivo

583	1
1166	2
1749	3
2332	4
2915	5
3498	6
4081	7
4664	8
5247	9
5830	10

| 4938
2878854
2332000
546854
524700
22154
17490
4664

in luogo a ciò preparato al di sopra del dividendo. Porto al di sotto del dividendo il prodotto per le 4 migliaia, con gli zeri che gli competono alla destra, e sottraggo. L'avanzo sarà il prodotto del divisore per le centinaia, diecine ed unità del quoziente (24. 2°). Cerco le centinaia operando come ho fatto per le migliaia: aggiungo cioè mentalmente due zeri a ciascun dei prodotti della tavoletta: ed osservo che l'avanzo riman contenuto fra i due prodotti per 9 e per 10. Concludo dunque come sopra che le centinaia del quoziente non sono nè più nè meno di 9, le quali segno nel solito luogo alla destra del 4. Scrivo sotto l'avanzo precedente il prodotto per 9 coi due zeri che ho mentalmente supposti: sottraggo, ed ho un secondo avanzo che equivarrà al prodotto del divisore nelle sole diecine ed unità del quoziente (24. 2°). Operando nel modo stesso, e aggiungendo un solo zero ai prodotti, troverò esser 3 le diecine, che segnerò accanto alle centinaia del quoziente. Sottratto il prodotto per le tre diecine, avrò per terzo avanzo il prodotto per le semplici unità; e poichè questo corrisponde esattamente nella tavola al prodotto per 8, concluderò che le unità cercate sono 8; le segnerò accanto alle diecine in quoziente, con che l'operazione sarà terminata.

36. Avverto 1°. Che qualora s'incontri un avanzo minore di tutti quanti i prodotti aumentati del numero di zeri corrispondente alla classe delle unità che si cercano (26), ciò sarà indizio che questa classe d'unità deve mancar nel quoziente. Porremo dunque uno zero in suo luogo (6), e proseguiremo a cercar le unità della classe che segue. 2°. Se l'ultimo avanzo non coincide con alcuno dei prodotti, se ne sottrarrà il prodotto immediatamente minore, e si formerà un nuovo avanzo, che sarà il resto della divisione, da segnarsi, nel luogo e modo stabilito, accanto al quoziente (30). Con queste due avvertenze troveremo che 2221649 diviso per 652, dà per quoziente 3407, più 285 di resto.

37. Tutto questo calcolo può in pratica molto abbreviarsi. In primo luogo gli zeri aggiunti alla destra dei prodotti, che successivamente si portano sotto il dividendo e sotto gli avanzi, possono omettersi, bastando considerarvegli soltanto mentalmente come presenti. In secondo luogo è visibile che l'ultime cifre

del dividendo, quelle che restano cioè al di là del primo prodotto, non entrano in calcolo che ad una per volta in ciascuno degli avanzi successivi: così nell'esempio di sopra (35) la prima, 8, non comincia a figurare o a computarsi, che quando si tratta di sottrarre il secondo prodotto o formare il secondo avanzo; parimente sulla seconda, 5, non si opera che quando si toglie il terzo prodotto, e si genera il terzo avanzo; e l'ultima rimane intatta fino a che con la sottrazione del quarto prodotto non si termina l'operazione. Possiamo dunque lasciarle in principio, senza avervi riguardo, nel dividendo; ed abbassarle successivamente una per volta alla destra degli avanzi a misura che si saranno ottenuti. In terzo luogo, se il divisore sia piccolo, e si abbia bastante pratica nella moltiplicazione, potremo dispensarci dal far la tavola dei prodotti, e trovar *tentando* il quoziente nel modo che segue.

Si separino a sinistra del dividendo tante cifre, quante ne ha il divisore o una di più, qualora la prima del dividendo sia più piccola di quella del divisore. Per la prima cifra del divisore si divida la prima, o se non si può, il numero composto dalle due prime del dividendo; e segnato il quoziente nel luogo preparato, se ne faccia il prodotto per il divisore scrivendolo sotto le cifre separate del dividendo, e si sottragga. Se la sottrazione sarà possibile, cioè se il prodotto non sarà maggiore del numero formato delle cifre separate del dividendo, o se potendo sottrarsi non s'otterrà un avanzo più grande del divisore (30), la cifra segnata apparterrà al vero quoziente. Diversamente converrà diminuirla quanto occorrer potrà nel primo caso, accrescerla nel secondo. L'ultimo caso è assai più raro del primo: e quanto a questo potremo renderlo meno frequente, e diminuir così i tentativi, se dopo aver diviso, come si è detto, per la prima cifra del divisore, proseguiremo a divider per la seconda il numero formato dall'avanzo che avremo avuto, convertito in diecine, e dalla cifra seguente del dividendo: se il nuovo quoziente si troverà minore del primo, concluderemo che questo è troppo forte; onde prima d'inoltrarci nell'operazione dovremo diminuirlo almeno di un'unità, e spesso anche di due, tre ec. Così nell'esempio (35) la prima cifra 5 del divisore entra 5 volte nel 28, e si ha 3 di avanzo, che convertito

in 30 e unito al 7, terza cifra del dividendo, dà 37, in cui non entra 5 volte la seconda cifra 8 del divisore. Il quoziente 5, è dunque troppo forte. Diminuendolo di un'unità, e supponendo perciò che il 5 non entri che 4 volte nel 28, avremo 8 d'avanzo, col quale e col 7 si forma 87, in cui l'8 entra molto più che 4 volte. Possiam dunque segnare il 4 per prima cifra del quoziente cercato. Moltiplicatolo per il divisore e sottratto il prodotto, si abbasserà accanto all'avanzo, secondo l'insegnamento già dato (37), la cifra 8 che vien la prima dopo quelle separate in principio nel dividendo, e si passerà a cercare nel modo medesimo la seconda cifra del quoziente, e così successivamente tutte le altre.

I fondamenti di questa pratica sono presso a poco i seguenti. Si è in principio ridotto il dividendo alla sola sua parte iniziale 2878, perchè già vedemmo che il rimanente non entra in calcolo, se non dopo stabilita la prima cifra del quoziente. Si è poi diviso il 28 per 5, presupponendo di averne lo stesso quoziente come dal dividere tutto il dividendo parziale 2878 per l'intero divisore 583. E tanto avverrebbe, se il divisore fosse non 583 ma 500: chiaro essendo che le 28 centinaia comprese nel 2878 non posson contenere le 5 centinaia del 500, che quante volte il 28 contiene il 5. Ma se il 2878 contiene il divisore supposto 500, quante volte il 28 contiene il 5, non conterrà per altro un numero eguale di volte il vero divisore 583, tanto più grande di quello: meno il caso che il 378, avanzo della divisione per 500, contenga esso pure altrettante volte l'83, eccesso del divisore vero 583 sul divisore supposto 500. Quindi è, che per esser sicuri della bontà del quoziente trovato, convien tentare la divisione del 378 per 83, ossia, secondo lo spirito del metodo, quella del 37 per 8, come abbiamo fatto.

Volendo abbreviare anche di più, potremo dispensarci dallo scrivere i prodotti, facendone la sottrazione a mente a misura che andiamo formandogli. Questo metodo conosciuto col nome di *danda alla breve* (il precedente si chiama *danda alla lunga*), esige in vero una maggior franchezza di calcolo, che presto per altro si acquista. Facilissimo poi, e quasi indispensabile diviene nel caso che il divisore sia semplice. Eccone un esempio.

Sia da dividersi 41853 per 7. Divido primieramente il 41, ed ho 5 in quoziente e 6 d' avanzo, che senza neppur segnare converto in 6 diecine, alle quali aggiungo la cifra seguente 8 del dividendo e formo 68. Divido questo pure per 7, ed ho 9 in quoziente e 5 d'avanzo. Converto questo pure in diecine, e formo con la cifra 5 che segue nel dividendo, 55. Divido per 7, ed ho 7 in quoziente e 6 d'avanzo, che convertito in diecine e unito all'ultima cifra 3 del dividendo, mi dà 63, d'onde ho 9 per ultima cifra del quoziente cercato, che sarà dunque 5979.

| 5979
7⟋41853

38. Del rimanente la dipendenza di questi compendj dal metodo generale (35) è evidente da se medesima; nè esige che inutilmente, e troppo a lungo ci diffondiamo in mostrarla. Piuttosto ritornando sulle regole, avvertiremo 1°. Che incontrandosi un resto, il quale dopo la cifra abbassata dal dividendo rimanga più piccolo del divisore, dovremo segnare zero in quoziente, abbassare una nuova cifra e proseguire; e se neppur l'aggiunta della seconda cifra basti a rendere il resto più grande del divisore, se ne abbasserà una terza, segnato prima un nuovo zero in quoziente; e così si continuerà finchè il medesimo caso avrà luogo. Tutto ciò è uniforme a quanto già osservammo di sopra (36.1°). Con questa regola troveremo che 790758 diviso per 394, dà per quoziente 2007. 2°. Se terminata tutta l'operazione, niente avanza, la divisione sarà esatta; diversamente segueremo l' ultimo resto nel modo stabilito (31). 3°. Se il dividendo e il divisore terminino con zeri, potremo sopprimerne un egual numero nell'uno e nell' altro, senza che per questo resti alterato il valore del quoziente: così dovendo dividere 780 per 50, divideremo 78 per 5, ed avremo uno stesso quoziente; del che si vedrà la ragione a suo luogo. 4.° Se il solo divisore termina con zeri, potremo toglierli, purchè nel tempo stesso si tolgano altrettante cifre dal dividendo, le quali poi si aggiungeranno alla destra dell' avanzo finale, che si porrà accanto al quoziente con sotto tutto intero il divisore. È facile vederne il motivo.

39. Il principio che ci ha condotti alle regole per la divisione (33) porge manifestamente il modo di farne la riprova. Ma ancor quì ha luogo quella del 9 (27). Si cerchino nel solito modo e si moltiplichino i resti del divisore e del quoziente,

e si porti mentalmente il prodotto alla sinistra o alla destra del resto finale della divisione. Il resto dato dal numero così composto dovrà eguagliare quello del dividendo. Così nell' esempio di sopra (36) il resto del divisore 652 è 4, del quoziente 3407 è 5, il loro prodotto 20, che unito a 285 resto della divisione dà 20285, d'onde si ha il resto 8 come dal dividendo 2221649.

40. Una quantità la quale può dividersi per un' altra si dice *multipla* di questa, cioè *dupla*, *tripla* ec. se il quoziente è 2, 3 ec., e questa si dice *summultipla* o *aliquota* della prima, cioè *suddupla*, *suttripla* ec. se entra nella prima 2 volte, 3 ec. Così 10 è duplo di 5, 18 è triplo di 6; 8 è multiplo di 4 e di 2. Ogni numero è multiplo d' 1 ec.; all' incontro 2 è summultiplo di tutti i numeri pari; 5 lo è di tutti i numeri terminati in 5, oppure in zero ec. Ma la quantità che divisa per un' altra lascia un resto, dicesi *prima* a quest' altra, e ambedue si chiaman *prime tra loro*: così 8 e 5, 14 e 3 son primi tra loro. Si chiama poi in generale, *numero primo*, ogni numero intero non multiplo d' altro intero maggior dell' unità. Tali sono il 2, 3, 5, 7, 11 ec.

41. Come la formula mp, quando m vi si suppone intero, rappresenta tutti i multipli di p, così la formula $mp \pm r$ rappresenta ciascuno dei non multipli, fatto successivamente $r=1, =2, =3$ ec. fino ad $r=\frac{1}{2}p$ se p è pari, e fino ad $r=\frac{1}{2}(p-1)$ se p è impari. In fatti è visibile che la massima differenza fra un numero non multiplo e il multiplo più prossimo, non può esser maggiore della metà di quella che passa fra due multipli successivi; e un numero che differisca di $\frac{1}{2}p+a$ dal multiplo inferiore, differirà di $\frac{1}{2}p-a$ dal superiore. Quindi fatto $p=2$, la formula $2m$ rappresenterà tutti i numeri multipli di 2 o pari, la formula $2m \pm 1$ gli impari. I multipli di 3 saranno rappresentati da $3m$, i non multipli da $3m \pm 1$; i multipli di 4 da $4m$, i non multipli in parte da $4m \pm 1$ e in parte da $4m \pm 2$; i multipli di 5 da $5m$, i non multipli in parte da $5m \pm 1$ e in parte da $5m \pm 2$; i multipli di 6 da $6m$, i non multipli in parte da $6m \pm 1$, in parte da $6m \pm 2$, in parte da $6m \pm 3$; d' onde si ha che $6m \pm 2$ essendo pari, e $6m \pm 3$ essendo multiplo di 3, *tutti i numeri primi, fuorchè 2, 3, son della forma $6m \pm 1$*, teorema dovuto a *Gio. Bernoulli*. Così possono aversi altre formule; ma le precedenti bastano a dimostrare i Teoremi che seguono. 1°. La somma, la differenza e il prodotto di due numeri pari, è pari; 2.° la somma e la differenza d' un pari e d' un impari sono impari; 3°. il prodotto d' un pari per un impari è pari; 4°. la somma e la differenza di due impari sono pari; 5°. il prodotto di due impari è impari; 6°. $m(m+1)$ è sempre multiplo di 2; poichè se m è pari lo sarà anche il prodotto, se è impari, sarà pari l' altro fattore, e quindi il prodotto sarà sempre pari;

$m(m+1)(m+2)$ è multiplo di due e di 3: poichè in primo luogo i primi due fattori danno un prodotto pari; e in secondo luogo, se m è multiplo di 3, lo sarà pure il prodotto; se non è, differirà dal multiplo di 3 o di una, o di due unità, e perciò sarà multiplo o l'uno, o l'altro dei due fattori $m+1$, $m+2$. Nell'istessa maniera si prova, che $m(m+1)(m+2)(m+3)$ è un multiplo di 2, 3, 4, e così di seguito; onde in generale l'espressione $\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n)}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots(n+1)}$, e per analoghe ragioni anche l'altra $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n)}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots(n+1)}$ qualunque sieno m ed n, purchè interi, ridotte a numeri danno sempre un intero; di più la seconda sarà multipla di m, quando m sia primo e $>n+1$, non potendo allora questo fattore venire eliso da veruno dei denominatori.

42. Di qui si apprende come i coefficienti numerici della serie in cui si sviluppa il binomio $(a\pm b)^m$, quando m è intero, son sempre interi, e di più che tolto il primo ed ultimo termine, i quali hanno per coefficiente l'unità, tutti gli altri son multipli di m, quando m è primo. In quest'ipotesi $(a+1)^m-a^m-1$ sarà dunque multiplo di m, e fatta $a=1,=2,=3$ ec. l'espressioni 2^m-2, 3^m-2^m-1, 4^m-3^m-1, 5^m-4^m-1 ec. saranno tutte multiple d'm; e lo saranno pure 3^m-3, 4^m-4, 5^m-5 ec. somme delle prime due, delle prime tre, delle prime quattro ec. ed in generale lo sarà c^m-c; e poichè $c^m-c=c(c^{m-1}-1)$, perciò *se* m *è numero primo*, *e c non divisibile per* m, $c^{m-1}-1$ *sarà multiplo di* m: teorema celebre di *Fermat*.

43. Possono aver qui luogo anche i seguenti teoremi: 1.° se $a\pm b$ sia eguale ad mp multiplo di p, saranno pure multiple di p la somma e differenza dei resti r, r' di $a:p$, e di $b:p$. Infatti supposti q, q' i due quozienti, avremo $a=pq+r$, $b=pq'+r'$, quindi $a\pm b=mp=p\,(q\pm q')+r\pm r'$, d'onde $r\pm r'=mp-p\,(q\pm q')$.

2.° Se a, b primi fra loro sieno ambedue multipli di p, lo sarà anche r, resto della divisione di a per b. Infatti, supposto q il quoziente, avremo (32) $a=bq+r$, d'onde $r=a-bq$, multiplo di p quando lo sono a, b.

3.° Se p sia il prodotto di tutti i fattori comuni ad a, b, o il massimo comun divisore (57) del rotto $\frac{a}{b}$, sarà altresì massimo comun divisore di $\frac{b}{r}$. Infatti b ed r debbono per ciò che si è detto aver per comun fattore p; or se avessero oltre p un altro fattor comune p', in forza dell'equazione $a=bq+r$ dovrebbe averlo anche a, nè in conseguenza p sarebbe il massimo comun divisore di a, b contro l'ipotesi. Dal che anche risulta che posto $a=mp$, $b=np$, $r=tp$, i tre coefficienti m, n, t non avranno alcun fattor comune, e molto meno l'uno potrà esser multiplo dell'altro, e tanto il rotto $\frac{m}{n}$ quanto $\frac{n}{t}$ ed $\frac{m}{t}$ saranno irriducibili.

4.° Se ambedue i termini b, a del rotto proprio $\frac{b}{a}$ si diminuiscono di una stessa quantità $x<a$ il rotto scemerà di valore, ossia il nuovo rotto $\frac{b-x}{a-x}$ sarà minore

del dato $\frac{b}{a}$. Infatti sottraendo quello da questo si avrà per differenza $\frac{x(a-b)}{a(a-x)}$, quantità positiva e che mostra essere il rotto primitivo maggiore del nuovo. Avviene l'opposto se il rotto $\frac{b}{a}$ sia improprio. Nel modo stesso si dimostrerà che se si aumentino di una stessa quantità qualunque x i suoi due termini, questo crescerà di valore se è proprio, e scemerà se è improprio.

5.° Il rotto $\frac{x}{a+x}$ scema o cresce di valore a misura che scema o cresce il valore di x. Infatti, scemando o crescendo x, scemano o crescono di una stessa quantità i due termini del rotto, dunque questo scema nel primo caso e cresce nel secondo.

6.° Se diviso successivamente il numero qualunque p per i numeri 1, 2, 3, . . . fino a $\sqrt{p}$ non si trovi alcun quoziente esatto, p sarà primo. Infatti supponiamo che diviso p per $a>\sqrt{p}$ potesse aversi il quoziente esatto q; sarebbe $q=\frac{p}{a}<\frac{p}{\sqrt{p}}$, ossia $q<\sqrt{p}$; ma q è necessariamente divisore di p, dunque p potrebbe dividersi per un numero $<\sqrt{p}$ contro l'ipotesi.

44. I numeri primi non potendo, ad eccezione del 2, terminare con cifra pari, perchè i numeri così terminati son divisibili per 2, nè potendo terminare col 5, perchè allora son divisibili per 5 (40), finiranno o in 1, o in 3, o in 7, o in 9. Su questo principio è costruita la *Tavola dei numeri primi* fino a 100000, che è al fine di questo Tomo, e che nel tempo stesso dà i più piccoli divisori dei numeri non primi e terminati in alcuno dei predetti modi. I numeri vi son disposti sotto la lettera N, purchè l'ultime due cifre si cerchino nella prima o ultima fila orizzontale: così per sapere se 85577 è numero primo, cerco 855 sotto N, e 77 in alto o in basso; e poichè dirimpetto a 855 e sotto 77 trovo un punto, il numero è primo. Se nel modo stesso cerco 39039, troverò 3, il che significa che non è primo; ma che ha per lo meno due divisori, di cui il più piccolo è 3. Infatti dividendo, si trova il quoziente esatto 13013, che sarà egualmente divisore del numero dato (31).

45. Ma oltre qnesti, può lo stesso numero aver molti altri divisori, la cui ricerca dipende da quella degli *elementi*, cioè di *tutti quei numeri primi in cui il dato è risolubile, o dal cui prodotto risulta* (24. 7.°). Nel nostro esempio il primo e più piccolo è il 3 già trovato, per cui diviso il 39039, si ha, come abbiamo veduto, 13013. Di questo quoziente cerco nella Tavola, come sopra, il più piccolo divisore, ed ho 7, per cui fatta

la divisione, ho 1859, che ha per più piccolo divisore l'11. Divido ed ho 169, che ha per più piccolo divisore il 13. Divido dunque per 13, ed ho il quoziente 13, numero primo e sul quale termina l'operazione. Quindi gli elementi di 39039 saranno il 3, 7, 11, 13, 13, ed infatti $3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 13 = 39039$.

46. Osserv. I[a] Se il numero è pari si comincerà dal farne la divisione per 2, che si ripeterà finchè non si giunga ad un quoziente impari reperibile nella Tavola, ponendo altrettante volte il 2 come elemento. II[a] Parimente se il numero o alcuno dei quozienti successivi termini in 5, divideremo per 5, il che ripeteremo quante volte occorrerà, e altrettante porremo il 5 come elemento. Così troveremo che gli elementi del 1800 sono 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5.

47. Avuti così gli elementi, si disporranno gli uni sotto gli altri in colonna, e quindi si moltiplicheranno i due primi fra loro, e si scriverà il prodotto presso al secondo, come si vede praticato qui appresso. Poi si moltiplicherà il terzo per i due primi e per il loro prodotto, il quarto per i tre primi e loro prodotti, e così di seguito, avvertendo di non segnare che una sola volta i prodotti che tornassero ripetuti. Tutti questi prodotti uniti agli elementi formano, oltre l'unità, il numero totale dei divisori, e ciascuno divide esattamente il numero dato (31. 5°).

39039	3.
13013	7. 21.
1859	11. 33. 77. 231.
169	13. 39. 91. 273. 143. 429. 1001. 3003.
13	13. 169. 507. 1183. 3549. 1859. 5577. 13013. 39039.

ROTTI

Natura dei Rotti, loro valore e loro paragone

48. L'intero diviso in parti, si riproduce dalla lor riunione; se ne manchi alcuna, si avrà un *Rotto* o una *Frazione* (13).

L'idea di Frazione comprende perciò il *numero* e la *specie* delle parti in cui fu diviso l'intero, parti che si sup-

pongono fra loro eguali: così $\frac{4}{5}$ (che si pronunzia 4 *diviso per* 5, o *quattro quinti*) esprime 4 parti delle 5 eguali, in cui l'intero fu diviso; il numero superiore 4 le numera, e si chiama *Numeratore*, l'inferiore 5 ne nomina la specie, e dicesi *Denominatore*: ambedue diconsi *Termini del rotto*.

49. Un rotto è *proprio* o *improprio* o *apparente*, secondo che il numeratore è minore, maggiore, o multiplo del denominatore: così $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$ son rotti proprj; $\frac{103}{20}$, $\frac{24}{9}$ improprj; $\frac{11}{11}$, $\frac{24}{6}$, $\frac{36}{9}$ apparenti. Il rotto proprio è sempre più piccolo dell' intero o dell' unità; l' improprio contien l' unità una o più volte con avanzo; l' apparente contiene una o più unità senza avanzo. Gli ultimi due non cadono rigorosamente sotto la definizione data; come anche apparisce dagli aggiunti *improprio* e *apparente*, che loro appunto si danno per distinguergli dai veri rotti. Il rotto improprio $\frac{103}{20}$ indica che non una, ma più unità sono state divise ciascuna in 20 parti, e di queste ne sono state prese 103, cioè più di quante ne abbisognano per formare una sola unità, ma meno di quante ne occorrono per formare un numero completo d'unità insieme riunite. Ed il rotto apparente $\frac{24}{6}$ indica che si son divise più unità in 6 parti, e di queste se ne son prese 24, cioè quante bastano per formare quattro intere unità. Sì l'una che l'altra specie di questi rotti equivalgono al quoziente completo (30), che si otterrebbe dividendo in effetto il numeratore per il denominatore; e quindi non è raro l'uso di chiamargli *quozienti*, uso che si estende pure ai rotti proprj, e in generale a tutte l'espressioni che si presentano in forma di rotto.

50. *Di due rotti con lo stesso numeratore, quello che ha un minor denominatore è più grande*, perchè contiene parti dell' intero in egual numero, ma tutte maggiori, così $\frac{1}{2}$ è maggiore di $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$ son maggiori di $\frac{2}{5}$: *con lo stesso denominatore, quello è più grande che ha un maggior numeratore*, perchè contiene un maggior numero di parti, tutte eguali in grandezza a quelle contenute nell' altro: così $\frac{2}{3}$ son maggiori di $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$ maggiori di $\frac{2}{8}$. Quindi moltiplicando o comunque aumentando il nu-

meratore di un rotto, questo crescerà sempre di valore, dividendolo, o comunque diminuendolo il valore scemerà, ed avverrà l'opposto se le stesse operazioni si facciano sul denominatore.

51. Ma se tanto il numeratore che il denominatore si moltiplicheranno o si divideranno per una medesima quantità, l'effetto dell'operazione fatta sull'uno di questi due termini sarà distrutto dal contrario effetto di quella fatta sull'altro, ed il valor del rotto rimarrà sempre lo stesso. Così moltiplicando per 2 il numeratore del rotto $\frac{2}{7}$, ho $\frac{4}{7}$ doppio di $\frac{2}{7}$: ma se moltiplicherò per 2 ancora il denominatore 7, avrò $\frac{4}{14}$, che essendo metà di $\frac{4}{7}$, perchè con egual numeratore ha doppio denominatore, ritorna per conseguenza eguale al rotto $\frac{2}{7}$.

52. Concluderemo adunque che il valor di un rotto non si altera mai dividendone o moltiplicandone ambedue i termini per una stessa quantità; e perciò *vi è un'infinità di rotti dello stesso valore, benchè espressi in termini differenti*; così $\frac{36}{72}=\frac{18}{36}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, ove i due termini del primo son divisi per 2, quei del secondo per 3, e quei del terzo per 6, che han dato il rotto $\frac{1}{2}$, visibilmente eguale ai precedenti.

53. Talvolta il numero per cui debbonsi o vogliònsi dividere i due termini di un dato rotto è summultiplo dell'uno, ma non dell'altro. La divisione potrà dunque effettuarsi esattamente sul primo, ma non sul secondo, e nascerà quindi un rotto di nuova specie col denominatore, o col numeratore frazionario, o parte intero e parte frazionario. Così se il rotto $\frac{62}{117}$ si divida sopra e sotto per 31, avremo $\frac{62}{117}=\frac{2}{\frac{117}{31}}=\frac{2}{3+\frac{24}{31}}$; e se $\frac{24}{31}$ si divida sopra e sotto per 6, avremo $\frac{24}{31}=\frac{4}{\frac{31}{6}}=\frac{4}{5+\frac{1}{6}}$; valore che sostituito nell'espression precedente darà $\frac{62}{117}=\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{1}{6}}}$. I rotti di

questa forma son conosciuti col nome di *frazioni continue* : ne tratteremo diffusamente a suo luogo.

Operazioni preliminari sui Rotti

54. *Trasformar gl' interi in rotti*. Si riduce un intero alla forma di rotto 1°. col dargli 1 per denominatore: così $6=\frac{6}{1}$, $8=\frac{8}{1}$ ec. Che se poi piaccia dare al nuovo rotto un determinato denominatore, come per esempio 7, si moltiplicheranno per 7 sì l' intero che l'unità sottoposta. Così $6=\frac{6}{1}=\frac{6.7}{1.7}=\frac{42}{7}$ (52).

55. *Ridur più rotti allo stesso denominatore*. Moltiplico i termini di ciascun rotto pel prodotto dei denominatori di tutti gli altri, e i nuovi rotti hanno il valor di prima e un denominatore comune (52): così per ridurre $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$ moltiplico per 4 tutto il rotto $\frac{1}{5}$, e per 5 tutto il rotto $\frac{3}{4}$ ed ho $\frac{4}{20}$ e $\frac{15}{20}$. Egualmente per ridurre $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{2}{3}$, si moltiplicheranno per $3\times9=27$ i termini del 1°. rotto, per $3\times6=18$ quelli del 2°, per $6\times9=54$ quelli del 3°, e si avranno i rotti $\frac{135}{162}$, $\frac{126}{162}$, $\frac{108}{162}$. Ma quì poteva osservarsi che i denominatori son tutti summultipli (40) del 18. In tal caso basterà moltiplicare ciascun rotto pel quoziente che si ha dal divider 18 per il respettivo denominatore, con che i tre rotti diverranno $\frac{15}{18}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{12}{18}$ tutti con uno stesso denominatore (31. 2°).

56. Come quest'ultimo metodo è men faticoso, e porta a risultamenti più semplici, deve quindi preferirsi all'altro ovunque si possa. Che se non si presenti subito il numero multiplo di tutti i denominatori, potremo averlo cercando gli elementi di ciascun denominatore (45), segnandoli l'un dopo l' altro, omessi per ogni denominatore quei tanti che si trovasse aver comuni con alcuno dei denominatori precedenti, e infine moltiplicando insieme tutti quelli che così resteranno: il prodotto sarà il numero cercato, che diviso per ciascun denominatore, darà il quoziente con cui devono respettivamente moltiplicarsi ciascuno dei rotti. Così dati $\frac{2}{21}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{9}{35}$, $\frac{1}{9}$ avremo per elementi del 1°. denomi-

natore 3, 7; del 2°. 3, 5; del 3°. 7; del 4°. 5, 7; del 5.° 3, 3; fra i quali i soli da ritenersi secondo il precetto saranno 3, 7, 5, 3; il cui prodotto 315 diviso per ciascun denominatore darà i quozienti 15, 21, 45, 9, 35; per i quali moltiplicando respettivamente i cinque numeratori avremo $\frac{30}{315}$, $\frac{147}{315}$, $\frac{45}{315}$, $\frac{81}{315}$, $\frac{35}{315}$.

E qui osserveremo passando, che ridotti o con l'un metodo o con l'altro i rotti dati al medesimo denominatore, può subito giudicarsi qual sia di tutti il più grande o il più piccolo (50). Se i rotti sieno peraltro due soli, più speditamente gli confronteremo, riflettendo dover'esser manifestamente più grande quello il cui numeratore moltiplicato per il denominatore dell'altro ha dato un prodotto maggiore. Così $\frac{3}{7}$ è maggior di $\frac{2}{5}$ perchè 3×5 dà più di 2×7.

57. *Ridurre un rotto alla più semplice espressione*. Moltiplicando i due termini d'un rotto per una medesima quantità, il rotto conserverà il suo valore (52), ma diverrà più composto, comecchè formato di numeri maggiori. All'opposto *schisandolo* o dividendolo per uno o più fattori comuni all'un termine e all'altro, diverrà più semplice, comecchè espresso da numeri minori. Acquisterà poi il grado massimo di semplicità, se ne divideremo i due termini per il prodotto di tutti i fattori comuni ad ambedue, o per il loro *massimo comun divisore*. Quando questo non si affacci da se medesimo, due metodi si conoscono per ritrovarlo. Consiste il primo in decomporre nei loro elementi (45) i termini della frazione: dal prodotto di tutti quelli che insieme si troveranno nell'uno e nell'altro, risulterà il comun divisore cercato; da quello dei rimanenti si avrà il rotto ridotto alla sua più semplice espressione. Così troveremo $\frac{182}{294}=\frac{2.7.13}{2.3.7.7.}=\frac{13}{3.7}=\frac{13}{21}$. Che se accaderà d'incontrare tra gli elementi del denominatore tutti quelli del numeratore, o viceversa, si toglieranno dall'un termine e dall'altro; ma nel numeratore dovrà lasciarsi in loro luogo l'unità.

58. Quanto all'altro metodo, che anche più del primo importa conoscere, per le maravigliose conseguenze a cui fa strada, divido il maggior termine per il minore, e se nulla avanza, il

minore è il divisor cercato: se vi è un resto, divido per esso il minor termine, e se nulla avanza, il resto è il divisore cercato: altrimenti ripeto la divisione e proseguo finchè avanzi zero: *il resto che precede zero, è il massimo comun divisore*: perciò se questo resto precedente è 1, il rotto è *irriducibile* o i suoi termini non hanno alcun fattore comune. Così per ridurre $\frac{427}{1610}$, 1.° divido 1610 per 427 ed ho 3 di quoziente, e 329 di primo resto, che segno come nell'esempio; 2°. divido 427 per 329, e viene 1 di quoziente e 98 di secondo resto; 3°. divido 329 per 98, ed ho 3 di quoziente e 35 di terzo resto; 4.° divido 98 per 35 ed ho 2 di quoziente, e 28 di quarto resto; 5°. divido 35 per 28, ed ho 1 di quoziente e 7 di resto; 6°. divido 28 per 7, ed ho 4 di quoziente e nulla di resto: perciò 7 è il massimo comun divisore, il che mi dà $\frac{427}{1610}=\frac{7.61}{7.230}=\frac{61}{230}$. L'Algebra assai meglio dell'Aritmetica mostra la bontà e verità di quest' operazione.

1610	3
427	1
329	3
98	2
35	1
28	4
7	
0	

Che operando nel modo indicato debba incontrarsi in ultimo il resto zero, è cosa evidente, giacchè tutti i resti debbon di lor natura esser positivi e l' uno sempre minore dell' altro (30). Che poi il penultimo, o quello che precede il resto zero, equivalga al massimo comun divisore cercato, si rileverà rammentandoci, che se nel rotto $\frac{a}{b}$ i termini a, b hanno un commune divisore p, dovrà averlo anche il resto r (43. 2°.); ed avendolo b ed r, dovrà averlo anche il nuovo resto, che si ha dal dividere b per r; e così successivamente tutti i rimanenti. Sieno frattanto R_1, R_2, R_3 tre resti consecutivi; potrà farsi $R_1=mp$, $R_2=np$, $R_3=tp$; e se si supponga q la parte intera del quoziente di R_1 diviso per R_2, onde si abbia $R_1=qR_2+R_3$ (32), avremo sostituendo $mp=nqp+tp$. Sia frattanto R_3 il resto finale zero, sarà $t=0$, e quindi $m=nq$, ed $\frac{m}{n}=q$: ma q è intero, e se p è massimo comun divisore, m non può esser multiplo di n (43. 3°.); dunque perchè l' equazione sussista dovrà essere $n=1$, e quindi $R_2=p$

59. E quì osserveremo di passaggio, che dai quozienti e dai resti ottenuti, operando come sopra (58), si ha $\frac{1610}{427}=3+\frac{329}{427}$; $\frac{427}{329}=1+\frac{98}{329}$; $\frac{329}{98}=3+\frac{35}{98}$; $\frac{98}{35}=2+\frac{28}{35}$; $\frac{35}{28}=1+\frac{7}{28}$; $\frac{28}{7}=4$. Quindi se ciascuno dei rotti $\frac{427}{1610}$, $\frac{329}{427}$, $\frac{98}{329}$ ec, si divida sopra e

sotto per il suo respettivo numeratore, e si sostituiscano successivamente gli antecedenti valori, avremo

$$\frac{427}{1610}=\frac{1}{\frac{1610}{427}}=\frac{1}{3+\frac{329}{427}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{427}{329}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{98}{329}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{329}{98}}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{35}{98}}}}=$$

$$\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{98}{35}}}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{28}{35}}}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{35}{28}}}}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{7}{28}}}}}}=$$

$$\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{28}{7}}}}}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}$$

frazione continua (53) equivalente al rotto $\frac{427}{1610}$, specialmente rimarchevole in questo, che i quozienti interi o particolari (30) 3, 1, 3, 2, 1 sono in numero ed ordine li stessi che abbiamo trovati operando col metodo del massimo comun divisore, ed i resti han tutti per numeratore l'unità; il che dà un modo facile di comporla.

Somma dei rotti

60. Se i rotti da sommarsi hanno uno stesso denominatore, *sommo i numeratori, e sotto la somma pongo il denominator comune;* diversamente *li riduco al medesimo denominatore* (55), *e quindi opero come sopra.* Dunque $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$; di che niuna cosa può esser più manifesta. Del pari $\frac{4}{5}+\frac{1}{4}+\frac{7}{10}=$ (56) $\frac{16}{20}+\frac{5}{20}+\frac{14}{20}=\frac{16+5+14}{20}=\frac{35}{20}=$ (52) $\frac{7}{4}$.

61. Se coi rotti vi sono anche interi, trasformo questi in rotti apparenti, dando, o sottintendendo data ad essi per denominatore l'unità (54). Così $3+\frac{5}{2}+\frac{4}{5}=\frac{3}{1}+\frac{5}{2}+\frac{4}{5}=\frac{30+25+8}{10}=\frac{63}{10}$. Ma se sia un solo il rotto da sommarsi con un intero, moltiplicherò im-

mediatamente l' intero per il denominatore del rotto; sommerò il prodotto col numeratore, e sotto la somma segnerò il denominatore. Così $6+\frac{3}{7}=\frac{42+3}{7}=\frac{45}{7}$: la ragione ne è chiara.

Sottrazione dei rotti

62. Nella sottrazione dei rotti si opera come nella somma, se non che, dopo aver ridotti i due rotti al medesimo denominatore, in luogo di prender la somma dei numeratori, se ne prende la differenza, avvertendo di apporre in ultimo il segno negativo (18. IIª.), nel caso che il numeratore ridotto del diminuendo risulti più piccolo di quello del diminutore. Così $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{15-4}{20}=\frac{11}{20}$; $\frac{3}{7}-\frac{1}{2}=\frac{6-7}{14}=-\frac{1}{14}$; $6-\frac{3}{2}=\frac{12-3}{2}=\frac{9}{2}$; $\frac{4}{5}-2=\frac{4-10}{5}=-\frac{6}{5}$.

63. Spesso avviene d' incontrare una riunione di rotti positivi e negativi, come la seguente $\frac{5}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$. In tal caso si ridurranno tutti al medesimo denominatore, apponendo a ciascun numeratore ridotto il segno del rotto primitivo; si sommeranno partitamente tutti i numeratori col segno $+$, quindi quelli col segno $-$; e sotto la differenza delle due somme si segnerà il denominatore comune. Così avremo:
$$\frac{5}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=(56)\,\frac{20-18+1+9-10}{12}=\frac{30-28}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

Moltiplicazione dei rotti

64. Moltiplicare un rotto, come per esempio $\frac{5}{7}$, per un intero, come sarebbe 6, significa prender la somma di sei rotti tutti eguali a $\frac{5}{7}$ (19); il che si fa sommando i sei numeratori eguali, ossia moltiplicando per sei il numeratore 5; avremo dunque $\frac{5}{7}\times6=\frac{5.\,6}{7}=\frac{30}{7}$.

65. Ma quando si tratti di moltiplicare un intero per un rotto proprio, il vocabolo *moltiplicare* cangia alquanto il suo significato primitivo; poichè non è allora il moltiplicando, che si vuol prender più volte, ma porzioni soltanto del medesimo,

indicate dal denominatore della frazione, che debbon prendersi tante volte, quante unità sono nel numeratore. Così quando dico moltiplicare 5 per $\frac{3}{4}$, non altro intendo che dividere il 5 in quattro parti, e di queste prenderne tre. Or ciascuna delle quattro parti in cui resta diviso il 5, è visibilmente espressa da $\frac{5}{4}$; adunque per averne 3, dovrò moltiplicare $\frac{5}{4}$ per 3, e quindi avrò $\frac{5}{4}\times 3 =$ (64) $\frac{5.3}{4}=\frac{15}{4}$; e poichè lo stesso avrei avuto moltiplicando $\frac{3}{4}$ per 5 (24. 6°.), conciossiachè l' operazione è precisamente la medesima nell'un caso e nell'altro, potrò dunque stabilire in generale, che *si moltiplicano fra loro un rotto ed un intero, prendendo il prodotto dell'intero per il numeratore del rotto, e ponendovi sotto il denominatore.*

66. Se poi per $\frac{3}{4}$ dovesse moltiplicarsi non più 5, ma $\frac{5}{9}$, ossia se dovessero prendersi tre quarte parti non del 5, ma di $\frac{5}{9}$, nona parte del 5, è visibile che anche il valore ottenuto verrebbe a ridursi alla sua nona parte; il che si fa moltiplicando per 9 il denominatore (50). Dunque $\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{5.3}{4.9}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$; e siccome lo stesso si avrebbe dal moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{9}$, dunque in generale *si moltiplicano due rotti, prendendo il prodotto dei numeratori, e dividendolo per quello dei denominatori.*

67. Si osservi 1° che *quando il moltiplicatore è rotto proprio, il prodotto è sempre più piccolo del moltiplicando*: infatti se si moltiplica $\frac{5}{9}$ per 1, cioè se si prende una sola volta, si ha $\frac{5}{9}$; se dunque si moltiplica per $\frac{3}{4}$ minore d'1, e in conseguenza non si prende totalmente neppur' una volta, deve aversi meno di $\frac{5}{9}$. Se poi ambedue i fattori son rotti proprj, è evidente che il prodotto sarà minore dell'uno e dell'altro.

68. Se debban moltiplicarsi più rotti, si farà il prodotto di tutti i numeratori, e si dividerà per quello di tutti i denominatori. Qualora per altro qualche numeratore possa ridursi con qualche denominatore (57), benchè spettante a rotto diverso, gioverà far la riduzione prima di moltiplicare, avvertendo di sostituir l'unità in luogo di quei numeratori o denomina-

tori, che per effetto di questa riduzione, venissero ad esser elisi completamente. Così avendosi $\frac{2}{9}\times\frac{39}{28}\times\frac{7}{6}\times\frac{11}{5}$, si ridurrà ad $\frac{1}{3}\times\frac{13}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{11}{5}=\frac{143}{180}$. Se fra i fattori vi sia qualche intero, si renderà più uniforme il calcolo dandogli per denominatore l'unità (54).

Divisione dei rotti

69. Dividere un rotto qualunque, come per es. $\frac{7}{15}$, per un intero 6 significa prenderne la sesta parte, il che si ottiene (66) moltiplicandolo per $\frac{1}{6}$, o semplicemente moltiplicando per 6 il denominatore 15. Ma se debba dividersi per $\frac{6}{11}$, quantità 11 volte minore di 6, il quoziente avuto dovrà allora divenire 11 volte più grande, e perciò converrà moltiplicarne per 11 il numeratore. Dunque $\frac{7}{15}:\frac{6}{11}=\frac{7.11}{15.6}=\frac{77}{90}$; d'onde in generale *si divide un rotto per un altro, moltiplicando in croce il numeratore del dividendo per il denominatore del divisore, e il numeratore del divisore per il denominatore del dividendo, e ponendo sotto il primo prodotto il secondo.*

70. Si osservi I°. che a questa stessa regola si riducono quelle per il caso di un rotto da dividersi per un intero, o di un intero da dividersi per un rotto, per la qual cosa basterà trasformare in un rotto l'intero (54), comunque sia questo o divisore, o dividendo. Così $\frac{3}{7}:5=\frac{3}{7}:\frac{5}{1}=\frac{3}{35}$; $8:\frac{4}{9}=\frac{8}{1}:\frac{4}{9}=\frac{72}{4}=18$. Se non che siccome la moltiplicazione per l'unità lascia intatto il numeratore primitivo del rotto dividendo nel primo caso, e il numeratore del rotto divisore nel secondo, potremo per questi due casi ridurre l'enunciato della regola ai due seguenti: *si divide un rotto per un intero dividendone il numeratore per il prodotto dell'intero nel denominatore; e si divide un intero per un rotto moltiplicando l'intero per il denominatore del rotto e dividendo il prodotto per il numeratore.*

II°. In forza della regola generale (69) si avrebbe $\frac{7}{6}:\frac{15}{11}=\frac{7.11}{6.15}=\frac{77}{90}=$ (*ivi*) $\frac{7}{15}:\frac{6}{11}$; perciò *il quoziente di due rotti si ha*

pure dividendo il quoziente dei due numeratori per quello dei due denominatori, cioè formando un rotto coi due numeratori, un altro coi denominatori, e dividendo quello per questo nel modo che apparisce dal calcolo precedente.

III°. *Ogni qualvolta il rotto divisore sia proprio, il quoziente sarà più grande del dividendo*: infatti il quoziente cresce a misura che scema il divisore. Or se si divide per l'unità, il quoziente eguaglia visibilmente il dividendo: dovrà dunque superarlo, se si divide per un rotto minore dell'unità.

71. Per indicar la divisione di un rotto per un altro, come $\frac{3}{4}$ per $\frac{8}{9}$, si usa più ordinariamente il modo che abbiamo praticato, cioè $\frac{3}{4} : \frac{8}{9}$; ma talvolta giova di scriver piuttosto $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}}$, sottoponendo al rotto dividendo il rotto divisore, e avendo cura di dar più lunghezza alla linea che separa i due rotti, che a quelle che separano i due numeratori dai loro respettivi denominatori. In egual modo si scrive $\dfrac{3}{\frac{5}{8}}$, $\dfrac{\frac{5}{7}}{4}$ per denotare che vuolsi dividere o l'intero 3 per il rotto $\frac{5}{8}$, o il rotto $\frac{5}{7}$ per l'intero 4. In tali casi si terranno per dividere le pratiche seguenti. Nel primo si moltiplicheranno i due estremi 3, 9, e quindi i due medj 4, 8; e col primo prodotto si formerà il numeratore del quoziente, col secondo il denominatore. Nel secondo si moltiplicheranno i due estremi 3, 8, e si dividerà il prodotto per il medio 5. Nel terzo si moltiplicheranno i due inferiori 7, 4, e per il loro prodotto si dividerà il superiore 5. L'analogia di queste regole pratiche con le precedenti è manifesta.

72. Abbiamo già incontrate forme simili a quelle di cui parliamo nel dar contezza delle frazioni continue (53. 59); le pratiche sopra additate ci danno il modo di *sommare* queste frazioni, o di trovare il rotto comune equivalente ad una data frazione continua. Debba ciò farsi su quella del num.° 53, che per comodo riportiamo di fianco. Comincio dal sommarne la parte finale

$$\frac{2}{3+\frac{4}{5+\frac{1}{6}}}$$

$5+\frac{1}{6}$ (61) ed ho $\frac{31}{6}$, rotto per cui riman dunque diviso il 4: fatta la divisione ho $\frac{24}{31}$; sommo col 3, ed ho $\frac{117}{31}$, rotto per cui resta diviso il 2; divido ed ho $\frac{62}{117}$, rotto da cui fu appunto generata la data frazione.

73. Si noti 1° che se il rotto che generò la frazione è riducibile (57), la somma della frazione lo darà ridotto e non nello stato primitivo. Così sommando quella del num:° 59 avremo $\frac{61}{230}$, valore del rotto $\frac{427}{1610}$ schisato per 7: 2.° se in luogo di sommare tutta la frazione, se ne sommi una parte in principio, trascurando la rimanente, la somma risulterà più grande o più piccola del rotto generatore, secondo che sarà impari o pari il numero dei quozienti interi o particolari (30) che riterremo. Così, se nell'esempio riportato (72) si ritenga il solo primo quoziente 3, avremo il rotto $\frac{2}{3}$ maggiore del vero, perchè il denominatore è stato diminuito (50). Ma se ritengo anche il quoziente 5 tralasciando solo l' $\frac{1}{6}$, avrò per rotto finale $\frac{4}{5}$, che per la stessa ragione sarà maggiore del vero; sarà dunque del pari maggior del vero tutto il denominatore $3+\frac{4}{5}$, e perciò minor del vero la frazione $\frac{2}{3+\frac{4}{5}}$; sommandola infatti si ha $\frac{10}{19}$, che facilmente troveremo (56) esser minore di $\frac{62}{117}$, rotto genitore. Queste singolarità potranno più in grande verificarsi sulla frazion continua data al num.° 59.

Frazioni o Rotti Decimali

74. La legge medesima di convenzione, la quale stabilì che la prima cifra a sinistra delle unità rappresenti diecine, la precedente centinaia, l'altra migliaia (7), prescrisse egualmente che contrassegnata la suddetta cifra dell' unità con una virgola posta dopo di essa, una prima cifra dopo la virgola esprimesse *decime* parti d'unità, una seguente parti *centesime*, un' altra posteriore parti *millesime* ec. Così mentre il numero

486,597 equivale nella parte che precede la virgola a $400+80+6$, in quella che segue corrisponde a $\frac{5}{10}+\frac{9}{100}+\frac{7}{1000}$; e siccome queste tre frazioni ridotte al comun denominatore 1000 (55) e sommate danno $\frac{597}{1000}$, perciò il suddetto numero 486,597 varrà 486 interi, ossia unità e 597 millesimi.

75. Anzi poiché $486+\frac{597}{1000}=(61)\frac{486597}{1000}$, dunque il numero 486,597 potrà leggersi andantemente per 486 mila 597 millesimi. Nell' istessa guisa 6,28 si leggerà 6 interi e 28 centesimi, oppure 628 centesimi. Ma 0,82 e 0,013 non varranno che 82 centesimi il primo, e 13 millesimi il secondo, perché lo zero che precede la virgola mostra qui che la parte frazionaria non é congiunta ad alcun intero.

76. Queste espressioni son dunque veri rotti, o improprj, o proprj (49), secondo che avanti la virgola hanno o cifre significative o lo zero. Se non che il loro denominatore è sottinteso ed equivale all' unità seguita da tanti zeri quante son cifre dopo la virgola; di quì il nome che hanno assunto di *decimali*, che per altro più specialmente si appropria alla porzione che viene dopo la virgola. La loro comoda forma e la facilità con la quale perciò si maneggiano, unite ad altre loro proprietà sommamente utili, gli fanno preferire ai rotti ordinarj, i quali col metodo che inseguiremo (89), assai facilmente si cangiano in decimali. Frattanto ecco alcune tra le belle proprietà di questi ultimi.

77. I°. Due o più rotti decimali, che abbiano un egual numero di cifre dopo la virgola, hanno altresì lo stesso denominatore. Ciò è manifesto dopo quanto abbiamo detto intorno al denominatore sottinteso (76).

78. II°. Come $\frac{6}{10}=\frac{60}{100}=\frac{600}{1000}$ ec. (52), così sarà $0,6=0,60=0,600$ ec, cioè l' aggiunta o la soppressione finale d'uno o più zeri alla destra niente altera il valore di un decimale.

79. III°. Perciò dati due o più decimali di diverso numero di cifre, ed in conseguenza di diverso denominatore (77), col solo aggiungere in fine tanti zeri da rendere in tutti eguale il numero delle cifre alla destra della virgola, verranno ridotti allo stesso denominatore.

80. IV°. Di due o più rotti decimali quello è maggiore che

ha prima dell' altro di seguito alla virgola cifra maggiore: infatti riducendoli tutti col metodo precedente allo stesso denominatore, quello che ha in principio maggiori cifre, avrà altresì visibilmente un maggior numeratore.

81. V.ª Se in un rotto decimale si sopprimano l' ultime cifre, l' errore sarà tanto più piccolo quanto è maggiore il numero delle decimali che restano. Così se il rotto 3,142683925 si riduca a 3,1426839 oppure a 3,14268392 l' errore non sarà nel primo caso che di 25 mille milionesimi, e nel secondo di soli 5 mille milionesimi. Sono per altro sì piccoli ambedue questi errori, che negli usi ordinarj della società, come ancor delle scienze, non possono avere alcuna sensibile influenza, qualora il caso non porti a doverli moltiplicare per numeri grandi d' interi. Anzi il più delle volte tutto ciò che rimane al di là della quinta decimale, e anche talora della quarta e fin della terza, si rende affatto superfluo; e perciò

82. VI.ª Se un decimale abbia un gran numero di cifre, potremo ordinariamente sopprimere tutte quelle che si trovano al di là della settima, e all' occorrenza quelle pure che sono al di là della quinta, della quarta ec. senza commettere il più delle volte errore da valutarsi. Qualora la prima delle cifre soppresse sia un 5, ovvero più di 5, potremo diminuir l' errore aumentando di un'unità l' ultima delle ritenute. Così dovendo sopprimere le due ultime cifre del rotto 0,8368 sarà error minore scrivere 0,84 che 0,83. Infatti 0,84=0,8400 e 0,83=0,8300: dunque il rotto dato differisce da 0,84 di 0,0032; da 0,83 di 0,0068, cioè meno nel primo caso che nel secondo.

Somma, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione dei Rotti Decimali

83. Per sommare o sottrarre i decimali, si pareggi con tanti zeri il numero delle respettive loro cifre (78), quindi si dispongano, e si operi secondo il solito (15), come si vede praticato negli esempj di fianco.

	4852,79400	
	4,00745	6,00435
	0,00490	0,17000
Som.	4856,80335	Diff. 5,83435

L' aggiunta degli zeri potrà farsi ancor mentalmente; ma in tal caso dovremo aver riguardo di disporre i numeri l' un sotto l' altro in maniera, che le unità degli interi, o gli zeri che le rappresentano (75), corrispondano in una stessa colonna, o le virgole sotto le virgole, il che torna lo stesso.

84. Quanto alla moltiplicazione dei decimali, ben si sa che riducendogli in forma di rotti ordinarj (75), il loro prodotto si avrebbe dal divider quello dei numeratori, ossia dei due fattori proposti considerati senza la virgola (75), per il prodotto dei denominatori, cioè per l' unità seguita da tanti zeri quante son cifre decimali nei due fattori. Di qui la regola: che *nella moltiplicazione deve operarsi al solito non curando la virgola; ma quanti decimali sono nei fattori, tante cifre a destra si separano nel prodotto*, e se non sieno abbastanza, si supplisce a sinistra con altrettanti zeri, come nel quarto esempio seguente. La riprova si fa al solito.

43,7 × 13	2,4542 × 0,053	4,12 × 3,7	21,32 × 0,00103
1311	73626	2884	6396
437	122710	1236	2132
568,1	0,1300726	15,244	0,0219596

85. Si moltiplica un decimale per 10, 100, 1000 ec. con avanzare la virgola a destra per tante cifre, quanti sono zeri nel moltiplicatore: così 45,328 × 100 = 4532,8; 0,0785 × 1000 = 78,5.

86. Se i fattori hanno molti decimali e non bisogni un risultamento esatto, come se dovendo moltiplicar 45,625957 per 128, 635, mi basti un prodotto con 3 decimali, mi propongo primieramente di trovarne 5, cioè due di più del bisogno, per la ragione che in breve dirò; poi rovescio l' ordine del fattore che ho scelto per moltiplicatore, e lo scrivo sotto l' altro facendo corrisponder la cifra delle sue unità sotto il quinto decimale; e poiché l' ultima cifra 1 del fattore rovesciato sporgerebbe al di fuori dell' ultima decimale dell' altro, aggiungo alla destra di questo uno zero per pareggiare. Quindi moltiplico e trascuro nel moltiplicando tutte le cifre a destra di quella per cui moltiplico; e a misura che muto cifra nel moltiplicatore, scrivo la prima del nuovo prodotto sotto la prima del passato. Fatta la somma di questi prodotti, sopprimo le due ultime cifre aumentando d' un' unità l' ultima che resta, perché le due soppresse passan 50: dopo ciò, separo i decimali che mi proposi d' avere, e trovo 5869,095 Prodotto cercato.

45,6259570
536821
456259570
91251914
36500760
2737554
136875
22810
586909483

Infatti i prodotti che volta per volta in questo metodo si tralasciano sono evi-

dentemente quelli che avrebbero luogo al di là dell' ultima colonna che si ritiene: tutto è dunque provato se si dimostra che questa colonna corrisponde nel prodotto alla classe decimale che ci abbisogna.

Ora è chiaro che la colonna la quale nella moltiplicazione corrisponde ad una classe decimale qualunque, per esempio alla 5ª, deve necessariamente formarsi dal prodotto della 5ª decimale del moltiplicando nell' unità degli interi del moltiplicatore, della 6ª nelle diecine, della 7ª nelle centinaia ec.; come pure della quarta nei decimi, della terza nei centesimi ec.; e come il metodo dato porta appunto a moltiplicazioni fatte totalmente su questo sistema, è dunque chiaro che l' ultima decimale del prodotto, ottenuta così, è la richiesta. E poichè i prodotti che si trascurano potrebbero render difettosa la colonna ultima che si ritiene, quindi per cautela si procura che questa colonna sia superiore anche di due classi a quella che realmente occorrerebbe.

Se nel moltiplicando non fossero tanti decimali quanti dalla regola son prescritti, si supplirebbe con zeri. Si avverta che il metodo però non ha luogo in due casi assai rari: 1.° se gl' interi uniti ai decimali son numeri molto grandi: 2.° se i decimali son molti ed espressi con le cifre massime 8, 9.

87. Infine il quoziente di due decimali deve aversi come quello degli altri rotti, con dividere il quoziente dei numeratori per quello dei denominatori (70.II°.). Ma quest' ultimo è sempre eguale all' unità seguita da tanti zeri quante son meno le cifre decimali del divisore di quelle del dividendo; perciò la divisione dei decimali si farà al solito, con divider l' uno per l' altro, senza considerare per allora la virgola, e quindi con separare a destra tante cifre decimali in quoziente quante ne ha il dividendo più del divisore. Esempj

	3		0,135		2,44
	6,9345		92,374		49,10000
2,3115		682	2417	20,074	89520
			3714		92240
			304		11944

88. Se i decimali del dividendo sieno minori in numero di quelli del divisore, si renderanno quanto più piacerà maggiori con la solita aggiunta degli zeri (78), come si vede praticato nel 3.° esempio. E potremo aggiunger nuovi zeri anche, allorquando compita la divisione, siamo giunti all' ultimo resto. È evidente che questa pratica semplicissima dà luogo ad estendere le decimali del quoziente fino a quel termine, ove le susseguenti diverrebbero trascurabili (81). In tal caso non sarà necessario tener conto, secondo la prescritta regola (30), del resto finale,

e la forma del quoziente, rigorosa quanto basta, diverrà più semplice della consueta.

89. Con questo mezzo potremo comodamente ridurre a decimale un qualunque rotto ordinario per es. $\frac{5}{173}$. Cangio primieramente il numeratore 5 in 5,00 in modo che, non curata la virgola, risulti maggiore del denominatore. Comincio quindi la divisione (87), ed ho il quoziente 2 col resto 154; e come il divisore non ha decimali e ne ha due il dividendo, concludo che altrettanti deve fin qui averne il quoziente, che per conseguenza dovrà cangiarsi in 0,02 (87). Dopo ciò aggiungo un nuovo zero al dividendo, oppure soltanto al resto, il che tornerà ancora più comodo, quindi divido al solito, aggiungo egualmente un zero al nuovo resto ottenuto, e di nuovo divido; e così continuando per sei volte, ottengo il quoziente 0,0289017, che è inutile protrarre, qualora 7 decimali si reputino sufficienti (81). Prima però di sospendere è necessario assicurarsi se la cifra che ne seguirebbe in quoziente eguagli 5 o lo superi, nel qual caso l' ultima delle ottenute, cioè il 7, dovrebbe aumentarsi di un' unità (82). Or ciò si conosce o proseguendo la divisione o riflettendo che la nuova cifra non può passare il 5, se l' ultimo resto non superi la metà del divisore: il che non avendo luogo nel caso nostro, dunque neppur l' aumento avrà luogo.

90. Può bene spesso accadere che qualche resto aumentato dello zero divenga multiplo del divisore. In tal caso il nuovo resto sarà nullo, e l' operazione avrà termine prima che il quoziente arrivi alla prescritta decimale. Se ne vedano esempj nei rotti $\frac{1}{2}=0,5$; $\frac{18}{25}=0,72$; $\frac{5}{8}=0,625$. I quozienti che godono di questa proprietà si chiamano *decimali esatti*, perchè equivalgono esattamente al rotto ordinario, dal quale son derivati. Negli altri che non ne godono ha luogo un' altra singolarità, il ritorno cioè periodico delle medesime cifre, che accade ogni qualunque volta s' incontri un qualche resto eguale ad alcuno dei già trovati. Ciò può succedere anche fin dal principio dell' operazione, come nei rotti $\frac{1}{3}=0,333$ ec., $\frac{4}{11}=0,363636$ec., $\frac{1}{55}=\ldots$ 0,0181818 ec.; ed è poi certo che vi si giunge infallibilmente prima che il numero dei resti eguagli il divisore. Se ne troverà

facilmente il perchè, se si rifletta che i resti son di lor natura tutti più piccoli del divisore (30). I quozienti di questo genere si chiamano *periodici*, nè possono mai rappresentare esattamente il dato rotto ordinario.

Rimane in fine da osservare che si divide un rotto decimale per 10, 100, 1000 ec. ritirando la virgola a sinistra per tante cifre quanti sono zeri nel divisore; supplendo con zeri alla sinistra del dividendo, qualera le cifre degli interi di questo non fossero in numero sufficiente. Così $\frac{436,4}{100} = 1,364$; $\frac{0,48}{1000} = 0,00048$.

Teoria generale delle frazioni continue

91. Si dà, come già avvertimmo (53), il nome di frazioni continue ai rotti della forma $x = \cfrac{q_1}{p_1 + \cfrac{q_2}{p_2 + \cfrac{q_3}{p_3 + \text{ec.}}}}$ ove p_1, p_2, p_3, ec.; q_1, q_2, q_3, ec. sono numeri interi. Queste frazioni sono finite, o infinite, o periodiche secondochè p_1, p_2, p_3 ec.; q_1, q_2, q_3, ec. sono finiti, o infiniti di numero, o dopo un certo termine tornano o tutti o in parte gli stessi, procedendo con ordine eguale fino all' infinito. Le ricerche le più importanti, che riguardano queste frazioni, si riducono ai quattro seguenti quesiti: 1°. *Data una frazion continua, sommarla o totalmente, o parzialmente*, ossia esprimerne il valore o esatto o approssimato per mezzo di un rotto ordinario (72); 2°. *ridurla in serie*; 3° *trasformare in frazione continua una data serie*; 4° *data una quantità o frazionaria o irrazionale trasformarla in frazion continua*.

92. Cominciando dal primo quesito, si rappresentino con M_1, M_2, M_3 .. M_k i numeratori, con N_1, N_2, N_3, ... N_k i denominatori dei rotti che risulterebbero troncando successivamente la frazione continua a $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$, o considerando $q_2, q_3, q_4, \ldots q_{k+1}$ come nulli. In tal caso avremo per primo rotto $\frac{q_1}{p_1}$, e sarà $M_1 = q_1$, $N_1 = p_1$. Per il 2° rotto avremo $\cfrac{q_1}{p_1 + \cfrac{q_2}{p_2}} = \frac{p_2 M_1}{p_2 N_1 + q_2}$, ed $M_2 = p_2 M_1$, $N_2 = p_2 N_1 + q_2$. Quanto al 3° rotto potrà dedursene il valore da quello del 2°, sostituendovi $p_2 + \frac{q_3}{p_3}$ in luogo di p_2; con che diverrà $\frac{p_2 p_3 M_1 + q_3 M_1}{p_3(p_2 N_1 + q_2) + q_3 N_1} = \frac{p_3 M_2 + q_3 M_1}{p_3 N_2 + q_3 N_1}$, ed $M_3 = p_3 M_2 + q_3 M_1$, $N_3 = p_3 N_2 + q_3 N_1$. Del pari avremo il valore del 4° rotto sostituendo $p_3 + \frac{q_4}{p_4}$ in vece di p_3 nel rotto precedente, ossia in $\frac{p_3 M_2 + q_3 M_1}{p_3 N_2 + q_3 N_1}$, e ne risulterà $\frac{p_4(p_3 M_2 + q_3 M_1) + q_4 M_2}{p_4(p_3 N_2 + q_3 N_1) + q_4 N_2} = \frac{p_4 M_3 + q_4 M_2}{p_4 N_3 + q_4 N_2}$; ed $M_4 =$

$p_4M_3+q_4M_2$, $N_4=p_4N_3+q_4N_2$. I valori dunque di M_1, M_2, M_3, M_4 ec. N_1, N_2, N_3, N_4, ec. si deducono gli uni dagli altri nel modo che qui sotto vediamo.

$$\begin{array}{ll}
M_1 = q_1 & N_1 = p_1 \\
M_2 = p_2M_1 & N_2 = p_2N_1+q_2 \\
M_3 = p_3M_2+q_3M_1 & N_3 = p_3N_2+q_3N_1 \\
M_4 = p_4M_3+q_4M_2 & N_4 = p_4N_3+q_4N_2 \\
M_5 = p_5M_4+q_5M_3 & N_5 = p_5N_4+q_5N_3 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
M_k = p_kM_{k-1}+q_kM_{k-2} & N_k = p_kN_{k-1}+q_kN_{k-2}
\end{array}$$

E' poi chiaro che ogni rotto formato da un' M, e dall' N correspettiva, comecchè equivalente ad una parte più o meno grande della frazione data, ci somministra prossimamente il valore di x, e che l' approssimazione è tanto maggiore quanto maggiore è l' indice dell' M e dell' N. (73.2°.) Che se q_k e p_k rappresentano l'ultimo dei q, e l' ultimo dei p nella data frazione, il valor cercato di x sarà dato esattamente da $\frac{M_k}{N_k}$. Così nella frazione del num°. 53, avremo $q_1=2, q_2=4, q_3=1$; $p_1=3, p_2=5, p_3=6$; e di qui $M_1=2$, $M_2=10$, $M_3=62$; $N_1=3$, $N_2=19$, $N_3=117$; d' onde le due prime approssimazioni $\frac{M_1}{N_1}=\frac{2}{3}$, $\frac{M_2}{N_2}=\frac{10}{19}$, e il valor vero e finale $\frac{M_3}{N_3}=x=\frac{62}{117}$, il tutto come già si era trovato altrove (73).

93. Qualora poi la data frazione continua fosse periodica, e il ritorno del periodo si manifestasse dopo $\frac{q_{k-1}}{p_{k-1}}$, in modo che si avesse

$$x=\cfrac{q_1}{p_1+\cfrac{q_2}{p_2+\ldots\ldots+\cfrac{q_{k-1}}{p_{k-1}+\cfrac{q_1}{p_1+\cfrac{q_2}{p_2+\text{ ec.}}}}}}$$

è chiaro che potrà farsi

$$x=\cfrac{q_1}{p_1+\cfrac{q_2}{p_2+\ldots\ldots+\cfrac{q_{k-1}}{p_{k-1}+x}}}$$

frazione che sotto questa ultima forma divien finita, e potrà quindi aversene il valore da quello di $\frac{M_k}{N_k}$ (92), ponendovi $q_k=x$, $p_k=1$. Avremo in tal caso $\frac{M_k}{N_k}=x=\frac{M_{k-1}+xM_{k-2}}{N_{k-1}+xN_{k-2}}$, d' onde $x^2\,N_{k-2}+x(N_{k-1}-M_{k-2})=M_{k-1}$, equazione che risoluta farà conoscere x. Che se una parte della frazione fosse fuori di periodo, come per esempio se avessimo $x=\cfrac{q_1}{p_1+\cfrac{q_2}{p_2+\cfrac{q_2}{p_2+\text{ ec.}}}}$, si cercherà separatamente e quindi si sostituirà in luogo della parte periodica il suo valore, espresso in forma di rotto ordinario, e si ridurrà così la frazione in forma finita, come si vede

nell'esempio seguente. Frattanto è da osservarsi che la ricerca del valore di una frazione continua, o tutta o in parte periodica, porta sempre ad un' equazione di secondo grado.

Esempio. Abbiasi $x = \cfrac{2}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\text{ec.}}}}}}}$. Considerata primieramente la parte periodica, e prendendo a sommarla separatamente dal resto, osserveremo che il periodo termina dopo il secondo quoziente. Sarà dunque $k-1=2, \ldots$ $k-2=1$, e la somma verrà data dall' equazione $x^2N_1 + x(N_2 - M_1) = M_2$. Frattanto poichè $q_1 = q_2 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, sarà $M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $N_1 = 2$, $N_2 = 7$; dunque $2x^2 + 6x = 3$, ed $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$, valore che sostituito in luogo della parte periodica nella frazione data, escludendo il segno inferiore che qui visibilmente non ha luogo, la ridurrà ad $x = \cfrac{2}{3+\cfrac{1}{4-\cfrac{1-\sqrt{15}}{2}}}$ frazione continua finita. Per sommarla, abbiamo $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, $q_3 = -1+\sqrt{15}$; $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, . $p_3 = 2$; e quindi $M_1 = 2$, $M_2 = 8$, $M_3 = 14+2\sqrt{15}$; $N_1 = 3$, $N_2 = 13$, $N_3 = 23+3\sqrt{15}$; d' onde $x = \dfrac{M_3}{N_3} = \dfrac{14+2\sqrt{15}}{23+3\sqrt{15}}$, ossia moltiplicando sopra e sotto per $23-3\sqrt{15}$, affine di render razionale il denominatore, $x = \dfrac{2(58+\sqrt{15})}{197}$

94. Ritornando al caso generale, si moltiplichi per M_{k-1} il valore di N_k, e per N_{k-1} quello di M_k, e quindi si sottragga il secondo dal primo prodotto. Sarà

$$N_k M_{k-1} - M_k N_{k-1} = q_k (N_{k-2} M_{k-1} - N_{k-1} M_{k-2}).$$

Ma dai superiori valori di M_1, M_2, N_1, N_2 (92) si ha $M_1 N_2 - M_2 N_1 = q_1 q_2$, dunque fatto successivamente $k = 3$, $= 4$, $= 5$ ec. avremo:

$$M_2N_3 - M_3N_2 = q_3(M_2N_1 - M_1N_2) = -q_1q_2q_3$$

$$M_3N_4 - M_4N_3 = q_4(M_3N_2 - M_2N_3) = +q_1q_2q_3q_4$$

$$M_4N_5 - M_5N_4 = q_5(M_4N_3 - M_3N_4) = -q_1q_2q_3q_4q_5$$

e in generale $M_k N_{k+1} - M_{k+1} N_k = \pm q_1 q_2 q_3 \ldots q_{k+1}$, preso il segno superiore quando k è impari.

95. Di qui si deduce facilmente $\dfrac{M_{k+1}}{N_{k+1}} = \dfrac{M_k}{N_k} \mp \dfrac{q_1 q_2 q_3 \ldots q_{k+1}}{N_k N_{k+1}}$, ove fatto successivamente $k=1$, $=2$, $=3$, ec. si avrà $\dfrac{M_2}{N_2} = \dfrac{M_1}{N_1} - \dfrac{q_1 q_2}{N_1 N_2}$, $\dfrac{M_3}{N_3} = \dfrac{M_2}{N_2} + \dfrac{q_1 q_2 q_3}{N_2 N_3}$, $\dfrac{M_4}{N_4} = \dfrac{M_3}{N_3} - \dfrac{q_1 q_2 q_3 q_4}{N_3 N_4}$ ec. Sostituendo perciò gli uni negli altri questi valori, ed osservando che $M_1 = q_1$, troveremo in generale $\dfrac{M_k}{N_k} = x = \dfrac{q_1}{N_1} - \dfrac{q_1 q_2}{N_1 N_2} + \dfrac{q_1 q_2 q_3}{N_2 N_3} -$

$\frac{q_1 q_2 q_3 q_4}{N_3 N_4} +$ ec. formula che svolge in serie la data frazione continua. (91.2°.)

96. Con questa può all'opposto ridursi in frazione continua una serie $x = a - b + c - d + e -$ ec.(91.3°.). Infatti confrontando i termini si trova $q_1 = a N_1$, $q_2 = \frac{bN_2}{a}$, $q_3 = \frac{cN_3}{bN_1}$, $q_4 = \frac{dN_4}{cN_2}$, $q_5 = \frac{eN_5}{d\,N_3}$, ec.; cioè $q_1 = ap_1$, $q_2 = \frac{b}{a}(p_2N_1 + q_2)$, $q_3 = \frac{c}{bN_1}(p_3N_2 + q_3N_1)$, $q_4 = \frac{d}{cN_2}(p_4N_3 + q_4N_2)$, $q_5 = \frac{e}{dN_3}(p_5N_4 + q_5N_3)$, ec.; d'onde di nuovo $q_1 = ap_1$, $q_2 = \frac{bp_2N_1}{a-b}$, $q_3 = \frac{cp_3N_2}{N_1(b-c)}$, $q_4 = \frac{d\,p_4\,N_3}{N_2(c-d)}$, $q_5 = \frac{ep_5N_4}{N_3(d-e)}$ ec. Eguagliando questi nuovi ai primitivi valori di q_1, q_2, q_3, ec. troveremo $N_1 = p_1$, $\frac{N_2}{N_1} = \frac{ap_2}{a-b}$, $\frac{N_3}{N_2} = \frac{bp_3}{b-c}$, $\frac{N_4}{N_3} = \frac{cp_4}{c-d}$, ec. che sostituiti negli ultimi valori di q_1, q_2, q_3, ec. danno finalmente $q_1 = ap_1$, $q_2 = \frac{bp_1p_2}{a-b}$, $q_3 = \frac{acp_2p_3}{(a-b)(b-c)}$, $q_4 = \frac{b\,d\,p_3\,p_4}{(b-c)(c-d)}$, $q_5 = \frac{cep_4p_5}{(c-d)(d-e)}$, ec.

Quanto a p_1, p_2, p_3, ec. rimangono arbitrarii, e potranno determinarsi in modo che q_1, q_2, q_3, ec. risultino interi; per il che se a, b, c, ec. sono interi, faremo $p_1 = 1$, $p_2 = a - b$, $p_3 = b - c$, $p_4 = c - d$, $p_5 = d - e$, ec, nel qual caso sarà $q_1 = a$, $q_2 = b$, $q_3 = ac$, $q_4 = bd$, $q_5 = ce$, ec.; e per la frazione continua cercata

$$x = \cfrac{a}{1 + \cfrac{b}{a - b + \cfrac{ac}{b - c + \cfrac{bd}{c - d + \cfrac{ce}{d - e + \text{ec.}}}}}}$$

97. Ma se i termini della serie son frazionarj, come per esempio se avessimo $x = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d} +$ ec, in tal caso sarebbe $q_1 = \frac{p_1}{a}$, $q_2 = \frac{ap_1p_2}{b-a}$, $q_3 = \frac{b^2p_2p_3}{(b-a)(c-b)}$ $q_4 = \frac{c^2p_3p_4}{(c-b)(d-c)}$, $q_5 = \frac{d^2p_4p_5}{(d-c)(e-d)}$, ec, ed avremmo $p_1 = a$, $p_2 = b - a$, .. $p_3 = c - b$, $p_4 = d - c$, $p_5 = e - d$, ec; d'onde $q_1 = 1$, $q_2 = a^2$, $q_3 = b^2$, $q_4 = c^2$, $q_5 = d^2$, ec. e

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{a^2}{b - a + \cfrac{b^2}{c - b + \cfrac{c^2}{d - c + \cfrac{d^2}{e - d + \text{ec.}}}}}}$$

Abbiasi per esempio $x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$ ec, valore noto del Logaritmo iperbolico di 2. Sarà

$$x = L2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \text{ec.}}}}}}$$

Sia $x=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ ec. valore di $\frac{\pi}{4}$ ottava parte della circonferenza. Sarà $x=\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{ec.}}}}}}$, e rovesciando $\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{ec.}}}}}$

espressione che Brouncker propose il primo per la quadratura del Circolo.

98 Ma sia la serie $x=\frac{1}{a}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}-\frac{1}{abcd}+$ ec., si troverà $q_1=\frac{p_1}{a}$, $q_2=\frac{p_1p_2}{p-1}$, $q_3=\frac{bp_2p_3}{(b-1)(c-1)}$, $q_4=\frac{cp_3p_4}{(c-1)(d-1)}$, $q_5=\frac{dp_4p_5}{(d-1)(e-1)}$, ec; e fatto $p_1=a$, $p_2=b-1$, $p_3=c-1$, $p_4=d-1$, $p_5=e-1$, ec. sarà $q_1=1$, $q_2=a$, $q_3=b$, $q_4=c$, $q_5=d$, ec, ed $x=\cfrac{1}{a+\cfrac{a}{b-1+\cfrac{b}{c-1+\cfrac{c}{d-1+\text{ec.}}}}}$

Così se abbiasi $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}-$ ec, noto valore di e^{-1}, troveremo $x=e^{-1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{ec.}}}}}$, e rovesciando $e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\text{ec.}}}}}$

99. Ma abbiasi l' espressione più composta $X=\ldots\ldots$

$$\frac{1+\frac{a}{x+1}+\frac{a^2}{2(x+1)(x+2)}+\frac{a^3}{2.3\,(x+1)(x+2)\,(x+3)}+\text{ec.}}{1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{2x(x+1)}+\frac{a^3}{2.3x(x+1)(x+2)}+\text{ec.}}$$ per cui il metodo precedente non sarebbe direttamente applicabile. Poichè le due serie sono funzioni affatto omogenee l' una di x, l' altra di $x+1$, chiamo dunque quella $\varphi(x)$, questa $\varphi(x+1)$. Sottratta l' una dall' altra ho $\varphi(x)-\varphi(x+1)=\frac{a}{x(x+1)}\times\ldots$ $\left\{1+\frac{a}{x+2}+\frac{a^2}{2(x+2)(x+3)}+\frac{a^3}{2.3(x+2)(x+3)(x+4)}+\text{ec.}\right\}$, ossia $\varphi(x)-\varphi(x+1)=\frac{a}{x(x+1)}\varphi(x+2)$, attesa la palese omogeneità della nuova serie con le due prime. Divido per $\varphi(x+1)$, moltiplico per $\frac{x}{a}$, trasporto ed ottengo $\frac{x\varphi(x)}{a\varphi(x+1)}=\frac{\varphi(x+2)}{(x+1)\varphi(x+1)}+\frac{x}{a}$. Fo $\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)}=\psi(x)$, e in conseguenza, permutato x in $x+1$, $\frac{a\varphi(x+2)}{(x+1)\varphi(x+1)}=\psi(x+1)$, e introdotti questi valori nell' equazione precedente ottengo $\frac{1}{\psi(x)}=\frac{1}{a}\psi(x+1)+\frac{x}{a}$, d' onde

$\psi(x) = \frac{a}{x+\psi(x+1)}$. Dunque altresì $\psi(x+1) = \frac{a}{x+1+\psi(x+2)}$,

$\psi(x+2) = \frac{a}{x+2+\psi(x+3)}$, ec. valori che introdotti gli uni negli altri danno

$$\psi(x) = \frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)} = \frac{aX}{x} = \cfrac{a}{x+\cfrac{a}{x+1+\cfrac{a}{x+2+\cfrac{a}{x+3+\text{ ec.}}}}}$$

d' onde $X = \cfrac{x}{x+\cfrac{a}{x+1+\cfrac{a}{x+2+\cfrac{a}{x+3+\text{ ec.}}}}}$

100. Per far qualche utile applicazione di questa formula si ponga $x = \frac{1}{2}$, e successivamente $4a = -z^2$. Introdotti questi valori nelle due date serie, la prima e superiore si cangerà facilmente in $1 + \frac{4a}{2.3} + \frac{16a^2}{2.3.4.5} + \frac{64a^3}{2.3.4..7} + \text{ec.} = 1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4...7} + \text{ec.} = \frac{senz}{z}$; e la seconda in $1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2.3.4} + \frac{64a^3}{2.3...6} + \text{ec.} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3...6} + \text{ec.} = cosz$. Sarà dunque nel nostro caso $X = \frac{senz}{zcosz} = \frac{tangz}{z}$. Di qui, e dalla trovata frazion continua, sostituiti i valori che sopra, prima di x, poi di $4a$, avremo

$$tangz = \cfrac{z}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\cfrac{4a}{7+\text{ ec.}}}}} = \cfrac{z}{1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{z^2}{5-\cfrac{z^2}{7-\text{ec.}}}}}$$

101. La forma che abbiamo data in principio (91) alla frazione continua è generale. Ordinariamente però queste frazioni si presentano in aspetto più semplice, cioè con tutti i denominatori p positivi, e con tutti i numeratori q positivi ed eguali all' unità; ed anzi, siccome abbiamo già veduto (59), di questa ultima specie sono appunto quelli che s'incontrano allorchè si vuol ridurre in frazione continua un rotto proprio $\frac{B}{A}$ (91.4°.). In questo caso particolare la loro Teoria offre non poche belle particolarità, che molto importa far conoscere.

102. Primieramente è visibile che nel nostro caso abbiamo

$M_1 = 1$	$N_1 = p_1$
$M_2 = p_2 M_1$	$N_2 = p_2 N_1 + 1$
$M_3 = p_3 M_2 + M_1$	$N_3 = p_3 N_2 + N_1$
$M_4 = p_4 M_3 + M_2$	$N_4 = p_4 N_3 + N_2$
. . . .	. . . .
$M_k = p_k M_{k-1} + M_{k-2}$	$N_k = p_k N_{k-1} + N_{k-2}$

d' onde intanto apparisce che i valori di M_1, M_2, M_3, ec; N_1, N_2, N_3, ec. sono

successivamente, e respettivamente gli uni maggiori degli altri, e ciascun' M minore dell' N corrispondente.

103. In secondo luogo, poichè abbiamo trovato in generale (94) $M_k N_{k+1} - M_{k+1} N_k = \pm q_1 q_2 q_3 \ldots q_{k+1}$, sarà dunque per noi $M_k N_{k+1} - M_{k+1} N_k = \pm 1$, ove il segno di sopra ha luogo per k impari, l'altro per k pari. Di quì facilmente $\frac{M_k}{N_k} - \frac{M_{k+1}}{N_{k+1}} = \frac{\pm 1}{N_k N_{k+1}}$, e perciò 1°. i rotti $\frac{M_1}{N_1}, \frac{M_2}{N_2}, \frac{M_3}{N_3}$, ec. per i quali k è alternativamente impari e pari, presi consecutivamente nel loro ordine progressivo, sono a vicenda maggiori e minori gli uni degli altri, in modo che tutti quelli con l'indice impari superano il loro antecedente e il loro susseguente, seguendo l'opposto per quelli d'indice pari; 2° la differenza espressa in generale da $\pm \frac{1}{N_k N_{k+1}}$ va per altro sempre diminuendo al crescer di k, poichè con k crescono N_k ed N_{k+1} (102); 3°. siccome $N_{k+1} > N_k$ sarà $\frac{1}{N_k N_{k+1}} < \frac{1}{(N_k)^2}$, cioè la differenza fra due rotti consecutivi $\frac{M_k}{N_k}, \frac{M_{k+1}}{N_{k+1}}$ è sempre minore di $\frac{1}{(N_k)^2}$; 4°. qualunque altro rotto $\frac{m}{n}$ il cui valore sia intermedio fra quelli di $\frac{M_k}{N_k}$ ed $\frac{M_{k+1}}{N_{k+1}}$ avrà il suo denominatore n maggiore di N_{k+1}, e molto più di N_k. Infatti dovendo aversi $\frac{M_k}{N_k} \backsim \frac{m}{n} < \frac{M_k}{N_k} \backsim \frac{M_{k+1}}{N_{k+1}}$, sarà $\frac{M_k}{N_k} \backsim \frac{m}{n} < \frac{1}{N_k N_{k+1}}$, e quindi $n > N_{k+1}$ ($n M_k \backsim m N_k$), onde a più forte ragione $n > N_{k+1}$. 5°. tutti questi rotti saranno irriducibili, poichè se M_k ed N_k avessero un fattore comune D, tutto il primo membro dell' equazione $M_k N_{k+1} - N_k M_{k+1} = \pm 1$ sarebbe multiplo di D, né potrebbe essere eguale all' unità, che costituisce sola il secondo membro.

104. E' osservabile che tutte queste proprietà spettano ancora ai rotti che si otterrebbero dall' espressione $\frac{M_k + nM_{k+1}}{N_k + nN_{k+1}}$, ponendovi per n l'unità e quindi i successivi numeri interi. Infatti se con $\frac{M_k + nM_{k+1}}{N_k + nN_{k+1}}$ si rappresenti uno qualunque di questi rotti, $\frac{M_k + (n+1)M_{k+1}}{N_k + (n+1)N_{k+1}}$ sarà il suo susseguente, e sottraendo l'uno dall'altro avremo per differenza $\frac{N_{k+1} M_k - N_k M_{k+1}}{(N_k + nN_{k+1})(N_k + (n+1)N_{k+1})} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{\pm 1}{(N_k + nN_{k+1})(N_k + (n+1)N_{k+1})}$, che essendo della medesima forma di quella dei due rotti $\frac{M_k}{N_k}, \frac{M_{k+1}}{N_{k+1}}$ dà luogo ai medesimi raziocinj, e quindi alle medesime conseguenze. Se non che la variazione di n non portando quella di k, questi rotti saranno tutti costantemente maggiori o minori gli uni degli altri, secondochè k sarà pari o impari, e non a vicenda or minori or maggiori come i primitivi. (103.1.°)

105. Poichè il metodo con cui abbiamo ridotto in frazione continua il rotto $\frac{B}{A}$ è identico a quello col quale se ne cerca il massimo comun divisore (59), così chiamati R_1, R_2, R_3 . . . R_k i resti successivi, avremo visibilmente (32) $A = p_1 B + R_1$, $B = p_2 R_1 + R_2$, $R_1 = p_3 R_2 + R_3$, $R_2 = p_4 R_3 + R_4$, ec, e in generale $R_k = p_{k+2} R_{k+1} + R_{k+2}$. Di qui e dai valori trovati di M_1, M_2, M_3 ec, N_1, N_2, N_3 ec. (102) agevolmente si dedurrà

$$R_1 = A - p_1 B = M_1 A - N_1 B$$

$$R_2 = B - p_2 R_1 = B - p_2 M_1 A + p_2 N_1 B = -p_2 M_1 A + (p_2 N_1 + 1) B = -M_2 A + N_2 B$$

$$R_3 = R_1 - p_3 R_2 = M_1 A - N_1 B + p_3 M_2 A - p_3 N_2 B = (p_3 M_2 + M_1) A - \ldots \ldots (p_3 N_2 + N_1) B = M_3 A - N_3 B$$

$$R_4 = R_2 - p_4 R_3 = -M_2 A + N_2 B - p_4 M_3 A + p_4 N_3 B = \ldots \ldots \ldots - (p_4 M_3 + M_2) A + (p_4 N_3 + N_2) B = -M_4 A + N_4 B;$$

e in generale $R_k = \pm M_k A \mp N_k B$; preso il segno superiore per k impari.

106. Dunque $\frac{M_k}{N_k} = \frac{B}{A} \pm \frac{R_k}{AN_k}$; d' onde si vede. 1° che i rotti $\frac{M_k}{N_k}$ sono a vicenda maggiori o minori del dato $\frac{B}{A}$, secondochè k è impari o pari (103); 2° che tanto meno ne differiscono, quanto più va elevandosi k; poichè col crescere di k scema R_k (58), cresce N_k (102), e diminuisce quindi per doppio titolo la differenza $\frac{R_k}{AN_k}$; proprietà osservabile, per la quale questi rotti hanno avuto il nome di *convergenti*, e che dà campo di cangiare un rotto in altri idonei a rappresentarne il valore nel modo il più semplice, e nel tempo stesso il più approssimato. 3° che da $\frac{M_k}{N_k} = \frac{B}{A} \pm \frac{R_k}{AN_k}$ traendosi nel caso di n pari $\frac{M_{k+n}}{N_{k+n}} = \frac{B}{A} \pm \frac{R_{k+n}}{AN_{k+n}}$, si avrà sottraendo $\frac{M_k}{N_k} = \frac{M_{k+n}}{N_{k+n}} \pm \frac{1}{A}\left(\frac{R_k}{N_k} - \frac{R_{k+n}}{N_{k+n}}\right)$; e poichè in virtù della seconda osservazione il coefficiente di $\pm\frac{1}{A}$ è sempre positivo, perciò le frazioni $\frac{M_k}{N_k}$ convergendo verso $\frac{B}{A}$, convergono nel tempo stesso e con le medesime leggi verso qualunque delle frazioni susseguenti; onde come $\frac{B}{A}$ è compreso fra due qualunque convergenti consecutive, così ogni convergente è compresa fra due qualunque convergenti consecutive tra quelle che la precedono.

107. Se frattanto i rotti $\frac{M_1}{N_1}$, $\frac{M_2}{N_2}$, ec. si dispongono alternativamente nelle due serie $\frac{M_1}{N_1}$, $\frac{M_3}{N_3}$, $\frac{M_5}{N_5}$, ec., $\frac{M_2}{N_2}$, $\frac{M_4}{N_4}$, $\frac{M_6}{N_6}$, ec., l' una con tutti gl' indici impa-

ri, l'altra con tutti gl'indici pari, i termini della prima saranno tutti maggiori, quelli della seconda tutti minori del rotto dato; e attesa la dimostrata convergenza dei loro valori verso quello del rotto dato, la prima serie sarà decrescente, la seconda crescente. Tanto poi l'una che l'altra potranno maggiormente ampliarsi e completarsi, se fra i loro termini consecutivi, rappresentati in generale da $\frac{M_k}{N_k}$, $\frac{M_{k+1}}{N_{k+1}}$, interpoliamo tutti quei rotti che potremo della forma $\frac{M_k+nM_{k+1}}{N_k+nN_{k+1}}$, di cui abbiamo sopra parlato (104). Quanto al numero che possibile sarà d'inserirne tra termine e termine, è chiaro che non dovrà esser maggiore di $p_{k+2}-1$. Infatti facendo $n=0$ si ha il rotto $\frac{M_k}{N_k}$, e facendo $n=p_{k+2}$, si cade nel rotto $\frac{M_k+p_{k+2}M_{k+1}}{N_k+p_{k+2}N_{k+1}}=\frac{M_{k+2}}{N_{k+2}}$ (92) consecutivo di $\frac{M_k}{N_k}$. E siccome quei rotti sono successivamente o tutti minori, o tutti maggiori gli uni degli altri e di $\frac{M_k}{N_k}$, secondo che k sarà impari o pari, perciò non toglieranno alle due serie, con la loro intromissione, la qualità di decrescenti o di crescenti, e di convergenti verso il rotto dato.

108. Finquì abbiamo supposto proprio il rotto dato; che se fosse improprio, e rappresentato perciò da $\frac{A}{B}$, facilmente vedremo: 1°. che lo sviluppo del nuovo rotto in frazione continua è $p_1+\cfrac{1}{p_2+\cfrac{1}{p_3+\text{ec}}}$, ove p_1 rappresenta il numero degl' interi contenuti in $\frac{A}{B}$; 2°. che da $R_k=\pm M_kA\mp N_kB$ (105) traendosi $\frac{N_k}{M_k}=\frac{A}{B}\mp\frac{R_k}{BM_k}$, le convergenti verso il rotto $\frac{A}{B}$ non saranno più rappresentate da $\frac{M_k}{N_k}$ ma da $\frac{N_k}{M_k}$, ed al solito si accosteranno tanto più ad $\frac{A}{B}$ quanto k è maggiore; 3°. il rotto $\frac{A}{B}$ supererà tutte le convergenti con indice impari, e sarà superato da quelle con indice pari; 4° la serie $\frac{N_1}{M_1}$, $\frac{N_3}{M_3}$ ec. sarà crescente, e la serie $\frac{N_2}{M_2}$, $\frac{N_4}{M_4}$ ec. sarà decrescente, l'una e l'altra convergendo verso $\frac{A}{B}$; 5°. che da $M_kN_{k+1}-M_{k+1}N_k=\pm1$ (103) traendosi $\frac{N_k}{M_k}-\frac{N_{k+1}}{M_{k+1}}=\mp\frac{1}{M_kM_{k+1}}$, ciascun rotto con k impari sarà minore del suo susseguente e del suo antecedente, l'opposto seguendo di quelli con k pari.

109. A quanto si è detto fin'ora non sarà inutile aggiungere le seguenti osservazioni. I^a L'equazione (105) $R_k=\pm M_kA\mp N_kB$ dando luogo all'altra $R_{k+1}=$

$\mp M_{k+1} A \pm N_{k+1} B$; se da queste si elimina B, poi A, otterremo (103) le due $A = N_{k+1} R_k + N_k R_{k+1}$, $B = M_{k+1} R_k + M_k R_{k+1}$, che divise l'una per l'altra danno $\frac{B}{A} = \frac{M_{k+1} R_k + M_k R_{k+1}}{N_{k+1} R_k + N_k R_{k+1}}$, oppure $\frac{A}{B} = \frac{N_{k+1} R_k + N_k R_{k+1}}{M_{k+1} R_k + M_k R_{k+1}}$, valori di cui faremo grand' uso. Ed intanto si osserverà, che se R_k sia l'ultimo dei resti effettivi, talchè si abbia $R_{k+1} = 0$ (58), sarà $\frac{B}{A} = \frac{M_{k+1} R_k}{N_{k+1} R_k} = \frac{M_{k+1}}{N_{k+1}}$, rotto irriducibile (103.5°.): con che viene per altra e più chiara via a dimostrarsi che il resto finale precedente al resto zero, è il massimo comun divisore del rotto $\frac{B}{A}$ (58). Potrà ancora osservarsi che $B N_{k+1} = A M_{k+1}$, cioè il prodotto di B per l'ultima N eguaglia quello di A per l'ultima M. Che se $\frac{B}{A}$ sia irriducibile, e perciò $R_k = 1$ (58), l'equazione richiamata in principio darà $\pm 1 = M_k A - N_k B$.

II°. Fatto $\frac{R_k}{A N_k} = d$, $\frac{R_{k+1}}{A N_{k+1}} = d_1$, i superiori valori di R_k, R_{k+1} daranno per k pari $\frac{M_k}{N_k} = \frac{B}{A} - d$, $\frac{M_{k+1}}{N_{k+1}} = \frac{B}{A} + d_1$; e poichè $d > d_1$, sarà dunque $\frac{M_{k+1}}{N_{k+1}} < \frac{B}{A} + d$, ed in conseguenza $\frac{M_k M_{k+1}}{N_k N_{k+1}} < \frac{B^2}{A^2} - d^2$, e a più forte ragione . . $\frac{M_k M_{k+1}}{N_k N_{k+1}} < \frac{B_2}{A_2}$. Medesimamente fatto $\frac{R_k}{B M_k} = \delta$, $\frac{R_{k+1}}{B M_{k+1}} = \delta_1$, dagli stessi valori si avrà per k impari $\frac{N_k}{M_k} = \frac{A}{B} - \delta$, $\frac{N_{k+1}}{M_{k+1}} = \frac{A}{B} + \delta_1$, d'onde, ragionando e operando come sopra, si trarrà $\frac{N_k N_{k+1}}{M_k M_{k+1}} < \frac{A_2}{B_2}$, e quindi $\frac{M_k M_{k+1}}{N_k N_{k+1}} > \frac{B_2}{A_2}$. Dunque il prodotto di due convergenti consecutive $\frac{M_k}{N_k}$, $\frac{M_{k+1}}{N_{k+1}}$ è minore o maggiore del quadrato di $\frac{B}{A}$, secondo che k è pari o impari. Seguirà poi tutto l'opposto relativamente ad $\frac{A^2}{B^2}$. Da ciò è facile inoltre concludere che l'espressione $\pm A^2 M_k M_{k+1} \mp B^2 N_k N_{k+1}$, presi i segni di sopra per k impari, sarà sempre positiva. Con facilità anche maggiore si troverà che è parimente sempre positiva l'espressione $\mp (A M_{k+1})^2 \pm (B N_{k+1})^2$ sol che si osservi, che $\frac{N_{k+1}}{M_{k+1}}$ è maggiore di $\frac{A}{B}$ con k impari, minore con k pari (108.3°.).

III. Sostituito in $\frac{N_k}{M_k}=\frac{A}{B}\mp\frac{R_k}{BM_k}$ (108) il valore di $\frac{A}{B}=p_1+\frac{R_1}{BM_1}$ (105.102), avremo $\frac{N_k}{M_k}=p_1+\frac{R_1}{BM_1}\mp\frac{R_k}{BM_k}$; e potrà osservarsi 1°. che essendo $\frac{R_1}{BM_1}\mp\frac{R_k}{BM_k}$ quantità sempre positiva (106.2°.), gli interi contenuti nelle convergenti $\frac{N_k}{M_k}$ non potranno esser minori di quelli contenuti nel rotto $\frac{A}{B}$; 2°. che dal valor di B(109.I^a.) traendosi $\frac{R_1}{BM_1}+\frac{R_2}{BM_2}=\frac{1}{M_1M_2}$, e supposto $k>2$ avendosi $\frac{R_k}{BM_k}<\frac{R_2}{BM_2}$, sarà in quest' ipotesi $\frac{R_1}{BM_1}+\frac{R_k}{BM_k}<\frac{1}{M_1M_2}$, e per conseguenza minore dell' unità; laonde tutte le predette convergenti, dalla seconda in poi, non potranno contenere più che gli interi p_1 contenuti in $\frac{A}{B}$. Quanto poi alla convergente seconda, questa nel solo caso di $p_2=1$, che dà $M_2=1$, conterrà un' unità di più che l' intero p_1. Escluso questo unico caso, potremo stabilire in generale che le convergenti verso il rotto improprio $\frac{A}{B}$ contengono, nè più nè meno, gli stessi interi p_1 contenuti in $\frac{A}{B}$. Spogliate di questi e ridotte ad $\frac{N_k-p_1M_k}{M_k}$ convergeranno, come è evidente, verso il rotto proprio $\frac{A-p_1B}{B}$

IV. Avendosi (102) $N_k=p_kN_{k-1}+N_{k-2}$, sarà $\frac{N_k}{N_{k-1}}=p_k+\frac{N_{k-2}}{N_{k-1}}$, e inoltre $\frac{N_{k-1}}{N_{k-2}}=p_{k-1}+\frac{N_{k-3}}{N_{k-2}}$, $\frac{N_{k-2}}{N_{k-3}}=p_{k-2}+\frac{N_{k-4}}{N_{k-3}}$, ec; d' onde agevolmente $\frac{N_{k-1}}{N_k}=\cfrac{1}{p_k+\cfrac{1}{p_{k-1}+\cfrac{1}{p_{k-2}+\text{ ec.}}}}$, frazione continua con gli stessi quozienti di quella nella quale si svolge il rotto $\frac{B}{A}$, ma in ordine retrogrado. Quindi se avvenga che i quozienti di $\frac{B}{A}$ procedano in ordine simmetrico, cioè che da quello o quelli di mezzo in poi ritornino retrocedendo gli stessi, come vedesi nella frazione $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$, cosicchè sia una cosa stessa o prendergli direttamente dal primo all' ultimo, o inversamente dall' ultimo al primo; chiaro sarà

che in tal caso, qualora $\frac{M_k}{N_k}$ sia l' ultima convergente di $\frac{B}{A}$, avremo $\frac{M_k}{N_k} = \frac{N_{k-1}}{N_k}$, e quindi $N_{k-1} = M_k$. Come all' opposto se abbiasi $N_{k-1} = M_k$, cioè il denominatore di una convergente eguale al numeratore di quella che segue, la serie dei quozienti, dal suo principio fino a quello che corrisponde alla convergente $\frac{M_k}{N_k}$, sarà simmetrica.

110. Ma per venire ormai a qualche applicazione proponiamoci il rotto $\frac{11073}{20367}$, e vogliasi cangiarlo in altro di più comoda forma, conservandone quanto è possibile il valore. Operando a norma del prescritto metodo (58) si avranno i quozienti $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 5$, $p_4 = 4$, $p_5 = 2$, $p_6 = 5$, $p_7 = 1$, $p_8 = 1$, $p_9 = 5$; e quindi i valori $M_1 = 1$, $M_2 = 1$, $M_3 = 6$, $M_4 = 25$, $M_5 = 56$, $M_6 = 305$, $M_7 = 361$, $M_8 = 666$, $M_9 = 3691$; e $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, $N_3 = 11$, $N_4 = 46$, $N_5 = 103$, $N_6 = 561$, $N_7 = 664$, $N_8 = 1225$, $N_9 = 6789$. Da questi si avrà dunque la serie dei rotti. $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{25}{46}, \frac{56}{103}, \frac{305}{561}, \frac{361}{664}, \frac{666}{1225}, \frac{3691}{6789}$ il solo ultimo dei quali è, come dev' essere (92), eguale in valore al rotto proposto; gli altri, come è facile verificare, ne sono a vicenda or più grandi, or più piccoli, ma con differenze sempre minori, e sono poi tali che effettivamente niun altro rotto il quale non sia men semplice, potrà più di questi approssimarsi al rotto dato (103). La serie dei decrescenti è $\frac{1}{1}, \frac{6}{11}, \frac{56}{103}, \frac{361}{664}, \frac{3691}{6789}$; e poichè si ha $p_3 = 5$, $p_5 = 2$, $p_7 = 1$, $p_9 = 5$, potremo interpolare fra il primo e il secondo 4 rotti (107), cioè $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}$; uno fra il 2°. e il 3°. che sarà $\frac{31}{57}$; nessuno fra il 3°. e il 4°.; e fra il 4°. e il 5°. quattro, cioè $\frac{1027}{1889}, \frac{1693}{3114}, \frac{2359}{4339}, \frac{3025}{5564}$. Onde la serie decrescente completa diverrà $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \frac{31}{57}, \frac{56}{103}, \frac{361}{564}, \frac{1027}{1889}, \frac{1693}{3114}, \frac{2359}{4339}, \frac{3025}{5564}, \frac{3691}{6789}$. Nel modo stesso potrà trovarsi la serie crescente.

Si abbia il rotto decimale 3,14159, che, siccome è noto, rappresenta prossimamente il rapporto della circonferenza al diametro, e si voglia con le stesse condizioni di sopra, trovarne dei valori approssimati in forma di rotto ordinario. Siccome il dato rotto è improprio sarà rappresentato non già da $\frac{B}{A}$, ma da $\frac{A}{B}$ (108), e le richieste approssimazioni da $\frac{N_k}{M_k}$. Avremo intanto $p_1 = 3$, $p_2 = 7$,

$p_3=15$, $p_4=1$, $p_5=25$, $p_6=1$, $p_7=7$, $p_8=4$; $M_1=1$, $M_2=7$, $M_3=106$ $M_4=113$, $M_5=2931$, $M_6=3044$, $M_7=24239$, $M_8=100000$; $N_1=3$, $N_2=22$, $N_3=333$, $N_4=355$, $N_5=9208$, $N_6=9563$, $N_7=76149$, $N_8=314159$. E di quì per i valori cercati: $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{9208}{2931}$, $\frac{9563}{3044}$, $\frac{76149}{24239}$, il secondo dei quali corrisponde a quello di Archimede, il quarto a quello di Mezio.

111. Ma vogliasi per ultimo cangiare in frazion continua la quantità irrazionale $\sqrt{l}$ (91.4°.). Tutto si ridurrà a trovare il modo di avere in numeri interi i quozienti p_1, p_2, p_3, ec. Posto $\sqrt{l}=\frac{\sqrt{l}}{1}=\frac{A}{B}$, sarà $A=\sqrt{l}$, $B=1$, e gl'interi contenuti in $\sqrt{l}$, daranno subito il quoziente p_1. Quanto a p_2, che deve nascere dalla divisione di B per il resto R_1 (58), è chiaro che non potrà aversi senza che sia determinato R_1, il quale d'altronde equivalendo alla parte frazionaria di $\sqrt{l}$, non è esattamente assegnabile. Ma se si osservi che si ha in generale (105) $R_1=A-p_1 B$, potremo, sostituendo porre $R_1=\sqrt{l}-p_1$; sarà dunque $\frac{B}{R_1}=\frac{1}{\sqrt{l}-p_1}$ rotto, che quantunque proprio in apparenza, è per altro improprio, poichè $\sqrt{l}-p_1$ non contiene che decimali; ma dal quale non posso ancora aver p_2, se non ne trasformo in quantità razionale il denominatore, il che ottengo agevolmente col metodo altrove tenuto (93), moltiplicando cioè sopra e sotto per $\sqrt{l}+p_1$. Ho allora $\frac{B}{R_1}=\frac{\sqrt{l}+p_1}{l-p_1^2}$, e fatto $l-p_1^2=a$, avrò p_2 dividendo per a la somma di p_1 e degli interi contenuti in $\sqrt{l}$. Nel modo medesimo otterrò da $\frac{R_1}{R_2}$ il quoziente p_3, e quanto al resto R_2 lo dedurrò, nel modo tenuto per R_1, dall'equazione $R_2=B-p_2 R_1$ (105) ponendovi $B=\sqrt{l}+p_1$ ed $R_1=a$. Sarà dunque $\frac{B}{R_1}=p_2+\frac{\sqrt{l}+p_1-a p_2}{a}$. Nella maniera stessa da $\frac{R_1}{R_2}=\frac{a}{\sqrt{l}+p_1-ap_2}$, dopo averne reso razionale mediante l'usato artifizio il denominatore, otterrò il quoziente p_3 e il nuovo resto R_3, e così avrò successivamente gli altri quozienti e gli altri resti. Ecco il tipo di tutta l'operazione per il caso di $l=19$

$$\frac{A}{B}=\ldots\ldots\sqrt{19}\quad=4+\frac{\sqrt{19}-4}{1}\ldots\ldots\ldots p_1=4$$

$$\frac{B}{R_1}=\frac{1}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}\ldots\ldots\ldots p_2=2$$

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{\sqrt{19}-2}=\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}\ldots\ldots\ldots p_3=1$$

$$\frac{R_2}{R_3}=\frac{5}{\sqrt{19}-3}=\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}\ldots\ldots\ldots p_4=3$$

$$\frac{R_3}{R_4}=\frac{2}{\sqrt{19}-3}=\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}\ldots\ldots\ldots p_5=1$$

$$\frac{R_4}{R_5}=\frac{5}{\sqrt{19}-2}=\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}\ \ldots\ldots\ldots\ p_6=2$$

$$\frac{R_5}{R_6}=\frac{3}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{1}=8+\frac{\sqrt{19}-4}{1}\ \ldots\ldots\ldots\ p_7=8$$

ed a questo punto osserverò che, come al secondo quoziente, deve qui dividersi 1 per $\sqrt{19}-4$; dunque avrò di nuovo il quoziente 1, ed il medesimo resto, ed i successivi quozienti torneranno come i precedenti. La frazione cercata sarà perciò periodica (93) e quindi interminabile, ed avremo

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\text{ec.}}}}}}}}}$$

Le convergenti saranno 4, $\frac{9}{2}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{48}{11}$, $\frac{61}{14}$, $\frac{170}{39}$, $\frac{1421}{326}$, $\frac{3012}{691}$, $\frac{4433}{1017}$, ec.

112. Del resto il ritorno dei quozienti ed il progresso in infinito delle frazioni convergenti che ne derivano, s'incontra qualunque siasi $\sqrt{l}$ purchè irrazionale. Infatti è chiaro in primo luogo che il modo tenuto da razionali tutti i quozienti, e quindi tutte le convergenti. Ora se queste fossero limitate di numero e terminassero con $\frac{N_k}{M_k}$, si avrebbe (92) $\frac{N_k}{M_k}=\sqrt{l}$, cioè una quantità razionale eguale ad una irrazionale, il che è assurdo.

113. In secondo luogo sieno $\frac{R_{k-2}}{R_{k-1}}$, $\frac{R_{k-1}}{R_k}$ due consecutivi quozienti completi (30), e si eguagli l'uno a $\frac{\sqrt{l}+a_k}{b_k}$, l'altro a $\frac{\sqrt{l}+a_{k+1}}{b_{k+1}}$, secondo la forma che ciascuno prende in virtù della proposta operazione (111). Poichè (105) $\frac{R_{k-2}}{R_{k-1}}=p_k+\frac{R_k}{R_{k-1}}$, sarà $\frac{\sqrt{l}+a_k}{b_k}=p_k+\frac{b_{k+1}}{\sqrt{l}+a_{k+1}}$; d'onde riducendo ed eguagliando a parte le quantità irrazionali e le razionali, avremo I.ª $a_{k+1}=p_kb_k-a_k$, II.ª $b_kb_{k+1}=l-(a_{k+1})^2$. Inoltre dal valor generico di $\frac{A}{B}$ (109. I.ª), cangiato A in $\sqrt{l}$, B in 1 e k in $k-2$, si trae $\sqrt{l}\left\{(\sqrt{l}+a_k)\,M_{k-1}+b_kM_{k-2}\right\}=(\sqrt{l}+a_k)N_{k-1}+b_kN_{k-2}$: d'onde, operando come sopra, avremo III.ª $a_kN_{k-1}+b_kN_{k-2}=lM_{k-1}$, IV.ª $a_kM_{k-1}+b_kM_{k-2}=N_{k-1}$; dalle quali, osservando che $M_{k-2}N_{k-1}-N_{k-2}M_{k-1}=\pm 1$ (103); otterremo $a_k=\pm lM_{k-2}M_{k-1}\mp N_{k-2}N_{k-1}$, $b_k=\pm(N_{k-1})^2\mp l(M_{k-1})^2$: dal che intanto si ha che a_k e b_k sono interi e di più positivi (109. II.ª). Da ciò e dalla II.ª segue 1.° che deve aversi $a_{k+1}<\sqrt{l}$, e quindi a_{k+1} non mai maggiore degli interi p_1 contenuti in $\sqrt{l}$, conseguenza che visibilmente si estende anche

ad a_k: e poichè la I.ª dà $a_{k+1}+a_k=b_k p_k$, sarà dunque 2.° $b_k p_k < 2\sqrt{l}$, ed a più forte ragione $b_k < 2\sqrt{l}$. Ora se il numero dei quozienti completi non ha limite alcuno (112), mentre lo hanno i valori di a_k e b_k, ben si vede che, o prima o poi, un qualche quoziente completo deve tornare a contenere uno stesso a_k combinato con uno stesso b_k, il che dà luogo al periodo.

114. La IV.ª (113) dà $\frac{N_{k-1}}{M_{k-1}}=a_k+\frac{b_k M_{k-2}}{M_{k-1}}$: e poichè $\frac{N_{k-1}}{M_{k-1}}>p_1$ (109. III.), dunque $p_1<a_k+\frac{b_k M_{k-2}}{M_{k-1}}$, ed a più forte ragione $p_1<a_k+b_k$, per essere $\frac{M_{k-2}}{M_{k-1}}$ rotto proprio (102). Inoltre si rappresenti con a_{k+n} una qualunque delle a comunque differente da a_k. Poichè $a_{k+n}<p_1$ o al più eguale a p_1 (113), sarà $a_{k+n}<a_k+b_k$: come del pari $a_k<a_{k+n}+b_{k+n}$. Di qui $b_k>a_{k+n}-a_k$, $b_{k+n}>a_k-a_{k+n}$; e nel caso che b_k e b_{k+n} abbiano lo stesso valore, $b_k>a_{k+n}\backsim a_k$; e quindi nell'istessa ipotesi $\frac{a_{k+n}\backsim a_k}{b_k}$ rotto proprio Questa osservazione ci conduce a stabilire il luogo della nascita del periodo, che per facilitare il discorso, supporremo di n termini.

115. Sia infatti $\frac{\sqrt{l}+a_k}{b_k}$ l'ultimo quoziente completo fuori di periodo; $\frac{\sqrt{l}+a_{k+1}}{b_{k+1}}$ quello che immediatamente lo segue, e che dunque è primo del periodo: sarà $\frac{\sqrt{l}+a_{k+n}}{b_{k+n}}$ l'ultimo del periodo, dopo il quale torna $\frac{\sqrt{l}+a_{k+1}}{b_{k+1}}$; e di ciascuna di queste due coppie dovrà verificarsi quanto sopra si è dimostrato (113) per una coppia qualunque di quozienti completi successivi. Or la prima ha dato (ivi I.ª e II.ª) 1.ª $a_{k+1}=p_k b_k-a_k$, 2.ª $b_k b_{k+1}=l-(a_{k+1})^2$; e l'ultima che non differisce dall'altra se non per il cambiamento di a_k, b_k in a_{k+n}, b_{k+n}, il che porta altresì quello di p_k in p_{k+n}, darà 3.ª $a_{k+1}=p_{k+n}b_{k+n}-a_{k+n}$, 4.ª $b_{k+1}b_{k+n}=l-(a_{k+1})^2$. Or la 2.ª e 4.ª danno immediatamente $b_{k+n}=b_k$, e la 1.ª e 3.ª danno $p_{k+n}=p_k+\frac{a_{k+n}-a_k}{b_k}$: ma p_{k+n} e p_k sono interi, e $\frac{a_{k+n}-a_k}{b_k}$ è una frazione (114), dunque affinchè l'ultima equazione sussista, la frazione deve annullarsi da se medesima, cioè oltre $b_{k+n}=b_k$, deve aversi ancora $a_{k+n}=a_k$: laonde tutto intero l'ultimo quoziente completo del periodo eguaglia quello che abbiam supposto precederne la nascita. Dunque anche questo è in periodo; e con lo stesso raziocinio si proverebbe che lo è il suo precedente, come pure tutti gli anteriori finchè mantengono la stessa forma, cioè fino al quoziente $\frac{B}{R_1}$ (111), dal quale avrà dunque principio il periodo. E come da questo nasce il quoziente semplice p_2, è chiaro dunque che da p_2 dovrà aver principio il periodo dei quozienti semplici e non da p_1, che dunque ne resterà sem-

pre escluso; come da b_2 e non da b_1, di sua natura eguale ad 1, comincierà quello dei b.

116. Ma passiamo a rilevare altre osservabili particolarità. Se, ripresa la relazione (113) $\frac{R_{k-2}}{R_{k-1}}=p_k+\frac{R_k}{R_{k-1}}$ fra i consecutivi quozienti completi $\frac{R_{k-2}}{R_{k-1}}$, $\frac{R_{k-1}}{R_k}$, si supponga che il primo rappresenti l'ultimo del periodo, sarà altresì p_k l'ultimo dei quozienti particolari, e l'altro quoziente completo corrisponderà al primo del periodo seguente e sarà dunque eguale ad $\frac{1}{\sqrt{l}-p_1}$ (111): e fatto come sopra (113) $\frac{R_{k-2}}{R_{k-1}}=\frac{\sqrt{l}+a_k}{b_k}$, avremo $\frac{\sqrt{l}+a_k}{b_k}=p_k+\sqrt{l}-p_1$. Da questa, egnagliate fra loro le quantità irrazionali, si ha 1.° $b_k=1$, cioè *l'ultimo dei b è in ciascun periodo eguale all'unità*; ed egnagliate fra loro le quantità razionali, si ha 2.° $a_k=p_k-p_1$. Ora con $b_k=1$ la IV.ª (113) dà $a_k=\frac{N_{k-1}}{M_{k-1}}-\frac{M_{k-2}}{M_{k-1}}$: e poichè l'ultimo termine del secondo membro è un rotto proprio $(102)_k$ l'intero a_k dovrà essere eguale agl'interi contenuti nella convergente $\frac{N_{k-1}}{M_{k-1}}$; sarà dunque $a_k=p_1$ (109. III.), e la 2.ª darà $p_k=2p_1$, cioè *l'ultimo quoziente intero di ogni periodo è doppio degl'interi contenuti in $\sqrt{l}$, o del quoziente fuor di periodo.*

117. Poichè per l'ultimo quoziente completo si ha (116) $a_k=p_1$, $b_k=1$, la IV.ª (113) darà $p_1M_{k-1}+M_{k-2}=N_{k-1}$; d'onde $M_{k-2}=N_{k-1}-p_1M_{k-1}$, ed $\frac{M_{k-2}}{M_{k-1}}=\frac{N_{k-1}-p_1M_{k-1}}{M_{k-1}}$. Ma il secondo membro è una convergente verso $\sqrt{l}-p_1$ (109. III.) preceduta da $\frac{N_{k-2}-p_1M_{k-2}}{M_{k-2}}$; è dunque chiaro che avendosi qui $M_{k-2}=N_{k-1}-p_1M_{k-1}$, viene con ciò a verificarsi la condizione posta altrove (109. IV.), e quindi l'ordine dei quozienti particolari in periodo da p_2, con cui comincia la frazione continua equivalente a $\sqrt{l}-p_1$, fino al penultimo p_{k-1}, che corrisponde alla convergente $\frac{N_{k-1}-p_1M_{k-1}}{M_{k-1}}$, è simmetrico.

118. Omettiamo altre osservazioni che troppo ci porterebbero in lungo. Gli studiosi potranno intanto verificare le più delle già fatte mediante la Tavola posta in fine (pag. LVII), che in distinti quadri dà i valori dei b_k e dei quozienti p_k per ogni valore di l da 2 fino a 251, esclusi, per le ragioni che a suo luogo daremo (339. 8.°), i quadrati e i multipli di quadrato. Ciascun quadro porta in fronte uno dei suddetti valori di l, e al di sotto due colonne, di cui quella a sinistra dà, per l'oggetto del quale vedremo l'importanza (339. 5.°), i valori dei b_k dal primo che non entra con gli altri in periodo (115), e che a tal riguardo ne è separato mediante una piccola linea, fino all'ultimo del periodo, che è sempre eguale all'unità (116); quella a destra dà i valori dei quozienti p_k dal primo,

separato esso pure mediante una linea, per lo stesso motivo che b_1, dai successivi, fino a quello che resultando doppio del primo denota il termine del periodo (116); col mezzo dei quali assai agevole riuscirà la costruzione delle convergenti.

119. Daremo fine con una importante osservazione. Se in $b_k = \pm (N_{k-1})^2 \mp l(M_{k-1})^2$ (113), si cangi k in $k+(m-1)n$, avremo $b_{k+(m-1)n} = \pm (N_{k+(m-1)n-1})^2 \mp l(M_{k+(m-1)n-1})^2$; se non che l'indice $k+(m-1)n$ tenendo qui la vece dell'indice k, il segno superiore dovrà aver luogo se con k impari sia n pari, o m impari, e se con k pari avremo n impari ed m pari; l'inferiore se con k impari avremo n impari ed m pari, o se sia n pari, o m impari con k pari. Di qui si ha, che siccome ad ogni periodo debbon tornare in ordine gli stessi b, se con m si rappresenti il numero d'ordine di ciascun periodo, e con n il numero dei termini di cui il periodo è composto, rappresentando con b_k uno qualunque dei b del primo periodo, sarà $b_{k+(m-1)n} = b_k$; e oltre l'equazione $b_k = \pm (N_{k-1})^2 \mp l(M_{k-1})^2$, avrà luogo l'altra $b_k = \pm (N_{k+(m-1)n-1})^2 \mp l(M_{k+(m-1)n-1})^2$, la quale, regolando i segni nel modo suriferito e a seconda dei casi espressi, verrà soddisfatta non solo dai due termini della convergente $\frac{N_{k-1}}{M_{k-1}}$ del primo periodo, ma anche da quelli di tutte le infinite convergenti rappresentate in generale da $\frac{N_{k+(m-1)n-1}}{M_{k+(m-1)n-1}}$, che s'incontreranno continuando a volontà il calcolo al di là del primo periodo.

120. Che se l'ultima equazione si trasformi nell'altra $\pm b_k = (N_{k+(m-1)n-1})^2 - l(M_{k+(m-1)n-1})^2$, questa col segno superiore non potrà venir soddisfatta, siccome è manifesto, che dalle convergenti il cui indice $k+(m-1)n-1$ sia pari, col segno inferiore quando sia impari. E se b_k sia l'ultimo dei b del primo periodo, e in conseguenza $k=n+1$ (115), e $b_k=1$ (116), nascerà l'equazione $\pm 1 = (N_{mn})^2 - l(M_{mn})^2$, ove N_{mn}, M_{mn} spetteranno alle penultime convergenti di ogni periodo, del che è assai facile il convincersi se si rifletta, che quando k sia l'indice dell'ultimo b del periodo, e in conseguenza dell'ultimo p e quindi anche dell'ultima convergente, $k-1=n$ sarà quello della convergente penultima. Frattanto per questa importante equazione, da tutte le cose dette, sarà agevole concludere il seguente canone speciale, cioè: che col segno superiore, se il numero n dei quozienti in periodo sia pari, verrà soddisfatta dalle penultime convergenti d'ogni periodo; se impari dalle penultime convergenti dei soli periodi 2.°, 4.°, 6.° ec. e quindi in ogni caso sarà sempre solubile: col segno inferiore, se n sia impari, verrà soddisfatta dalle penultime convergenti dei periodi 1.°, 3.°, 5.° ec.: se pari niuna convergente potrà soddisfarla.

Altri Rotti

La migliore e più comoda divisione dell'unità è certamente la decimale: ma l'inesperienza e poca avvedutezza de-

gli antichi divise in una maniera del tutto differente, arbitraria ed incomoda le unità più importanti, che sono quelle di *tempo*, di *peso*, di *lunghezza*, di *superficie*, di *capacità*, di *moneta*, e della *circonferenza del circolo*.

121. L' unità di tempo, comune a tutte le nazioni, è il *giorno solare*. Si divide in 24 parti chiamate *ore*, l' ora in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi*, il secondo in 60 *terzi* ec. La suddivisione del secondo in terzi è oggimai poco in uso; si adoprano in vece i decimi e centesimi di secondo. Giorni 365 formano l' *anno* comune, 366 il bisestile, che si dividono in 12 parti ineguali chiamate *mesi*; 365 *giorni*, 5 ore, 48 primi, 50 secondi e due decimi di secondo formano l' anno astronomico.

122. L' unità di peso è fra noi la *libbra*: si divide in 12 *oncie*, l' oncia in 24 *denari*, il denaro in 24 *grani*. I Francesi hanno modernamente il *chilogrammo*, che si divide in parti decime, centesime, millesime ec., e corrisponde a libbre 2, oncie 11, denari 8, grani $4\frac{83}{100}$, ossia libbre 2,945144, come la libbra corrisponde a chilogrammi 0,339542.

123. L' unità di lunghezza è fra noi il *braccio*: si divide in 20 *soldi*, e il soldo in 12 *denari*. Ogni cinque braccia fanno una *canna*. Braccia $2833\frac{1}{3}$ formano il *miglio* toscano.

I moderni Francesi hanno il *metro* che dividono in decimi, centesimi, ec. chiamati *decimetri*, *centimetri*, ec. Il metro corrisponde a braccia 1, soldi 14, denari 3,222, ossia braccia 1,713427, come il braccio a metri 0,583625. Dieci metri fanno un *decametro*, mille un *chilometro*, diecimila un *miriametro*. Precedentemente avevano la *tesa*, misura assai cognita e diffusa ancor presso gli esteri. Si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, la linea in dodici *punti*. Corrisponde a braccia 3, sol. 6, den. 9,49 e a metri 1,94904; come all' opposto il braccio corrisponde a piedi 1, pollici 9, linee 6,719, ossia tese 0,299443; e il metro a piedi 3, pollici 0, linee 11,292, ossia tese 0,51307. Tese 848,42 fanno il miglio toscano.

124. L'unità di superficie è il *braccio quadro*. Si divide come il braccio lineare in soldi e denari quadri. Diecimila braccia quadre fanno un *quadrato*. Braccia quadre $1541\frac{1}{3}$ formano uno *stioro*. Presso i Francesi moderni l'unità di superficie è l'*aro*, corrispondente a 10 metri quadrati, e a braccia quadre 293,584.

125. L'unità di capacità varia secondo le specie contenute. Per gli *aridi* è lo *staio*, di cui tre fanno un *sacco*. I *liquidi* hanno per unità il *barile*, che si divide in 20 *fiaschi*, se si tratta di vino, se d'olio in 16. I Francesi hanno il *litro*, corrispondente alla capacità di un vaso che abbia un decimetro per lato nei tre sensi di lunghezza, larghezza ed altezza.

126. L'unità di moneta è per noi la *lira*, che si divide come il braccio in soldi e denari. Sette lire fanno uno *scudo*. I Francesi hanno il *franco*, che dividono in decimi e centesimi. Corrisponde a $\frac{25}{21}$ di lira, ossia a lire 1, sol. 3, den. 9,71: all'opposto la lira è $\frac{21}{25}$ di franco, ossia franchi 0, 84. L'antica lira *tornese* di Francia vale $\frac{80}{81}$ di franco.

127. Infine la circonferenza del circolo si divide in 360 *gradi*, il grado in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi*, ec. Per denotare i gradi si pone un piccolo zero in alto alla destra del numero che gli rappresenta; per i minuti, secondi, terzi ec. si pongono nel modo stesso uno, due, tre, ec. apici: così $35°\ 45'\ 30''$ indicano 35 gradi, 45 minuti e 30 secondi. I Francesi han voluto dividere il circolo in 400 gradi, ogni grado in 100 minuti, ogni minuto in 100 secondi, ma questa divisione, benchè più comoda dell'antica, non é stata accettata neppur fra la massima parte di loro.

128. Supposto $1 : m$ il rapporto fra due unità della stessa specie in uso fra due differenti nazioni, si cangerà una misura qualunque a relativa alla prima nella corrispondente x relativa alla seconda, mediante la proporzione $1 : m :: a : x$; d'onde $x = am$. Così poichè il braccio fior. è tese francesi 0,299443, e quindi il rapporto di quello alla tesa è di $1 : 0,299443$; perciò brac. fior. $2833\frac{1}{3}$ (lunghezza del miglio) corrisponderanno a tese francesi $x = 2833\frac{1}{3} \times 0,299443 = 848,42$.

Per facilitare queste e simili riduzioni si pone in fine al Tomo una rac-

colta di logaritmi dei rapporti m fra le più usuali misure toscane, e le corrispondenti straniere. Questi logaritmi sono additivi se la misura data da convertirsi è toscana, sottrattivi nel caso opposto. Così volendo convertire braccia fiorentine 462 in tese francesi, il logaritmo della Tavola si aggiungerà a quello di 462 ed avremo $Lx = L462 + 9,4763146 = 2,1409566 = L$ *tese* 138,3. Ma se vogliamo ridurre metri 580 in braccia fiorentine, il logaritmo della Tavola si sottrarrà, ed avremo $Lx = L580 - 9,7661346 = L$ B. 663,787.

129. Ora sieno S, S_1 due misure straniere, T la misura toscana corrispondente, L, L_1 i logaritmi di rapporto dati dalla Tavola, avremo $LT = LS - L = LS_1 - L_1$. Dunque $LS = LS_1 + L - L_1$, formula che servirà a convertire S_1 in S. Così volendo cangiare 10 metri in tese, avremo $L = 9,4763146$, $L_1 = 9,7661346$, e quindi $LS = L10 + 9,7101800 = 0,7101800 = L$ *tese* 5,13074.

130. Per sommar queste specie, scrivo l'une sotto l'altre le parti del nome stesso; poi sommo le colonne al solito, andando da destra a sinistra, e scrivo ciò che resta dopo averne tolto, se si può, di che formare una o più unità della specie immediatamente maggiore, che porto nella colonna seguente. Esempj.

	tese	*piedi*	*pol.*	*lin.*	*lire*	*sol.*	*den.*
36° 25′ 47″	9	3	11	2,37	325	17	4,3
49 33 28	100	0	0	0,50	15	11	6,5
55 31 49	47	5	3	8,46	25	1	8,4
141 31 4	11	0	10	8,24	4	10	0,9
	168	4	1	7,57	371	0	8,1

131. Così le stesse specie si sottraggono; e se l'inferiore è più grande, si toglie un'unità dalla colonna che segue a sinistra nel numero superiore, per decomporla in tante unità della specie di quelle da sottrarsi. Esempj.

	tese	*pie.*	*pol.*	*lin.*	*lire*	*sol.*	*d.*
48° 16′ 17″,3	100	0	0	0,0	655	3	4
24 23 12 ,4	17	4	5	11,8	30	6	8
23 53 4 ,9	82	1	6	0,2	624	16	8

132. La moltiplicazione si fa nella maniera seguente.

Si cerchi il prezzo di braccia 246 di stoffa a lire 6. 15. 9 il braccio (i 15 son *soldi*, i 9 *denari*, ed i punti interposti servono a separare l'una specie dall'altra). Moltiplico le date lire ec. per 10 e scrivo il prodotto di sopra, avvertendo però di non segnare dei prodotti delle specie inferiori se non ciò che re-

	lire	*sol.*	*den.*
	678	15	0×2
	67	17	6×4
Br. 246 a Lire	6	15	9×6
	1357	10	—
	271	10	0
	40	14	6
Somma Lire	1669	14	6

sta dopo aver tolto, come nella somma, di che formare quante unità potremo della superiore: regola che sempre terremo nella moltiplicazione. Quindi moltiplico nuovamente per 10 questo prodotto, e ciò tante volte quante bisogna per distribuir le cifre del moltiplicatore come nell' esempio. È chiaro che moltiplicando la quantità superiore (centupla della data) per 2, avrò il valor di 200 braccia; moltiplicando la quantità che segue (decupla della data) per 4, avrò il valor di 40 braccia; e finalmente moltiplicando per 6 la data, avrò il valor di 6 braccia; i quali valori sommati mi danno il prezzo di braccia 246.

133. Osservate 1°. che un rotto ordinario di specie superiore si riduce alle inferiori col moltiplicarlo per il loro numero caratteristico, ossia per quelle tante unità di specie inferiore che formano un' unità della superiore; così per aver $\frac{7}{12}$ di lira in soldi e denari, si dirà: $\frac{7}{12} \times 20 = 11\frac{2}{3}$ soldi, e poi $\frac{2}{3} \times 12 = 8$ denari; onde $\frac{7}{12}$ sono 11 soldi e 8 denari; 2°. che le specie inferiori si riducono alla superiore col dividerle per il loro numero caratteristico; così lire 2. 3. 4 = 2. $3\frac{4}{12}$ = 2. $3\frac{1}{3}$ = 2 $\frac{10}{60}$ = $2\frac{1}{6}$.

134. Quanto alla divisione, voglia verificarsi il primo esempio di sopra, cioè si debban dividere lire 1669. 14. 6 per 246. Divido le lire, ed ho il quoziente 6 col resto 193, che riduco a soldi, moltiplicandolo per 20, ed aggiungendo al prodotto i soldi della quantità proposta. Proseguo al solito la divisione ed ho 15 di quoziente col resto 184, che moltiplico per 12, e coll' aggiunta de' 6^d ho per prodotto 2214 e per quoziente 9 senza resto, come doveva essere. Se l' avanzo moltiplicato per il numero respettivo fosse più piccolo del divisore, passerei a moltiplicarlo per il numero caratteristico della specie seguente, scrivendo zero nel quoziente, così dividendo lire 526. o. 5 per 35, ho lire 15. o. 7.

```
              |   6   15   9
              -------------
       Lire    1669. 14.  6
   per  246  /  193×20
               3874
               1414
                184×12
               2214
                 00
```

135. Fin qui il moltiplicatore (132), e il divisore (134), sono stati semplici, cioè d' una sola specie: ecco la regola da tenersi se sieno composti, cioè se contengano essi pure parti di specie inferiore. Si cerchi il prezzo di 42^{tese} 5^{piedi}, $4^{poll.}$ a lire 18.6.8

la tesa. Moltiplico le lire come sopra per 10 ec., e poichè i piedi sono $\frac{1}{6}$ della tesa, divido il prezzo di una tesa, cioè le lire soldi e denari dati, per 6, e ho in quoziente il prezzo di un piede; parimente poichè il pollice è $\frac{1}{12}$ del piede divido, per 12 il prezzo avuto del piede, ed ho il prezzo di un pollice. Fatto ciò distribuisco il moltiplicatore come nell' esempio; il primo e secondo prodotto danno il valore degli interi, cioè delle tese, i due seguenti quello dei piedi e pollici; la somma sarà dunque il prezzo totale.

	183	6	8	×4
42tes. 5pi. 4pol. a Lire	18	6	8	×2
6/	3	1	$1\frac{1}{3}$	×5
42/	—	5	$1\frac{1}{9}$	×4
	733	6	8	
	36	13	4	
	15	5	$6\frac{2}{3}$	
	1	0	$4\frac{4}{9}$	
Somma Lire	786	5	$11\frac{1}{9}$	

Si voglian dividere lire 786. 5. $11\frac{1}{9}$ per 42^{tese} 5^{piedi} $4^{pol.}$ in riprova del passato esempio. Riduco il divisore alla specie ultima, come qui le tese a pollici; cioè moltiplico 42 per 6, aggiungendo al prodotto (che son le tese ridotte in piedi) i 5 piedi del divisore, ed ho 257; moltiplico 257 per 12, e al prodotto (che son le tese e i piedi ridotti in pollici) aggiungo 4, ed ho 3088 pollici ossia $\frac{3088}{72}$ di tesa per divisore. Dipoi moltiplico per 72 le lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$ come bisogna (70); e finalmente divido il prodotto, che è 56613. 6. 8 per 3088, come nell' esempio, e trovo il quoziente 18. 6. 8.

42 tese 5pi. 4pol.

42×6
257×12 /
3088

| 18. 6. 8
L. 786. 5. $11\frac{1}{9}$×72
/ 56613. 6. 8
25733
1029×20
20586
2058×12
24704
00

Dovendo dividere lire 786. 5. $11\frac{1}{9}$ per lire 18.6.8 prezzo della tesa, onde il quoziente sia in tese, riduco le specie inferiori alla superiore, ed ho lire 18. 6. $8 = 18\frac{1}{3} = \frac{55}{3}$, lire 786 5. $11\frac{1}{9} =$ lire 786 $\frac{8}{27}$: dunque $786\frac{8}{27} : \frac{55}{3} = 2358\frac{8}{9} : 55 =$ tese 42.5.4.

Queste son le regole principali dell'Aritmetica. Per insegnare in un modo più generale *la Formazione delle Potenze, l'Estrazion delle Radici, la Regola del Tre ec.,* premetteremo i principj del calcolo algebrico.

ELEMENTI D'ALGEBRA

136. Tutte le cifre aritmetiche, o prese isolatamente, o comunque combinate fra loro, hanno un valor determinato atto ad indicare una data e precisa riunione di quantità, e non altra che quella. Così il 3, il 58 indicano 3 unità, 58 unità, ma non possono rappresentarne nè cento, nè mille. Quindi è che l'Aritmetica può bensì giungere a farci conoscere i rapporti individuali che passano fra numero e numero, e mostrarci le particolari proprietà spettanti a quello, o a questo di essi: ma comecchè mancante di simboli idonei a rappresentare in generale una quantità qualunque, non può svelarci i rapporti e le proprietà spettanti a tutti i numeri in comune, e meno ancora indagare quali fra tutti i numeri, ad esclusione dell' intera immensità dei rimanenti, abbiano un dato rapporto, o sieno dotati della tale o tale altra proprietà. E se pure la vediamo impegnarsi talvolta in queste indagini, ed in qualche modo riescir nell' intento, ciò accade o in forza dei numerosi e ciechi tentativi a cui assoggetta il calcolatore; o in virtù di metodi artificiosi, che da non molto tempo ha adottati, estranei per altro ai suoi principj, nè tratti dal suo proprio fondo; o per l'abuso in fine a questa scienza familiarissimo di concludere dal particolare al generale.

Frattanto le indagini di cui parliamo, estese non solo ai numeri, ma ad ogni altra specie di quantità, sono di un' importanza gravissima in tutte le matematiche; e ne formano anzi il principale e più nobile scopo. Per giungervi in una maniera ragionata e soddisfaciente, e supplire al vuoto immenso, che l'Aritmetica in questa parte lasciava, fu dunque primieramente necessario immaginare simboli di più esteso significato, e atti a

rappresentare non quella o questa quantità, come le cifre aritmetiche, ma tutte le quantità in generale, e in seguito abbisognò creare una nuova scienza, che insegnasse ad usarne, a sottoporgli alle leggi del calcolo, e ad interpetrare il misterioso linguaggio delle loro finali combinazioni. Questa scienza fu l'*Algebra*, che valutata in principio come semplice appendice dell'Aritmetica, ma per altro chiamata fin d'allora, per antonomasia, *Arte magna*, spiegò ben presto, per opera specialmente degl'Italiani, le immense sue forze, e in breve si palesò quale uno dei più fecondi ed utili ritrovamenti dell'umano ingegno. I simboli, per uso di questa scienza introdotti, furono le lettere di qualunque alfabeto; il che fu ideato con ottimo divisamento; perchè essendo quelle già conosciute, la loro introduzione non veniva ad aggravar la memoria, come avvenuto sarebbe, se preferiti si fossero invece segni di qualunque altra arbitraria configurazione. Del resto non è nuovo l'uso delle lettere alfabetiche per indicar quantità: ebbe in antico vigore fra quasi tutte le nazioni, come ne abbiamo prova presso gli Ebrei, Greci e Romani; con la differenza però, che mentre per esempio fra i Romani le lettere I, V, X, L, C, D, M, rappresentavano esclusivamente 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, nell'Algebra tanto queste, quanto tutte le rimanenti rappresentano indistintamente e genericamente qualunque quantità, e ciò che di ciascuna di esse si enuncia, s'intende enunciato d'ogni o qualunque numero.

Tutto ciò si comprenderà meglio in appresso: ma forse i due seguenti saggi potranno intanto utilmente servire, almeno per i più intelligenti, a far prender fin d'ora una qualche prima idea dello spirito di questa scienza, e della sua superiorità sulla volgare Aritmetica.

Se si sommano i tre numeri consecutivi 5, 6, 7 si ha 18 triplo del medio 6; se si sommano i tre parimente consecutivi 9, 10, 11 si ha 30 triplo del medio 10; come pure se si sommano i tre consecutivi 15, 16, 17 si ha 48 triplo del medio 16. Da questi e da altri simili esempj, che potrebbero a piacere moltiplicarsi, l'Aritmetico trae che la somma di tre numeri conse-

cutivi é sempre tripla del medio; modo di ragionare non abbastanza retto, perchè da ciò che vedesi accadere in più casi non può legittimamente dedursi che lo stesso accaderà in tutti gli altri.

L'Algebra non ragiona così: ma comincia dal rappresentare con m il numero medio, qualunque questo esser possa. Quindi riflettendo che il precedente deve avere un' unità di meno, il susseguente una di più, conclude che il primo sarà dunque ben rappresentato da $m-1$, il secondo da $m+1$. La somma di questi tre numeri disposti secondo il loro ordine naturale sarà perciò $m-1+m+m+1$: e poiché il -1 del primo vien distrutto visibilmente dal $+1$ dell'ultimo, resterà dunque . . $m+m+m$ riunione di tre numeri tutti eguali ad m, e corrispondenti perciò al triplo di m (19), cioè al triplo del medio, come doveva dimostrarsi.

Venga proposto di trovare fra tutti i numeri quello il cui doppio e il cui triplo sommati facciano 100. L'Aritmetico è obbligato ad andar tentando e cercare il numero richiesto fra tutti quelli minori di 100: e il solo esame attento degli errori a cui lo hanno condotto le sue prime supposizioni, potrà servirgli di qualche lume per accostarsi più al vero nelle seconde. L'Algebrista all' opposto, sicuro che qualunque siasi il numero cercato, non può non essere rappresentato con x, simbolo generale che tutti quanti i numeri rappresenta, lo chiama x, e conclude che $2x$ ne sarà il doppio, $3x$ il triplo, e $5x$ la proposta somma del doppio e del triplo, che deve dunque essere eguale a 100. Or se $5x$ eguaglia 100, x quantità cinque volte minore eguaglierà la quinta parte di 100, cioè 20, che sarà dunque il numero cercato. E infatti il doppio di 20 che è 40, e il triplo che è 60, sommati fanno 100.

La scelta d' una lettera piuttosto che d' un' altra per rappresentare la quantità che ci occorre è indifferente, tutte avendo la stessa virtù di rappresentare qualunque numero. Bensì se i ragionamenti cadono non sopra una, ma sopra più quantità differenti fra loro, ognuna di queste dovrà esser rappresentata con lettere diverse; o volendone introdurre una sola, il che gio-

va talvolta, siccome vedremo, alla maggior simmetria dell' espressioni, ed anche a sollevar la memoria, deve nei diversi casi distinguersi o con un apice in alto, o con un indice numerico in basso alla destra, scrivendo per esempio A', A'', A''' ec., oppure A_1, A_2, A_3 ec. che si leggono *A prima, A seconda*, *A terza* ec.

Nozioni Preliminari

137. Si chiamano *espressioni algebriche* quelle nelle quali entrano comunque, e in qualsivoglia numero, lettere denotanti quantità; e si rappresentano con quei medesimi segni che abbiamo adoprati nell'Aritmetica, le diverse operazioni che posson farsi su queste espressioni; così per sommare a, b, si scrive $a+b$ (14); per sottrarre c da d, si scrive $d-c$ (16); per esprimer b eguale ad a si scrive $b=a$ (14). La moltiplicazione di p per q si indica con $p\times q$, o con $p.q$ (19); anzi si stima fatta quando una lettera è seguita da una o più altre senza interruzione di segni: così $pq=p\times q$, $abc=a\times b\times c$. La divisione di a per b si accenna con $\frac{a}{b}$ o con $a:b$ (30).

138. Si chiama *Monomio* o *Termine* ogni espressione non interrotta dai segni $+$, $-$. Si chiama *Binomio, Trinomio* ec. la riunione di due, tre, ec. termini; e in generale più termini riuniti diconsi *Polinomio*.

139. I termini sono o *Positivi* o *Negativi*; quelli son preceduti dal $+$, questi dal $-$, con che si indica che gli uni sono opposti agli altri nel loro modo di esistere; così se un credito si nota col $+$, un debito dovrà notarsi col $-$; se una linea che da un punto va a destra o all'insù, si riguarda come positiva: un'altra che dal punto stesso vada a sinistra o all'ingiù, dovrà riguardarsi come negativa. Quando un monomio, o il primo termine d'un polinomio non ha segno, si ha per positivo.

140. Spesso concorrono termini eguali in un polinomio, come $a+a+a-b-b+d$: allora si scrivono una sola volta: segnando con un numero a sinistra quante volte s'intendono ripetuti. Quindi $a+a+a-b-b+d$ diventa $3a-2b+d$. La ci-

fra che in tal caso precede le lettere, si chiama *Coefficiente*; se ella manchi il coefficiente è 1, che sempre in questo caso va sottinteso. I coefficienti possono essere anche frazionarj come in $\frac{3}{4}a$, $\frac{5}{2}ab$: ed indicano in tal caso che quella quantità algebrica alla quale appartengono non è presa interamente o più volte, ma nel modo bensì conforme al significato della frazione.

141. Una quantità moltiplicata per se stessa una, due, tre volte ec., come *aa*, prodotto di *a* per *a*, *aaa* prodotto di *aa* per *a* ec., si scrive una sola volta, e con una cifra a destra ed in alto si accenna quante volte ella dovrebbe effettivamente esser segnata: così a^2 è un compendio di aa, $a^3=aaa$, $a^4=aaaa$, ec. Queste cifre in alto diconsi *Esponenti*, nè bisogna confonderle coi coefficienti; i coefficienti indican somma, e gli esponenti moltiplicazione; così $3a=a+a+a$, mentre $a^3=aaa$, e se $a=5$, viene $3a=15$ ed $a^3=125$. Se l'esponente manchi, egli è l'unità, così $bc=b^1c^1$, $ab^2c=a^1b^2c^1$. Talvolta l'esponente è zero, che all'opposto degli altri indica non la ripetuta presenza, ma anzi l'esclusione assoluta della lettera che ne va affetta, di modo che il termine va valutato come se questa lettera non vi fosse. Così $3az^0$ vale per $3a$; $5z^0$ per 5, e z^0 per l'unità, suo coefficiente sottinteso. Spesso, siccome vedremo, la comparsa di questi esponenti è opera del calcolo; spesso ancora vengono introdotti per simmetria. Vi sono pure esponenti frazionarj come $3a^{\frac{1}{2}}$, e negativi come $7a^{-2}$, dei quali daremo in seguito il significato.

142. Si dicon *simili* i termini con le stesse lettere, ed ognuna con lo stesso esponente: tali sarebbero a^3b^2c, $-5a^3b^2c$, $\frac{1}{4}a^3b^2c$, come pure $\frac{a^2b}{2c^2d}$, $\frac{3a^2b}{2c^2d}$, $-\frac{4a^2b}{3c^2d}$, e allorché hanno luogo più termini simili in un medesimo polinomio si riducono tutti in un solo, apponendogli per nuovo coefficiente o la somma dei loro coefficienti se son tutti positivi o negativi, o la differenza fra le somme dei positivi e dei negativi, quando ve ne sieno dell'una specie e dell'altra. Così $a^3b^2c+3a^3b^2c+5a^3b^2c=9a^3b^2c$; $2a^5b^3c^2-3a^5b^3c^2-4a^5b^3c^2+8a^5b^3c^2=$

$10a^5b^3c^2-7a^5b^3c^2=3a^5b^3c^2$. Parimente $q^2+3y+4q^2-8y=5q^2-5y$; $\frac{1}{4}m^2n-\frac{3}{4}p^3+c-\frac{5}{8}p^3+p^3+\frac{3}{4}m^2n=(63)m^2n-\frac{5}{8}p^3+c$. Talvolta la somma dei coefficienti positivi eguaglia quella dei negativi; in tal caso il coefficiente del nuovo termine sarebbe zero, cioè il termine svanisce, nè ha luogo nell' espressione ridotta. Così $8a^2+7c+a^2-9a^2-7c=0$..

143. Oltre le lettere, gli esponenti ed i coefficienti, si distinguono nei termini algebrici anche le *dimensioni*, che corrispondono al numero delle lettere eguali o ineguali contenute in ciascun termine. Così $4z$, $3a$ sono della prima dimensione; $5yz$, $3a^2$ sono della seconda; a^3, y^2z, xyz della terza, ec. Spesso però nel determinare la dimensione non si ha riguardo che ad alcune delle lettere: così ay^2z che sarebbe per se medesimo della quarta dimensione, divien della terza relativamente alle sole lettere y, z.

144. Allorchè non si ha riguardo che ad una, o ad alcune delle lettere componenti un termine, tutte le quantità sì numeriche che algebriche che le accompagnano, prendono per estensione il nome di *coefficiente*; se non che, per non confonderlo col semplice coefficiente numerico, gli si appone, occorrendo, l'aggiunto *totale*. Così in $4a^2bz$, si considera $4a^2b$ come coefficiente totale di z, e in $\frac{3y^2z}{4a}$ si considera $\frac{3}{4a}$ come coefficiente di y^2z. Le quantità che principalmente si riguardano chiamansi *principali*, le altre *secondarie*. I termini che hanno le stesse lettere principali, respettivamente affette degli stessi esponenti si considerano come simili (142), comunque abbian diverse le lettere secondarie. Così in $a+4ay^2z-5by^2z$ i due ultimi termini son simili rapporto ad y^2z. Per ridurgli si raccolgono e si includono dentro parentesi i coefficienti totali coi loro segni, e al di fuori si pongono le lettere principali. In tal guisa l' espressione precedente diverrà $a+(4a-5b)y^2z$.

145. Del pari quando in un monomio o in un polinomio non si ha riguardo che ad una lettera, come x; o a due o a tre, come x, y, o come x, y, z, il monomio o il polinomio si chiamano *funzioni di x*, *funzioni di x, y*, *funzioni di x, y, z*,

ec. Così $3ax$, $4ax^2-bx+c$ sono funzioni di x; $3xy$, $5x^2+4xy+y^2+cx+gy+p$ sono funzioni di x, y, ec. Si rappresenta in generale una funzione di x, di x, y, ec. scrivendo $\varphi(x)$, $\varphi(x,y)$, ec. oppure $f(x)$, $f(x,y)$, o similmente. Si distinguono poi con uno o più apici sopra il φ, o sopra l' f le funzioni differenti d' una lettera stessa.

146. Quando in una funzione qualunque le quantità principali si considerano come incognite, siecome accade trattandosi di equazioni, le secondarie son sempre riguardate come cognite; ma se quelle si assumono per variabili o indeterminate, le secondarie si assumono allora come costanti, o determinate.

Le funzioni sono *algebriche*, se non dan luogo che alle sei operazioni dell' Algebra elementare; *trascendenti* se contengono logaritmi, quantità esponenziali, archi di circolo, funzioni trigonometriche, differenziali, integrali, ec; *esplicite* se ci danno il valore di una variabile espressa in funzione conosciuta di un' altra, come sarebbe $y=\sqrt{(a^3-x^3)}$, oppure se una delle due variabili vi sia collegata con un'altra mediante un' equazione solubile, come $ax^2-bxy+cy^2-ab=0$; *implicite* qualora o l' equazione non sappia risolversi, o sia data in una maniera generica, alla quale non possan perciò immediatamente applicarsi le regole conosciute di soluzione: tale sarebbe l' equazione $\varphi(x,y)=0$, ove le due variabili son dunque funzioni implicite l' una dell' altra; *uniformi* quando ad ogni valore d' una delle due variabili corrisponde un differente, ma unico valore per l' altra: tale viene ad essere y nell'equazione di primo grado $y=a+bx$; *multiformi* nel caso opposto, come y nell' equazione $y^3+py^2+qy+r=0$, ove p, q, r fossero funzioni di x, nel qual caso ad ogni valore di x ne corrispondono tre per y; *infinitiformi* quando ad un sol valore di una variabile ne corrispondono infiniti per l'altra, come avverrebbe se questa rappresentasse l' arco che avesse l' altra per seno, il che si esprime scrivendo $y=arc.sen.x$; infatti sebbene un arco dato non abbia che un solo seno, infiniti sono gli archi a cui un dato seno può appartenere; *omogenee* quando tutti i loro termini hanno la medesima dimensione (143) relativamente alle quantità principali; tale è $x^2+axy+by^2$ rapporto ad x, y; *simmetriche* quando permutandosi due o più lettere fra di loro, non subiscono alcun cangiamento come $(a+b+c)^m$, $sen\ (a+b)$, ec. Infine due o più funzioni si dicon simili qualora abbiano una forma stessa, sebbene con quantità differenti, come $a+bx^2+cx^3$, e $A+Dy^2+Ey^3$; x^m ed $(x+h)^m$.

147. Un polinomio si dice *ordinato* quando tutti i suoi termini son disposti in modo che la lettera principale abbia nel primo il più grande esponente, e negli altri abbia esponenti di mano in mano sempre minori. Il maggiore esponente determina il *grado* del polinomio. Così il trinomio $y^4-3a^2y^2+by$

vedesi ordinato per y, ed è del quarto grado. Il polinomio è *completo*, quando ordinato che sia, gli esponenti della lettera principale vanno gradatamente diminuendo di una sola unità dal primo termine fino all'ultimo, nel quale la lettera ridotta all'esponente zero non comparisce (141). Tale sarebbe il quinquinomio $y^4-3ay^3+5a^2y^2+8aby-5a^3$. In tal caso è manifesto che il numero dei termini viene a superare d'un'unità il grado del polinomio o il valore del primo e massimo esponente. Così nel polinomio allegato, del quarto grado, contansi cinque termini.

È uso di seguir l'alfabeto nelle lettere di ciascun termine: così si scrive piuttosto abc che cba, piuttosto $\alpha\varkappa$ che $\varkappa\alpha$: ciò contribuisce a far meglio conoscere i termini simili.

Somma Algebrica

148. Per sommar due o più espressioni algebriche basta scriverle l'une dopo l'altre coi loro segni, e farne la riduzione se ha luogo: così la somma di cdn e $4m^2$ è $cdn+4m^2$; quella di $ab+c^3$ ed $u-t-c^3$ è $ab+u-t$; quella di $2m+3n-q$ e $q-2m-3n$ è zéro; e di $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ è $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

Sottrazione Algebrica

149. Per sottrarre una quantità da un'altra, le cangio i segni, la scrivo allato all'altra, e riduco: così sottraggo p da r scrivendo $r-p$; sottraggo m^3-n^4-g da y^3z-u^2, scrivendo $y^3z-u^2-m^3+n^4+g$, e per sottrarre $\frac{c}{d}$ da $\frac{a}{b}$, scrivo $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.

150. La necessità di cangiare i segni a tutta la quantità sottraenda in modo che i positivi divengan negativi e i negativi positivi, si dimostrerà riflettendo che se da b tolgo p ho di resto $b-p$; ma se tolgo meno di p, come per esempio $p-g$, deve restarmi tanto di più quanto di meno ho tolto, cioè $b-p+g$.

151. Si può anche ragionare in altra guisa, osservando, che se ambedue le quantità b e $p-g$ si aumentino egualmente di

$-p+g$, la differenza deve rimaner la stessa; ma la prima diviene allora $b-p+g$, l'altra $p-g-p+g=o$, dunque la differenza è $b-p+g$. Questo raziocinio farà meglio conoscere perchè togliendo $-p$ da b debba rimanere $b+p$.

152. Per indicare che una quantità è maggiore di un'altra, come per esempio che a è maggiore di b, si scrive $a>b$; per indicar che è minore si scrive $a<b$. L'espressione $a \backsim b$ rappresenta la differenza positiva delle quantità a, b, qualunque sia la maggiore.

Moltiplicazione Algebrica

153. Se un monomio debba moltiplicarsi per un altro monomio si comincerà dallo stabilire il segno che deve darsi al prodotto; su di che terremo per regola che due fattori di segno eguale danno un prodotto positivo, di segno diverso lo danno negativo, o per usar la frase ordinaria: che *più in più dà più, in meno dà meno; meno in più dà meno, in meno dà più.* Così $a\times b=ab$(137), $a\times-b=-ab$, $-a\times b=-ab$, $-a\times-b=ab$.

Ed infatti $a\times b$ significa la quantità positiva a presa o sommata b volte (19), il che porta evidentemente ad un risultamento positivo; $-a\times b$ significa la quantità negativa $-a$ presa o sommata b volte, il che non può se non che portare ad un risultamento negativo; $a\times-b$ significa la quantità positiva a tolta o sottratta b volte, il che dà di sua natura luogo a risultamento di diminuzione o negativo; infine $-a\times-b$ significa la quantità negativa $-a$ tolta o sottratta b volte, operazione con la quale si cangia altrettante volte in positiva (149), e in conseguenza dà luogo ad un risultamento positivo. Intanto si noterà di passaggio che essendo $a\times-b=-ab$, $-a\times b=-ab$, sarà $a\times-b=-a\times b$: *è dunque lecito mutare il segno ad un fattore, purchè si muti anche all'altro.*

La regola dei segni, supposta $+\times+=+$, si dimostra anche così. Voglia moltiplicarsi $(a-b)$ $(c-d)$; pongo $a-b=m$, $c-d=n$, e moltiplicate le due equazioni $a=m+b$, $c=n+d$, verrà $ac=mn+bn+dm+bd=mn+bn+dm+bd+bd-bd=(b+m)d+(d+n)b+mn-bd=ad+bc+mn-bd$; dunque $mn=(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$, come prescrive la regola.

154. Stabilito il segno del prodotto si moltiplicheranno fra

loro i coefficienti numerici dei due fattori, quindi si porranno una presso l'altra ed in ordine (147) le lettere coi respettivi loro esponenti, avvertendo, quanto a quelle che si troveranno ripetute, di segnarle una sola volta con dar loro un esponente eguale alla somma dei due primitivi. Così $3a^3b^2c \times -6a^2b = -18a^5b^3c$; $5a^qb^r \times 2a^nb^{3r}c = 10a^{q+n}b^{4r}c$. L'ultima parte della regola, quella cioè relativa alla somma degli esponenti di una lettera stessa, dipende da quanto fu già stabilito sopra (141). Infatti $a^3 \times a^5 = aaa \times aaaaa = aaaaaaaa = a^8$.

155. Dovendo moltiplicare un polinomio per un monomio, primieramente s' includerà il polinomio dentro due parentesi, e allato dell' una o dell' altra di esse si scriverà il monomio, avvertendo però che se questo sia negativo, e piaccia di scriverlo dalla parte destra, converrà fra esso e la parentesi interporre il segno della moltiplicazione (19). Anzi sarà ottima regola usar la stessa cautela qualora il fattore monomio abbia un coefficiente numerico, e voglia porsi alla destra del polinomio. Ciò fatto, la moltiplicazione s' intenderà accennata. Per eseguirla non dovremo che moltiplicare il monomio per ciascun termine del polinomio, cominciando dal primo a sinistra, e scrivendo l'un dopo l'altro i prodotti parziali, ciascuno col loro segno, il quale s' ometterà soltanto al primo prodotto, quando risulti positivo (139).

Es. I. Debbasi moltiplicare $3z^2-4a^2z+5a^3$ per $2az$ Si accennerà l'operazione scrivendo $2az\,(3z^2-4a^2z+5a^3)$, oppure $(3z^2-4a^2z+5a^3)\,2az$, o meglio $(3z^2-4a^2z+5a^3) \times 2az$. Il prodotto di $2az$ per $3z^2$, primo termine del polinomio, sarà quindi $6az^3$; per $-4a^2z$ sarà $-8a^3z^2$; per $5a^3$ sarà $10a^4z$; avremo dunque $2az(3z^2-4a^2z+5a^3) = 6az^3-8a^3z^2+10a^4z$.

Es. II. Lo stesso polinomio debbasi moltiplicare per $-5a^2z^3$. Imposteremo la moltiplicazione scrivendo $-5a^2z^3\,(3z^2-4a^2z+5a^3)$ oppure $(3z^2-4a^2z+5a^3) \times -5a^2z^3$, e quindi operando troveremo il prodotto $-15a^2z^5+20a^4z^4-25a^5z^3$.

156. Debbansi finalmente moltiplicare due polinomj. Includeremo respettivamente ciascuno dei due fattori dentro parentesi, e gli scriveremo l'uno di fianco all'altro senza interruzio-

ne di segno, e così avremo accennata l'operazione. Quindi praticando la regola data (155) moltiplicheremo ciascun termine d'un fattore per tutti i termini dell' altro, ed infine se vi saranno termini simili gli ridurremo (142). Così volendo moltiplicare $a+3c-d$ per $2a-d$; imposto l' operazione come di fianco, e moltiplico primieramente $2a$ per a, poi per $+3c$, quindi per $-d$ ed ho i tre prodotti $2a^2+6ac-2ad$. Passo al secondo termine $-d$, e lo moltiplico egualmente per a, per $+3c$, per $-d$, ed ho i prodotti $-ad-3cd+d^2$, che pongo sotto i primi in modo che i termini simili si corrispondano in colonna per comodo della riduzione. Riduco, ed ho $2a^2+6ac-3ad-3cd+d^2$. Ecco altri esempj.

$$\begin{array}{rl} & (a+3c-d)\,(2a-d) \\ \hline & 2a^2+6ao-2ad \\ & \qquad\quad -ad-3cd+d^2 \\ \hline \text{Somma} & 2a^2+6ac-3ad-3cd+d^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (a^3-2ab^2+3b^3-4a^2b)\,(a^2+2b^2-3ab) \\ \hline a^5-2a^3b^2+3a^2b^3-4a^4b \\ \quad +2a^3b^2-8a^2b^3 \qquad\qquad -4ab^4+6b^5 \\ \quad +12a^3b^2+6a^2b^3-3a^4b-9ab^4 \\ \hline a^5+12a^3b^2+a^2b^3-7a^4b-13ab^4+6b^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (a+x)\,(a-x) \\ \hline a^2+ax \\ \quad -ax-x^2 \\ \hline a^2 \qquad -x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (1+x+x^2+x^3+x^4)\,(1-x) \\ \hline 1+x+x^2+x^3+x^4 \\ \quad -x-x^2-x^3-x^4-x^5 \\ \hline 1 \qquad\qquad\qquad\qquad -x^5 \end{array}$$

157. La riduzione non può cadere sui prodotti di quei termini, ove una stessa lettera ha nell'un fattore e nell'altro il maggiore esponente, come nel primo esempio sarebbero $a^3 \times a^2$, $3b^3 \times 2b^2$. Ed infatti tutti gli altri termini del prodotto debbono, come è chiaro, aver tali lettere ad un esponente minore; quindi niuno di questi potrà esser simile a quelli (140). Questa riflessione ci sarà utile.

158. Qualora abbiansi da moltiplicare più polinomj come $y+a$, $y+b$, $y+c$, ec., scriveremo $(y+a)(y+b)(y+c)$ ec., e quindi si moltiplicheranno i due primi, poi il loro prodotto per il terzo, ec. conforme s' insegnò per lo stesso caso nell' aritmetica (24. 7°). E quì luogo è di avvertire che i polinomj, allorchè inclusi sono dentro parentesi, figurano nelle espressioni quasi fossero semplici lettere. Così posti l'uno presso l'altro, s' intendon moltiplicati tra loro; aver possono i loro esponenti, come $(a+b)^3$, il che significherebbe il prodotto di tre binomj eguali ad $a+b$; hanno i lor coefficienti, come $2(a+b)^5$, e son

positivi o negativi secondo che si trovan preceduti o dal segno $+$ espresso o sottinteso, o dal segno $-$. Ed in essi pure quando l'esponente o il coefficiente manchino, devesi sottintendere per l'uno e per l'altro l'unità.

159. Di qui intanto deriva 1°. che essendo $-(a-y)=\ldots-1(a-y)$, si avrà effettuando la moltiplicazione $-(a-y)=-a+y$, e perciò *è lecito cangiare i segni a tutti i termini di un polinomio, purchè s'includa dentro parentesi, e gli si annetta al di fuori il segno negativo*, e reciprocamente. Quindi 2°. $(a-b)(c-d)=-(b-a)\times-(d-c)$; e poichè questi due fattori negativi danno il prodotto positivo $(b-a)(d-c)$, sarà dunque $(a-b)(c-d)=(b-a)(d-c)$: perciò *dati due fattori polinomj da moltiplicarsi, sarà lecito cangiare i segni a tutti i termini dell'uno, purchè si cangino anche a quelli dell'altro*. Questa regola si estende visibilmente anche al caso che uno dei fattori sia monomio. Se si abbia un maggior numero di fattori, i segni potranno cangiarsi contemporaneamente o a due, o a quattro, o ad un qualunque numero pari di essi: ma non a tre, a cinque ec. Onde se i fattori sono in numero impari, uno almeno di essi dovrà lasciarsi coi proprj segni.

160. I rotti algebrici si moltiplicano come i numerici(66). Così $\frac{a}{b}\times\frac{4}{z}=\frac{4a}{bz}$; $\frac{c}{d}\times\frac{m+n}{p+q}=\frac{c(m+n)}{d(p+q)}=\frac{cm+cn}{dp+dq}$

Divisione Algebrica

161. Se i termini da dividersi sono ambedue monomj, si comincierà dal determinare il segno del quoziente dietro il principio, che se il dividendo ha il segno medesimo del divisore, il quoziente è positivo, se diverso il quoziente è negativo; o come suol dirsi, che $+$ *diviso per* $+$ *dà* $+$, *per* $-$ *dà* $-$; $-$ *diviso per* $+$ *dà* $-$, *per* $-$ *dà* $+$. Infatti supposto m il prodotto di a in b, onde sia 1ª. $ab=m$, e *perciò* 2ª. $-a\times-b=ab$ (153) $=m$, e 3ª. $-a\times b=-ab=-m$, dalla 1ª. si avrà $\frac{m}{b}=a$ (31. 4°.), positiva; dalla 2ª. $\frac{m}{-b}=-a$, negativa; dalla 3ª. $\frac{-m}{b}=-a$, negativa, e $\frac{-m}{-a}=b$, positiva.

162. Stabilito il segno, ecco come otterremo il quoziente. Si porrà il divisore sotto il dividendo in forma di rotto; si ridurranno i coefficienti numerici, quando si possa (57), fra loro; e infine si toglieranno le lettere comuni ai due termini se sono con esponente eguale, e se lo hanno diverso si toglieranno dal termine ove lo hanno minore, e si lascieranno nell'altro, ma con esponente eguale alla differenza dei due primitivi. Così troveremo $3a^2bc^3 : 9ab^2c^4 = \frac{a}{3bc}$; $8a^3b^5c : -4ab^5c^2 = -\frac{2a^2}{c}$; $2a^2c : 3ac = \frac{2a}{3}$. Infatti i due termini del rotto $\frac{2a^2c}{3ac}$ hanno per elementi o fattori comuni a, c: posson questi dunque togliersi dall'uno e dall'altro (52) senza alterare il rotto, che allora diviene $\frac{2a}{3}$. Così si ragioni sugli altri esempj.

163. Si osservi 1°. che se la regola precedente porti a dover togliere le lettere tutte del numeratore, nè queste abbiano alcun coefficiente numerico espresso, converrà lasciare in loro luogo il coefficiente 1, che non può in quel caso rimaner più sottinteso (140). Così $\frac{a^2b^2c}{3a^3b^3c^3}$ si farà $= \frac{1}{3abc^2}$. Avvenendo però il caso opposto non sarà necessario lasciar l'unità nel denominatore: così avendosi $\frac{2ab^2c^3}{bc^3}$ porremo $2ab$ e non $\frac{2ab}{1}$.

2°. Se la lettera comune ad ambedue i termini abbia esponenti algebrici, è in libertà di lasciarla nell'uno o nell'altro. Così in luogo di $\frac{a^m}{a^n}$ potrà scriversi a^{m-n}, oppure $\frac{1}{a^{n-m}}$. Anzi questa medesima libertà si estende pure al caso dagli esponenti numerici, purchè si avverta al segno dovuto alla lor differenza, che dovrà esser negativo quando voglia lasciarsi la lettera nel termine ov'ha l'esponente minore. (18II°.) Così si farà $\frac{3a^2bc}{4a^5c^2} = \frac{3b}{4a^3c} = \frac{3}{4}a^{-3}bc^{-1}$. Tuttociò è stabilito da ricevuta convenzione.

164. Di qui 3°. poichè $\frac{3b}{4a^3c}$ e $\frac{3a^{-3}b}{4c}$ sono equivalenti *potrà dunque trasferirsi una lettera da un termine all'altro del rotto, purchè se ne cangi il segno all'esponente*. Perciò $a^{-m} =$

$\frac{a^{-m}}{1}$ (54) $=\frac{1}{a^m}$, cioè 4°. *ogni quantità con esponente negativo rappresenta l' unità divisa per la quantità stessa con l' esponente reso positivo.* Inoltre $\frac{a^m}{a^m}=a^m \times a^{-m}=a^{m-m}=a^0$: onde 5°. *ogni quantità con l' esponente zero rappresenta il quoziente che darebbe divisa per se medesima, cioè l' unità;* il che è pienamente conforme a quanto altrove dicemmo relativamente a questi esponenti (141). Infatti se in $3az^0$ si ha $z^0=1$, è chiaro che $3az^0=3a$.

165. I polinomj si dividono come i numeri composti nell' aritmetica (35), ma prima si ordinano per una lettera stessa il dividendo e il divisore (147). Così se debbo dividere $12a^3b^2+a^2b^3-7a^4b-13ab^4+6b^5+a^5$ per $3b^3-4a^2b+a^3-2ab^2$, ordino per a, con che il dividendo diviene $a^5-7a^4b+12a^3b^2+a^2b^3-13ab^4+6b^5$, e il divisore $a^3-4a^2b-2ab^2+3b^3$.

Ciò eseguito osservo, come nella divisione numerica, quante volte il primo termine a^3 del divisore entra nel primo a^5 del dividendo, ossia divido questo per quello, ed ho $\frac{a^5}{a^3}=a^2$, che pongo per primo termine del quoziente. Quindi moltiplico questo primo termine per tutto il divisore, e con le solite regole (149) ne sottraggo il prodotto dal dividendo; il che fatto, ho di resto $-3a^4b+14a^3b^2-2a^2b^3-13ab^4+6b^5$.

Su questo resto rinnuovo coll' ordine stesso l' operazione: divido cioè il primo termine $-3a^4b$ per il solito a^3 primo termine del divisore, ed ho $\frac{-3a^4b}{a^3}=-3ab$, secondo termine del quoziente. Per esso moltiplico il divisore, sottraggo dal resto avuto il prodotto, ed ho di 2°. resto $2a^3b^2-8a^2b^3-4ab^4+6b^5$.

Proseguendo nel modo stesso, divido per il solito a^3 il primo termine $2a^3b^2$ di questo resto, ed ho $\frac{2a^3b^2}{a^3}=2b^2$, terzo termine del quoziente; e come il prodotto di questo nel divisore sottratto dal resto precedente non dà avanzo alcuno, il calcolo è terminato. Eccone per esteso il prospetto.

	$a^2-3ab+2b^2$
$a^3-4a^2b-2ab^2+3b^3$ /	$a^5-7a^4b+12a^3b^2+a^2b^3-13ab^4+6b^5$
1°. prodotto sottratto	$-a^5+4a^4b+2a^3b^2-3a^2b^3$
1°. resto	$-3a^4b+14a^3b^2-2a^2b^3-13ab^4+6b^5$
2°. prodotto sottratto	$+3a^4b-12a^3b^2-6a^2b^3+9ab^4$
2°. resto	$2a^3b^2-8a^2b^3-4ab^4+6b^5$
3°. prodotto sottratto	$-2a^3b^2+8a^2b^3+4ab^4-6b^5$
3°. resto	0

Moltiplicando il quoziente totale avuto per il divisore, torna il dato dividendo. Dunque l'operazione è sicura (31).

166. Ma volendone una più convincente ragione, si osserverà che attesa la legge già dichiarata (157), e in forza dell'aver precedentemente ordinati il divisore e il dividendo, il primo termine a^5 di questo deve risultar meramente dal primo a^3 di quello moltiplicato nel primo del quoziente. Dunque all'opposto dal divider l'un per l'altro quei due primi termini a^5, a^3 deve necessariamente nascere il primo del quoziente. E se questo si moltiplica per tutto il divisore e se ne toglie il prodotto dal dividendo, ciò che avanza sarà evidentemente il prodotto di tutto il divisore in tutta quella parte di quoziente che rimane a trovarsi. E come quest'avanzo è già ordinato per la stessa lettera del divisore, il suo primo termine goderà della proprietà medesima di quello del dividendo, cioè diviso per il primo del divisore, darà un termine del quoziente. E sottratto dall'avanzo precedente il prodotto di questo nuovo termine nel divisore, ciò che resterà sarà, come sopra, il prodotto del divisore in quanto rimane di quoziente, ec.

167. Allorchè il primo termine del divisore B ha un coefficiente μ non summultiplo di quello del primo termine del dividendo A, il quoziente ed i resti risultano frazionarj, e l'operazione riesce fastidiosissima. Potremo evitare la noia se supposto n il numero dei termini dovuto al quoziente (170), moltiplicheremo il dividendo A per μ^n, e divideremo infine per μ^n il quoziente completo ottenuto. Infatti cangiandosi il dividendo A in $A\mu^n$, crescerà pure nello stesso rapporto il quoziente: convien dunque dividerlo per μ^n, onde ridurlo al suo vero valore. D'altronde è visibile, che per natura dell'operazione e dell'ipotesi, il primo termine p_1 del nuovo quoziente risulta multiplo di μ^{n-1}: dunque altrettanto avverrà del primo resto $R_1 = A\mu^n - p_1 B$; come per eguali ragioni i successivi resti $R_2\ R_3 .. R_n$ risulteranno respettivamente multipli di μ^{n-2}, μ^{n-3} .... μ^{n-n}. Quindi niuno dei quozienti che parzialmente si ottengono dalle successive divisioni di ciascun resto per B risulterà frazionario.

Che se μ^n fosse un numero troppo grande, potremo semplicemente moltiplicare in principio A per μ, e quindi di nuovo per μ ciascuno dei resti a misura che vanno ottenendosi; se non che in luogo di divider per μ^n tutto il quoziente, dovremo allora divider per μ il primo termine, per μ^2 il secondo, ec; e l'ultimo soltanto col resto finale per μ^n. Infatti il dividendo A non essendo mol-

tiplicato che per μ, darà nella prima divisione un quoziente ed un resto soltanto μ volte più grande del vero: dunque il primo termine del quoziente non dovrà dividersi che per μ. Il resto nuovamente moltiplicato per μ diverrà μ^2 volte più grande del giusto, e darà del pari un quoziente ed un resto μ^2 volte maggiore del vero: il secondo termine del quoziente dovrà dunque dividersi per μ^2; e così per le stesse ragioni dovranno dividersi respettivamente per μ^3, μ^4, ec. i quozienti successivi, e per μ^n il resto finale.

168. Osserv. I. Il prodotto del divisore per le quantità che si vanno volta per volta segnando in quoziente, può dar luogo a qualche termine non simile a veruno di quelli che si trovano o nel dividendo o nei resti. Questo si porrà allora di seguito o all' uno o agli altri in ultimo luogo; ma continuando la divisione si avvertirà di considerarlo come primo, qualora la lettera per cui si è ordinato, abbia in esso un esponente maggiore che negli altri. Si veda l'esempio quì apposto.

$$\begin{array}{llll}
 & \multicolumn{3}{l}{|\ a^2-am+m^2} \\
a+m\ / & a^3+m^3 & & \\
 & -a^3 & -a^2m & \\
1^{o}.\ \text{resto} & 0+m^3 & -a^2m & \\
 & & +a^2m & +am^2 \\
2^{o}.\ \text{resto} & +m^3 & 0 & +am^2 \\
 & -m^3 & & -am^2 \\
 & 0 & & 0
\end{array}$$

169. II. Allorchè il dividendo non è realmente un multiplo del divisore, i termini si riproducono in infinito, nè può aversi esatto il quoziente. Ma dovunque l'operazione si tronchi, dovrà sempre aggiungersi alla destra del quoziente l'ultimo resto con sotto il divisore (30). Così $\frac{1}{1+a^2}=1-a^2+a^4-a^6+\frac{a^8}{1+a^2}$.

170. III. Allorchè il dividendo è più grande del divisore, il che s'intende aver luogo quando il massimo esponente della lettera ordinatrice è maggiore nel primo che nel secondo, l'operazione per lo più si prende come terminata, subitochè s'incontri un resto più piccolo del divisore, o nel quale il massimo esponente della lettera ordinatrice sia minore almeno di un' unità che nel divisore. Cosicchè se questa lettera non oltrepassi nel divisore la prima potenza, l'ultimo resto, o quello a cui potremo arrestarci, non dovrà contenerla. E se i massimi esponenti del dividendo e del divisore differiscano di una, due, o n unità, il quoziente sarà di due, di tre, o di $n+1$ termini.

171. Se la lettera ordinatrice abbia coefficienti algebrici (144), l'operazione può divenire assai più laboriosa, in quanto

che la riduzione dei termini simili, che ha luogo appena fatta la sottrazione dei prodotti, può spesso esigere l'applicazione del metodo accennato al num. 144, con che cangiandosi in polinomj i nuovi coefficienti dei resti, il calcolo successivo perde infinitamente della sua naturale facilità. Se ne prenderà agevolmente un' idea dall'esempio, benchè semplicissimo, che quì di fianco poniamo. Vero è che con qualche piccola industria la complicazione può molto diminuirsi. Eccone un saggio nella ricerca seguente, la quale è d' altronde per se medesima di grande importanza; ed avremo occasione di farne assai buon uso in appresso.

$$
\begin{array}{rl}
 & x+A-a \\
\hline
x+a \,/ & x^2+Ax+b \\
 & -x^2-ax \\
 & 0 \quad x(A-a)+b \\
 & -x(A-a)-a(A-a) \\
\hline
 & b-a(A-a)
\end{array}
$$

Debba dividersi per $x-a$ il polinomio $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+$ ec.. $+Tx^2+Zx+\Omega$, ordinato per x e completo, e in conseguenza con $m+1$ termini (147). In luogo di operare col metodo precedente, che in questo caso riescirebbe complicatissimo, se per comodo di calcolo, avuto il primo termine del quoziente e il primo resto, si ponga A_1 in luogo di $a+A$, ottenuto il secondo si ponga A_2 in luogo di aA_1+B, ottenuto il terzo si ponga A_3 in luogo di aA_2+C, e così successivamente A_4 in luogo di aA_3+D, A_5 in luogo di aA_4+E, otterremo in primo luogo in quoziente $x^{m-1}+A_1x^{m-2}+$.. $A_2x^{m-3}+A_3x^{m-4}+$ ec, ... $+\frac{A_m}{x-a}$, ove abbiamo posto A_m per numeratore del rotto, ossia per resto finale della divisione (30), in quanto che nei casi particolari di $m=1$, $m=2$, $m=3$, ec. si troverà, come può agevolmente verificarsi, essere A_1, A_2, A_3 ec.; d'onde è manifesto che nel caso di m qualunque, sarà legittimamente rappresentato con A_m.

Ciò fatto per passare dal quoziente così avuto a quello che ottenuto si sarebbe usando il metodo di divisione ordinario, altro non resterà che trovare e restituire in luogo delle quantità A_1, A_2, A_3 ec. introdotte ausiliarmente, i loro effettivi valori. Ora poichè abbiamo posto A_1 in luogo di $a+A$, sarà dunque $A_1=a+A$, come per la stessa ragione $A_2=aA_1+B$, $A_3=aA_2+C$, ec: e poichè A_1 entra nel valore di A_2, A_2

in quello di A_3 ec., sostituendo gli uni negli altri questi valori ed effettuando le convenienti moltiplicazioni, avremo

$$A_1 = a + A$$
$$A_2 = aA_1 + B = a(a+A) + B = a^2 + aA + B$$
$$A_3 = aA_2 + C = a(a^2 + aA + B) + C = a^3 + a^2A + aB + C$$
$$A_4 = aA_3 + D = a(a^3 + a^2A + aB + C) + D = a^4 + a^3A + a^2B + aC + D$$

valori di cui è assai chiaro l' andamento, e che facilmente possono continuarsi a piacere, anche senza aiuto di calcolo, attesa appunto la legge manifesta con cui procedono, osservandovisi 1°. che tutti sono ordinati per a; 2°. che il massimo esponente di a corrisponde in ciascuno all'indice da cui sono respettivamente affette le A; 3°. che i coefficienti di A, B, C, D ec. sono gli stessi e in egual modo disposti che quelli del polinomio dato, e ne sono uno in A_1, due in A_2, tre in A_3, di maniera che può concludersi che continuando si troverebbe

$$A_5 = a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$$
$$A_6 = a^6 + Aa^5 + Ba^4 + Ca^3 + Da^2 + Ea + F$$
ec. ec.

Ed anzi potremo anche giungere fino ad assegnare la forma del resto finale A_m, che secondo le precedenti leggi dovrà cominciare con a^m, avere $m+1$ termini, quanti perciò ne ha il polinomio dato, e quindi tutti i coefficienti A, B, C ec. del medesimo, dal primo A fino all'ultimo Ω. Sarà dunque $A_m = \ldots$ $a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + Ca^{m-3} +$ ec. $+ Ta^2 + Za + \Omega$, cioè lo stesso che il dividendo dato, cangiatovi x in a.

172. Spesso è dato un prodotto che bisogna risolvere nei suoi fattori. Quando uno di questi sia monomio si ritroverà facilmente osservando ciò che ciascun dei termini ha di comune cogli altri, sia nei fattori dei coefficienti, sia nelle lettere e loro respettivi esponenti. Così in $9a^3b^3 - 18a^2b^5 + 15a^4b^4 - 3a^2b^3$ vedo che ogni coefficiente è multiplo di 3, e che in ciascun termine è contenuto il prodotto a^2b^3. Concludo che $3a^2b^3$ è fattore di tutta l'espressione. Divido allora per $3a^2b^3$, ed ho per l'altro fattore $3a - 6b^2 + 5a^2b - 1$. Sarà dunque il polinomio dato $= 3a^2b^3\,(3a - 6b^2 + 5a^2b - 1)$, come può verificarsi eseguendo la moltiplicazione. Ma se ambedue i fattori son polino-

mj, non vi è regola generale per rintracciarli: insegneremo altrove come possano aversi in certi casi più semplici.

Talvolta il metodo precedente di riduzione è applicabile ad una sola parte del polinomio; ed allora si eseguisce ove si può, lasciando il resto nello stato suo primitivo. Così il fattore già avuto $3a-6b^2+5a^2b-1$ si cangia in $a(3+5ab)-6b^2-1$; quindi tutta la data espressione potrà ridursi a $3a^2b^3(a(3+5ab)-6b^2-1)$. Queste forme sono nei più dei casi assai comode, e sempre eleganti e preferite, specialmente se si tratti di risultamenti finali.

173. La divisione dei rotti algebrici per interi o per altri rotti, o d'un intero per un rotto, si eseguisce come nei numeri (70): così si divide $\frac{m}{n}$ per $\frac{s}{t}$ scrivendo $\frac{mt}{ns}$: si divide $\frac{b}{c}$ per $4m$ scrivendo $\frac{b}{c.4m}=\frac{b}{4cm}$; si divide x per $\frac{p}{q}$ scrivendo $\frac{qx}{p}$; si divide $\frac{a-x}{b-x}$ per a scrivendo $\frac{a-x}{a(b-x)}$. E qui osserverò di passaggio che potendo farsi (159), $a-x=-(x-a)$, $b-x=-(x-b)$, sarà $\frac{a-x}{a(b-x)}=\frac{-(x-a)}{-a(x-b)}=(161)\ \frac{x-a}{a(x-b)}$; e perciò *in qualunque rotto algebrico potremo cangiare i segni del numeratore o di un suo fattore qualunque, purchè si cangin quelli del denominatore o di uno qualunque dei suoi fattori.*

174. Questi rotti si riducon poi all'espressione più semplice decompouendo nei loro fattori il dividendo e il divisore e togliendone i comuni ad ambedue (57): così, poichè $x^2+px=x(x+p)$, e $bmx+bmp=bm(x+p)$, sarà $\frac{x^2+px}{bmx+bmp}=\ldots\ldots$ $\frac{x(x+p)}{bm(x+p)}=\frac{x}{bm}$.

175. Può ancor farsi uso della regola del massimo comun divisore (58). Ma per applicarla con maggior facilità avverto, che delle due quantità proposte posso dividere o moltiplicar l'una per qualunque quantità che non abbia alcun divisor comune coll'altra; ciò, come è chiaro, non altera il divisor cercato, che per ipotesi deve esser comune ad ambedue. Sia il rotto $\frac{B}{A}=\frac{12x^2-15ax+3a^2}{6x^3-6ax^2+2a^2x-2a^3}$; osservo 1°, che B può dividersi per 3 ma non A, e A per 2 ma non B; divido dunque o

viene $\frac{B_1}{A_1}=\frac{4x^2-5ax+a^2}{3x^3-3ax^2+a^2x-a^3}$: 2°. che per poter dividere A_1 per B_1 giusta il metodo (58), tornerebbe assai comodo moltiplicar A_1 per 16 (167), e ciò può farsi, giacchè 16 non ha alcun divisor comune con B_1; moltiplico dunque, e poi dividendo resta $R_1=19a^2x-19a^3$: 3°. che R_1 può dividersi per $19a^2$, ma non B_1; divido dunque, ed R_1 si cangia in $x-a$, per cui dividendo B_1, nulla avanza; dunque $x-a$ è il massimo comun divisore del rotto dato che ridotto diviene $\frac{12x-3a}{6x^2+2a^2}$.

176. Fatto $x=a$, il rotto proposto si riduce a $\frac{0}{0}$, mentre il rotto ridotto si cangia in $\frac{9}{8a}$. Sarà dunque in questo caso $\frac{0}{0}=\frac{9}{8a}$. In generale la forma di $\frac{0}{0}$ che prende un rotto qualunque $\frac{P}{Q}$ quando si dà ad x un valor particolare a, indica che i termini P, Q hanno per comun fattore $x-a$. Potremo dunque dividergli per $x-a$, e formato il nuovo rotto equivalente $\frac{P_1}{Q_1}$, da questo fattovi $x=a$, avremo il valore coerente in ciascun caso all'espressione $\frac{0}{0}$. Che se $x=a$ riduce a $\frac{0}{0}$ anche $\frac{P_1}{Q_1}$, concluderemo che $x-a$ è rimasto fattore anche di P_1, Q_1, e che era perciò due volte almeno ripetuto in P ed in Q. Potremo dunque o dividere per $(x-a)^2$ il rotto primitivo, o rinnuovare sopra $\frac{P_1}{Q_1}$ l'operazione fatta sopra $\frac{P}{Q}$, il che continueremo pure sui rotti successivi finchè avrà luogo il medesimo caso.

Es. I. Sia $\frac{P}{Q}=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ che diviene $\frac{0}{0}$ quando $x=1$. Fatta la divisione per $x-1$ si ha $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{x-2}{x+1}$, che $x=1$ cangia in $-\frac{1}{2}$.

Es. II. Sia $\frac{P}{Q}=\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ che $x=a$ cangia in $\frac{0}{0}$. Poichè (221) $x^m-a^m=ma^{m-1}(x-a)+m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}(x-a)^2+$ ec. ... $+(x-a)^m$; sarà $P_1=\frac{x^m-a^m}{x-a}=ma^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}(x-a)+$ ec. ... $+(x-a)^{m-1}$, che fatto $x=a$, diviene ma^{m-1}. Nel modo stesso Q_1 fatto $x=a$, diverrà na^{n-1}, e quindi avremo per il valor cercato $\frac{m}{n}a^{m-n}$.

Es. III. Sia $\frac{P}{Q}=\frac{x^3-3x^2+4}{x^4-17x^2+36x-20}$ che diviene $\frac{0}{0}$ con $x=2$. Fatta la divisione per $x-2$, ho $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{x^2-x-2}{x^3+2x^2-13x+10}$, che $x=2$ riduce parimente a $\frac{0}{0}$. Divido di nuovo, ed ho $\frac{x+1}{x^2+4x-5}$, che con $x=2$ dà $\frac{3}{7}$.

177. Può accadere che il fattore $x=a$ sia più volte ripetuto in P che in Q, o viceversa; ed allora questo fattore rimanendo necessariamente o nel numeratore o nel denominatore del rotto finale, renderà $\frac{0}{0}$ eguale a zero o all' infinito. L'espressione $\frac{0}{0}$ è dunque per se stessa vaga e capace di un' infinità di valori secondo la diversa natura del rotto da cui deriva, e può esser finita, nulla ed infinita; e nel solo caso di $P=Q$ eguaglia l'unità. Del resto il metodo che abbiamo indicato per determinarne il valore non è applicabile, nè da seguirsi se non qualora sia possibile o comodo di effettuare la necessaria divisione. Il calcolo differenziale supplisce con le sue regole negli altri casi.

Decomposizione dei rotti algebrici razionali

178. Abbiasi un numero m di rotti della forma $\frac{A}{x-f}$, $\frac{B}{x-g}$, $\frac{C}{x-h}$, ec., o dell'altra $\frac{A}{(x-a)^m}$, $\frac{B}{(x-a)^{m-1}}$, $\frac{C}{(x-a)^{m-2}}$ ec. coi numeratori A,B,C, ec. costanti cioè indipendenti da x, e $\frac{P}{Q}$ ne rappresenti la somma. È chiaro che nel primo caso avremo $Q=(x-f)(x-g)(x-h)$ ec.; nel secondo $Q=(x-a)^m$; e nell'un caso e nell'altro il numeratore P sarà un polinomio di m termini della forma $Gx^{m-1}+Hx^{m-2}+Kx^{m-3}+$ ec., ove 1°. la massima dimensione di x sarà di un' unità almeno minore che in Q, e perciò il rotto potrà chiamarsi proprio rapporto ad x; 2°. il numero dei termini, e quindi quello dei lor coefficienti G, H, K ec. non potrà eccedere il numero m dei rotti dati, o dei numeratori A, B, C ec.; 3°. nella composizione di questi coefficienti non entreranno che i numeratori A, B, C ec., con le quantità f, g, h, ec. nel 1°. caso, e con m e le diverse potenze di a nel 2°.

179. All'opposto un rotto razionale e noto $\frac{P}{Q}$, proprio rapporto ad x, potrà sempre evidentemente decomporsi in rotti parziali o della prima o della seconda forma o dell'una insieme e dell'altra, secondo che i fattori semplici, ossia di primo grado, in Q saranno o tutti ineguali, o tutti eguali, o in parte ineguali e in parte eguali. Determinati, quando riesca, questi fattori si avranno così tutti i denominatori dei rotti di cui trattiamo, e quanto ai loro numeratori, comecchè indipendenti da x, potremo sempre conoscergli col metodo dei coefficienti indeterminati, riducendo prima tutti i rotti al comun denominatore Q, togliendo quindi Q dai due membri dell'equazione, trasportando e collocando nelle relative colonne ciascun termine di P, ed eguagliando infine ciascuna colonna a zero.

Ma nei più dei casi sarà più comodo il metodo seguente. Abbiasi in primo luogo $Q=(x-f)(x-g)(x-h)$ec. prodotto di fattori semplici tutti ineguali. Porremo $\frac{P}{Q}=\frac{A}{x-f}+\frac{B}{x-g}+\frac{C}{x-h}$ ec. e per determinare A numeratore del 1°. rotto

$\frac{A}{x-f}$, si rappresenti con $\frac{R}{S}$ la somma dei rotti rimanenti; sarà $S=(x-g)(x-h)$ ec., $Q=S(x-f)$, e quindi $\frac{P}{Q}=\frac{P}{S(x-f)}=\frac{A}{x-f}+\frac{R}{S}$; d'onde infine $A=\frac{P}{S}-\frac{R(x-f)}{S}$. Or poichè A è indipendente da x, il primo membro di quest'ultima equazione si conserverà lo stesso qualunque valore particolare sia dato ad x nel secondo. Pongasi dunque $x=f$ e sia $\frac{P_1}{S_1}$ il nuovo valore che prende allora $\frac{P}{S}$. È evidente che in questo caso e quindi in tutti gli altri si avrà $A=\frac{P_1}{S_1}$. Nel modo stesso determineremo B ponendo $S=(x-f)(x-h)$ ec. ed $x=g$; C ponendo $S=(x-f)(x-g)$ ec. ed $x=h$, ec.. Così dato il rotto $\frac{2x-3}{x^3-x^2-2x}$ avremo $P=2x-3$, ed x, $x-2$, $x+1$ per fattori di Q; porremo dunque $\frac{P}{Q}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$, e quindi per conoscere A, faremo $S=(x-2)(x+1)$, e posto $x=0$ in P ed in S, avremo $P_1=-3$, $S_1=-2$ ed $A=\frac{3}{2}$. Per B sarà $S=x(x+1)$, e fatto $x=2$ si avrà $P_1=1$, $S_1=6$, e $B=\frac{1}{6}$; finalmente per C sarà $S=x(x-2)$ e fatto $x=-1$ avremo $P_1=-5$, $S_1=3$ e quindi $C=-\frac{5}{3}$. Sarà dunque $\frac{2x-3}{x^3-x^2-2x}=\frac{3}{2x}+\frac{1}{6(x-2)}-\frac{5}{3(x+1)}$, come può verificarsi con la somma. Nel modo stesso troveremo $\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x+2)}=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{x+2}$.

180. Oltre i fattori ineguali $x-f$, $x-g$, ec. abbia Q uno, o più fattori delle forme $(x-a)^m$, $(x-b)^n$, ec. prodotti di m fattori eguali ad $x-a$, di n eguali ad $x-b$ ec. Porremo $\frac{P}{Q}=\frac{A}{x-f}+\frac{B}{x-g}+$ ec. $+\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots\frac{A_3}{(x-a)^{m-2}}+$ ec. $\frac{B_1}{(x-b)^n}+\frac{B_2}{(x-b)^{n-1}}$ ec.: si determinino col metodo precedente i numeratori della prima serie, ossia con denominatori ineguali, e passando quindi a quelli della serie seconda, si rappresenti con $\frac{R}{S}$ la somma di tutti quelli dell' altre due; sarà $S=(x-g)(x-f)\ldots\times(x-b)^n$, $Q=S(x-a)^m$, e $\frac{P}{Q}=\frac{P}{S(x-a)^m}=\frac{R}{S}+\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{m-2}}+$ ec. Di qui $\frac{P}{S}=\frac{R(x-a)^m}{S}+$

$A_1 + A_2(x-a) + A_3(x-a)^2 +$ ec., ed A_1 sarà evidentemente ciò che divien $\frac{P}{S}$ quando vi si pone $x=a$. Conosciuta in tal guisa A_1, si trasporti nel primo membro, che diverrà allora $\frac{P-A_1S}{S}$; e poichè il secondo resta tutto multiplo di $x-a$, dovrà $P-A_1S$ esser divisibile per $x-a$. Fatta la divisione e chiamato P_1 il quoziente, avremo $\frac{P_1}{S} = \frac{R(x-a)^{m-1}}{S} + A_2 + A_3(x-a) +$ ec. e sarà A_2 ciò che diviene $\frac{P_1}{S}$ quando vi si ponga $x=a$. Trasportando nel modo stesso A_2, e cangiato così in $\frac{P_1-A_2S}{S}$ il primo membro dell'ultima equazione, dovrà P_1-A_2S poter dividersi esso pure per $x-a$; e fatta la divisione e chiamato P_2 il quoziente sarà A_3 ciò che diviene $\frac{P_2}{S}$ posto $x=a$: e così continuando determineremo A_4, A_5 ec. Col metodo stesso, ripetute le medesime operazioni, troveremo B_1, B_2 ec.

Sia $\frac{P}{Q} = \frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}$. Decompongo questa frazione in $\frac{A}{x} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1}$; sarà intanto $P=x^3+x^2+2$; e per determinare A fatto $S=(x-1)^2(x+1)^2$ ed $x=0$ in P ed in S avremo $P=2$, $S=1$ ed $A=2$. Per determinare A_1 ed A_2 faremo $S=x(x+1)^2$, $Q=S(x-1)^2$, e $\frac{P}{Q} = \frac{P}{S(x-1)^2} = \frac{R}{S} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1}$, d'onde $\frac{P}{S} = \frac{R(x-1)^2}{S} + A_1 + A_2(x-1)$; e fatto $x=1$ in P ed S avremo $P=1$, $S=4$ ed $A_1=1$. Dunque $P-AS = x^3+x^2+2-x(x+1)^2$, quantità che ridotta e divisa per $x-1$, darà $P_1=-x-2$, onde $\frac{P_1}{S} = \frac{-x-2}{x(x+1)^2}$. Di qui fatto $x=1$ avremo $A_2=-\frac{3}{4}$. Per determinare B_1, B_2 faremo $S=x(x-1)^2$, e quindi $\frac{P}{S} = \frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2}$, che posto $x=-1$ dà $B_1=-\frac{1}{2}$; dunque $P-B_1S = \frac{1}{2}(3x^3+x+4)$, che diviso per $x+1$ dà $P_1 = \frac{1}{2}(3x^2-3x+4)$. Dunque $\frac{P_1}{S} = \frac{3x^2-3x+4}{2x(x-1)^2}$, e di qui, fatto $x=-1$, avremo $B_2=-\frac{5}{4}$.

181. Abbia in terzo luogo Q dei fattori di secondo grado della forma $x^2+\ldots mx+n$. Ciascun di questi essendo decomponibile in due fattori di primo grado il caso attuale potrebbe senza difficoltà riguardarsi come incluso nei due precedenti. Ma per render più semplice il calcolo pongasi $x=z-\frac{m}{2}$ nel dato rotto $\frac{P}{Q}$; il fattore

di cui si parla prenderà la forma di z^2+b che decomposto nei due $z+\sqrt{-b}$, $z-\sqrt{-b}$, darebbe luogo ai due rotti $\frac{K}{z+\sqrt{-b}}$, $\frac{K_1}{z-\sqrt{-b}}$. In luogo d'introdurre questi due rotti fra gli altri che compongono il valore di $\frac{P}{Q}$, si ponga la loro somma la quale evidentemente avrà la forma di $\frac{Az+B}{z^2+b}$. Chiamata al solito $\frac{R}{S}$ quella dei rotti rimanenti, avremo $\frac{P}{Q}=\frac{R}{S}+\frac{Az+B}{z^2+b}$, d'onde per esser $Q=S(z^2+b)$, verrà $\frac{P}{S}=\frac{R}{S}(z^2+b)+Az+B$. Fatto quindi $z=\pm\sqrt{-b}$ e supposti $M\pm N\sqrt{-b}$, $T\pm U\sqrt{-b}$ i valori che in tal caso prendono P ed S avremo le due equazioni $\frac{M\pm N\sqrt{-b}}{T\pm U\sqrt{-b}}=B\pm A\sqrt{-b}$, le quali daranno $A=\frac{NT-MU}{T^2+U^2b}$, $B=\frac{MT+bNU}{T^2+U^2b}$. Che se il fattore x^2+mx+n sia p volte ripetuto, onde si abbia $Q=S(x^2+mx+n)^p$ porremo $\frac{P}{Q}=\frac{R}{S}+\frac{Az+B}{(z^2+b)^p}+\frac{A_1z+B_1}{(z^2+b)^{p-1}}+$ ec., d'onde $\frac{P}{S}=\frac{R(z^2+b)^p}{S}+Az+B+(A_1z+B_1)(z^2+b)+$ ec.; e quanto ad A, B si determineranno come sopra con porre $z=\pm\sqrt{-b}$; quanto poi ad A_1, B_1 si avranno dividendo per z^2+b il rotto $\frac{P-S(Az+B)}{S}$ e di nuovo facendo $z=\pm\sqrt{-b}$. Nel modo stesso si determineranno A_2, B_2 procedendo in tutto e per tutto conforme a quanto abbiamo praticato di sopra (180). Ma in tali casi le applicazioni numeriche riescon fastidiosissime: vedremo come il calcolo differenziale dà il modo di facilitarle.

Potenze e Radici

182. Il prodotto di qualsivoglia quantità moltiplicata una o più volte in se stessa si chiama *potenza*. Così sono potenze a^2, a^3, a^m; come pure lo sono a^{-2}, a^{-3}, a^{-m}, modi di scrivere per convenzione equivalenti, come sappiamo (163 2°.), ad $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^m}$, e che rappresentano i prodotti d'una, di due, di m frazioni tutte eguali ad $\frac{1}{a}$. La quantità, che moltiplicata in se stessa dà

la potenza si chiama *radice*. La potenza è del *secondo, terzo*, m^{simo} *grado*, o *seconda*, *terza*, m^{sima} secondo il numero dei fattori eguali dal cui prodotto risulta; e la radice è pure *seconda*, *terza*, m^{sima} secondo il grado della potenza a cui appartiene. Le potenze seconda e terza si chiamano ancora *quadrato* e *cubo*, e le corrispondenti radici, *radice quadra*, *radice cuba*; anzi la radice quadra si chiama semplicemente *radice*.

183. Sia dunque da inalzarsi ad una qualunque potenza m un qualsivoglia monomio, come $3a^2b^3c^{-1}$, il che si accenna scrivendo $(3a^2b^3c^{-1})^m$. Ciò che in questo caso si cerca è dunque un prodotto di m fattori tutti eguali a $3a^2b^3c^{-1}$. Or già sappiamo che questo risulterà dal prodotto di un numero m di 3 che potremo accennare con 3^m, e dai prodotti di un egual numero m di a^2, di b^3, di c^{-1}, che secondo le note regole di moltiplicazione corrispondono ad a^{2m}, b^{3m}, c^{-m} (154). Dunque $(3a^2b^3c^{-1})^m = 3^m a^{2m}b^{3m}c^{-m}$; onde *un monomio s'inalza alla potenza* m *moltiplicandone per* m *ciascuno degli esponenti*.

184. Tutto questo però vale interamente se la radice o monomio dato sia positivo. Che se la radice è negativa conviene ancora attendere al segno che dovrà aver la potenza. Su di che terremo queste regole generali: 1.° *le potenze di grado pari son sempre positive*, poichè risultano da un numero pari di fattori eguali, ed ogni coppia di questi, anche negativi, dà sempre un prodotto positivo (153); 2°. *le potenze di grado impari son negative, se è negativa la radice*, poichè l'ultimo dei fattori cangia in negativo il prodotto positivo dei precedenti. Così $(-2a^5b)^2 = 4a^{10}b^2$, e $(-2a^5b)^3 = -8a^{15}b^3$.

185. Può frattanto osservarsi di passaggio che essendo $(ab)^m = a^mb^m$, ed $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, perciò 1°. *moltiplicando o dividendo due potenze di egual grado, il prodotto e il quoziente sono due nuove potenze del medesimo grado* Così i quadrati 64 e 4 moltiplicati danno 256 quadrato di 16; prodotto di 8 per 2, radici di 64 e di 4; divisi danno 16 quadrato di 4, quoziente delle due radici 8, 2. Reciprocamente 2°. *La potenza* m^{sima} *di un prodotto eguaglia il prodotto delle potenze* m^{sime}

dei fattori. Così $(ax+x^2)^3=x^3(a+x)^3$; e 3°. *la potenza* m^{sima} *di un quoziente eguaglia la* m^{sima} *potenza del dividendo, divisa per quella del divisore*: così $\left(\frac{a+z}{2z}\right)^2=\frac{(a+z)^2}{4z^2}$.

186. In un modo affatto opposto all' inalzamento a potenza si fa l'estrazione *della radice*, cioè quell'operazione colla quale, data una potenza, cercasi la radice da cui deriva. Ed è infatti evidente che se per inalzare alla potenza m, si moltiplicano gli esponenti per m, dovremo dunque dividergli per la stessa m, se vogliamo ritornare dalla potenza alla radice. E quanto al segno, in forza del già detto di sopra (184), la radice riterrà quello della potenza, se questa sia di grado impari; nel caso opposto potrà essere egualmente positiva o negativa, onde dovremo apporle il doppio segno $\pm$, qualora una qualche estrinseca condizione non escluda l'uno dei due. Del resto l'estrazion di radice si accenna facendo preceder la potenza data dal simbolo *radicale* $\sqrt{\ }$, in seno al quale si pone il numero corrispondente al grado in cui è supposta esser la potenza, se pur non si tratta di potenza seconda, nel qual caso nulla si pone. Così i radicali $\sqrt{a^6b^{12}}$, $\sqrt[3]{a^6b^{12}}$, $\sqrt[5]{-a^5}$ indicano le radici seconda e terza di a^6b^{12} e quinta di $-a^5$; onde applicate le prescritte regole, avremo $\sqrt{a^6b^{12}}=\pm a^3b^6$, $\sqrt[3]{a^6b^{12}}=a^2b^4$, $\sqrt[5]{-a^5}=-a$.

187. In generale $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. Ora se a^m è una vera potenza n^{sima}, l'esponente m dovrà necessariamente esser multiplo d'n (183); quindi il rotto $\frac{m}{n}$ non sarà che apparente e l'espressione $a^{\frac{m}{n}}$ si ridurrà ad una di quelle già contemplate (183), di cui sappiamo il significato e il valore. In caso diverso l'esponente $\frac{m}{n}$ si manterrà frazionario, ed $a^{\frac{m}{n}}$ servirà ad indicare una radice n^{sima} che dovrebbe estrarsi da a^m, ma che non può estrarsi, almeno esattamente, in quanto che a^m non è potenza dell' n^{simo} grado. Si è dato il nome d' *incommensurabili, sorde* o *irrazionali* alle radici di quest' ultima qualità; mentre le precedenti si chiamano *commensurabili* o *razionali*.

188. Ma benchè le radici di tal natura sieno inassegnabili, non per altro la loro esistenza ripugna, nè debbono supporsi escluse dall'ordine delle quantità. Infatti posto che dal dividere m per n si abbia p di quoziente ed r di resto, sarà (30) $\frac{m}{n}=p+\frac{r}{n}$, quantità che essendo $>p$ e $<p+1$ (30) dà dunque $a^{\frac{m}{n}}>a^p$ e $<a^{p+1}$, cioè la radice $a^{\frac{m}{n}}$ si trova fra a^p ed a^{p+1}, e quindi ha innegabilmente un'esistenza reale. Vedremo in breve come possa aversene il valore approssimato quanto si voglia.

189. Non così del radicale $\sqrt[m]{-a^n}$ quando m è pari: poichè se non può esistere e per natura ripugna una potenza pari negativa (184.1°.), sarà del pari insussistente e ripugnerà la sua radice, nè potrà in modo veruno annoverarsi fra le quantità, qualunque ne sia il genere, l'ordine e la grandezza. A radicali di tal natura è stato attribuito il nome di *immaginarj* in opposizione alle quantità esistenti o possibili, che tutte si chiamano *reali*. E siccome il loro simbolo mentisce l'aspetto di una vera quantità, perciò l'Algebra gli assoggetta indistintamente ai suoi calcoli, e vedremo come ne trae un eccellente partito per denotare o l'assurdità di un principio o l'incoerenza di una capricciosa condizione, che sia malamente stata presa per ammissibile e vera. Ecco frattanto alcune delle regole da tenersi tanto rapporto ai radicali irrazionali, che agl' immaginarj.

190. Poichè $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$ (186) $=a^{\frac{n}{mn}}=\sqrt[mn]{a^n}$, perciò *un radicale del grado* m *si riduce al grado* mn, *purchè si alzi alla potenza* n *la quantità sotto il segno*, e viceversa. Così . . . $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[6]{a^4b^2}=\sqrt[9]{a^6b^3}$, come all'opposto $\sqrt[4]{a^6b^2}=\sqrt{a^3b}$.

191. Quindi *due radicali dei gradi* m, n *potran ridursi al comun grado* mn, *elevando respettivamente alle potenze* n, m *le quantità sotto l'uno e l'altro segno radicale*. Così $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{b^4}$ si ridurranno a $\sqrt[15]{a^{10}}$, $\sqrt[15]{b^{12}}$.

192. Poichè $\sqrt[m]{ab}=a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{1}{m}}$ (186) $=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$, perciò *il radicale di un prodotto eguaglia il prodotto dei radicali dei due*

fattori, e reciprocamente. Così $\sqrt[4]{a^3b^2}=\sqrt[4]{a^3}\sqrt[4]{b^2}=(186)\sqrt[4]{a^3}\times$ $\sqrt[3]{b}$, come all'opposto $\sqrt[3]{2a^2}\sqrt[3]{3b}=\sqrt[3]{6a^2b}$.

193. Quindi poichè $b=\sqrt[m]{b^m}$ sarà $b\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b^m}\sqrt[m]{a}=$ .. $\sqrt[m]{ab^m}$, e perciò *un coefficiente razionale può sempre introdursi sotto il segno radicale purchè s' inalzi alla potenza corrispondente al grado del radicale*. Così $b\sqrt{a}=\sqrt{ab^2}$; $3a\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{27a^4}$. All' incontro se tra i fattori della quantità sotto il segno ve ne sia alcuno con esponente eguale al grado del radicale o multiplo di esso, potremo estrarne la radice corrispondente, e porla per coefficiente al radicale. Così $\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$; $\sqrt{a^3}=\sqrt{aa^2}=a\sqrt{a}$; $\sqrt{8a^3b^5}=\sqrt{4a^2b^4\times 2ab}=2ab^2\sqrt{2ab}$.

194. Inoltre $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$ (186) $=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, cioè *il quoziente di due radicali eguaglia il radicale del quoziente delle due quantità sotto il segno radicale, e viceversa*. Così $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=$,.. $\sqrt{4}=\pm 2$; $\frac{\sqrt{21a}}{\sqrt{7b}}=\sqrt{\frac{21a}{7b}}=\sqrt{\frac{3a}{b}}$.

195. Parimente $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n=a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$, cioè *un radicale di qualunque grado si alza alla potenza* n^{sima} *elevando ad* n *la quantità sotto il segno*. Così $(\sqrt{a})^3=\sqrt{a^3}=$ $a\sqrt{a}$; $(\sqrt[3]{2ab^2})^2=\sqrt[3]{4a^2b^4}=b\sqrt[3]{4a^2b}$(193), e $(\sqrt[m]{a})^m=\sqrt[m]{a^m}=$ $a^{\frac{m}{m}}=a$; dunque per *alzare alla potenza* m^{sima} *un radicale pur del grado* m^{simo}, *basta sopprimere affatto il segno radicale*.

196. Infine $\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}=\sqrt[m]{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$, cioè *si estrae la radice* m^{sima} *da un radicale dell'* n^{simo} *grado cambiando nel prodotto* mn *l' indice* m *del radicale*.

197. Osservazione. A tutte le precedenti conclusioni, immediatamente dedotte dalla natura stessa dei radicali, si sarebbe

egualmente pervenuti, riducendo i radicali a potenze frazionarie, e applicando ai nuovi esponenti le regole date in più luoghi riguardo agli esponenti interi. Queste regole son dunque comuni all'uno e all'altro genere di esponenti, e potremo sempre ricorrervi, qualora o non si abbiano ben presenti i principj qui esposti, o s'incontri qualche difficoltà nell'applicarli. Così troveremo $\sqrt[3]{ab} \times \sqrt[4]{ab^3} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}} =$ (144) $a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{7}{12}} b^{\frac{13}{12}} = a^{\frac{7}{12}} b^{\frac{1}{12}} b = b\sqrt[12]{a^7 b}$.

198. Veniamo adesso agl'immaginarj, e consideriamo il radicale $\sqrt[m]{-a}$ nel caso il più semplice e insieme il più importante, che è quello di $m=2$. Poichè $-a = a \times -1$ sarà $\sqrt{-a} = \sqrt{(a \times -1)} =$ (186) $a^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$, ove il primo fattore è reale e soggiace perciò alle regole precedenti: onde tutte le avvertenze relative agl'immaginarj si ridurranno a quelle che riguardano il radicale $\sqrt{-1}$.

Or siccome $\sqrt{-1}$ ha per quadrato -1 (195) sarà $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$. Dunque $(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 \times (\sqrt{-1})^2 = -1 \times -1 = 1$; .. $(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$, e in generale $(\sqrt{-1})^{2n} = \pm 1$, e $(\sqrt{-1})^{2n+1} = \pm\sqrt{-1}$, preso il segno $+$ se n è pari.

199. Dunque altresì $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{a}\sqrt{-1}\sqrt{b}\sqrt{-1} =$ (192) $\sqrt{ab}(\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{ab}$: così se $a=2, b=8$, avremo $\sqrt{-2} \times \sqrt{-8} = -\sqrt{16} = -4$, reale. Parimente $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = -\sqrt{ab}\sqrt{c}\sqrt{-1} = -\sqrt{abc}\sqrt{-1}$. Onde se $a=2$, $b=3$, $c=6$ sarà $\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-6} = -\sqrt{36}\sqrt{-1} = -6\sqrt{-1}$, immaginario. E generalmente *il prodotto di più fattori immaginarj sarà immaginario, o reale secondo che il loro numero sarà impari o pari.*

200. Sembrerà forse incoerente o almeno inconcepibile che da quantità immaginarie possano derivar prodotti reali, e che sia per esempio $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$: ma deve osservarsi che $-\sqrt{ab}$ è reale se astrattamente si considera come una semplice quantità negativa, o come il prodotto di due fattori di segno ineguale. Ma come prodotto di due fattori di segno eguale è immaginario, e in tal caso non può aver che fattori della sua stessa natura, cioè immaginarj. Parimente la quantità -4

è reale presa come l'unità negativa, ma come quadrato è immaginaria, nè può prodursi che da radici immaginarie.

201. Infine $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=(194)\sqrt{\frac{a}{b}}$; onde *il quoziente di due immaginarj è reale*.

202. Si debba ora alzare alla potenza m^{sima} il binomio $a\pm b$; e sia primieramente $m=2$. Avremo $(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b)$ $=a^2\pm 2ab+b^2$, onde *la potenza seconda, o il quadrato di un binomio* a$\pm$b, *si compone di tre termini, cioè del quadrato* a^2 *del primo termine* a *della radice, del doppio prodotto* $\pm 2ab$, *del primo* a *nel secondo* $\pm b$, *e del quadrato* b^2 *del secondo*. I segni son tutti positivi, se i due termini del binomio han segno eguale; se lo han diverso, il medio è negativo.

203. All'opposto se dato il quadrato vogliasene la radice, converrà avanti ordinarlo (147), e quindi, estratte le radici dal primo e ultimo termine, la loro somma, se il medio è positivo, o la lor differenza, se è negativo, darà la radice cercata, che dovrà però sempre munirsi del doppio segno (186). Così $\sqrt{(4a^4b^2-12a^2bc+9c^2)}=\pm(2a^2b-3c)=\pm 2a^2b\mp 3c$. Che se l'espressione data non è veramente un quadrato, sia perchè manchi di qualche termine, sia perchè il medio non corrisponda al doppio prodotto delle radici dei due estremi, la radice sarà allora irrazionale (187), e non potremo averla che approssimata coi metodi che a suo luogo daremo.

204. Osservazioni. I^a. Un quadrato incompleto x^2+mx si compie coll'aggiungergli il quadrato della metà del secondo termine divisa per la radice del primo: quì la metà del secondo termine è $\frac{mx}{2}$, la radice del primo è x; sarà dunque $\frac{mx}{2x}=\frac{m}{2}$ la quantità che deve essere alzata a quadrato ed aggiunta; onde il quadrato compito sarà $x^2+mx+\frac{m^2}{4}$.

205. II^a. Poichè (10.1°.) l'espressione generale di un intero qualunque può ridursi a $10a+b$, purchè b esprima la cifra delle unità; così ogni quadrato verrà espresso da $100a^2+20ab+b^2$. Quindi 1°. tutti i quadrati dovran terminare in una delle cifre con cui può terminare b^2, che sono 1, 4, 5, 6, 9, 0. 2°. La penultima cifra dei quadrati terminati in 1, 4, 9 è pari; dei terminati in 6 è impari, dei terminati in 5 è 2, dei terminati in zero è zero. 3°. La terz'ultima cifra dei terminati in zero è una

delle cifre in cui può terminare un quadrato, e dei terminati in 5 è 0,2, 6. Tutto è facile a dimostrarsi, e si vede esattamente verificato nella colonna dei quadrati che nella Tavola delle potenze si trova alla fine di questo Tomo. I numeri dunque senza tali proprietà dovranno escludersi, se si tratti di sceglier tra molti un quadrato.

206. III^a. Qualunque quadrato N^2 ha un numero di cifre doppio di quelle della sua radice N, o una meno del doppio. Infatti sia N di m cifre; sarà dunque $< 10^m$ che ne ha $m+1$, e $>$ o al più $= 10^{m-1}$ minimo fra i numeri che ne hanno m. Avremo dunque altresì $N^2 < 10^{2m}$, e $>$ o al più $= 10^{2m-2}$. Ma 10^{2m} e 10^{2m-2} sono i minimi l'uno fra i numeri di $2m+1$ cifre, l'altro fra quelli di $2m-1$; dunque N^2 non potrà nè giungere ad aver $2m+1$ cifre, nè averne meno di $2m-1$, e ne avrà perciò o $2m$ o $2m-1$. Sarebbe facile dimostrare che il secondo caso, assai men frequente del primo, non può aver luogo che quando la prima cifra della radice non supera il 3. Da tutto ciò intanto deriva, che la sola ispezione di un quadrato può subito far conoscere qual numero di cifre aver debba la sua radice.

207. Se in luogo del binomio $a \pm b$, si abbia un trinomio $a+b+c$, o un quadrinomio $a+b+c+d$, ec. operando come sopra (202) si troverà $(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)= a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$; $(a+b+c+d)^2=(a+b+c+d)(a+b+c+d)=a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+\ldots 2cd+d^2$, ec. D'onde in generale s'inferirà che *il quadrato di un polinomio qualunque si compone del quadrato del primo termine e doppio prodotto di esso in tutti i seguenti; del quadrato del secondo e suo doppio prodotto in tutti i seguenti; del quadrato del terzo e suo doppio prodotto in tutti i seguenti; e così successivamente.* Mentre all'opposto *la radice del quadrato di un polinomio*, ordinato che sia, *risulterà dalla radice del primo termine e dai quozienti che si avranno col dividere il secondo, terzo, quarto termine per il doppio della radice del primo, fino esclusivamente a quel termine, che nel polinomio dato corrisponderà al quadrato del primo quoziente.*

208. Or su questi principj è appunto fondata la regola che insegna ad estrar le radici dai quadrati numerici. Si voglia la radice quadra del numero 40297104. Comincio dal separare il numero dato in classi di due cifre da destra verso la sinistra, lasciando una sola cifra per l'ultima classe a sinistra, quando il numero delle cifre si trovi esser impari. Quindi fra i quadra-

	6348
6	40,29,71,04
123	429
1264	6071
12688	101504

ti dei numeri semplici scelgo quello che è immediatamente inferiore alla suddetta prima classe a sinistra, cioè nel caso nostro al 40. Questo quadrato è evidentemente il 36, che ha per radice il 6: dal che concludo che la prima cifra della radice cercata sarà 6. La segno in due luoghi, cioè al di sopra del numero proposto a guisa di quoziente, di fianco in forma di divisore; e quindi operando appunto come nella divisione, moltiplico l'uno per l'altro questi due 6, ne sotraggo a mente il prodotto 36 dalla classe 40, e segno al di sotto il resto ottenuto 4.

Accanto a questo resto abbasso tutta intera la seguente classe 29, e formo così un 429. Quindi raddoppio la cifra 6 già segnata in radice, ed ho 12, che segno al di sotto di quell'altro 6, che nell'operazione precedente ha figurato da divisore. Dopo di che comincio a divider per questo 12 il 429, e appena rilevata la prima cifra del quoziente, che sarebbe manifestamente 3, la segno in radice accanto al 6, e la segno parimente accanto al divisore 12, che si cangia allora in 123; e quindi ripresa la divisione del 429 non più per 12, ma per 123, moltiplicando per il quoziente 3 il nuovo divisore 123, e sottraendo a mente dal 429 il prodotto 369, ho di resto 60, che segno al solito. E così proseguendo, secondo l'esempio, concludo che la radice cercata è 6348. Se ne può aver la prova moltiplicando 6348 in se stesso, il che dà appunto 40297104.

209. Si osservi 1°. Che se le sottrazioni sopra indicate riescano talvolta impossibili, ciò mostrerà come nella divisione (37) che la cifra corrispondente segnata in radice è troppo forte e convien quindi diminuirla, 2.° Che qualora al termine dell'operazione si abbia un avanzo, ciò darà indizio che il numero proposto non è quadrato, nè può aversene la radice esatta; potrà bensì aversi approssimata, aggiungendo tante coppie di zeri, quante piacerà, alla destra del numero dato, e continuando ad operare nel modo stesso che sopra, purchè tutte le cifre che entreranno in radice, dal momento che avrà luogo l'aggiunta, si considerino come decimali. 3°. Che se il quadrato del numero proposto sia con decimali, la divisione in classi dovrà principiarsi dall'unità degl'interi e proseguirsi al solito verso la sinistra, e

quindi dovran pur separarsi in classi di due per due anche i decimali, supplendo con uno zero finale nel caso che si trovino esser di numero impari. I decimali in radice dovran cominciarsi a computare allorchè, esaurite le classi degli interi, si abbasserà la prima delle decimali.

210. Per dimostrare con la maggior possibile brevità queste regole, convien cominciare dal supporre il dato quadrato N^2 non più che di tre o quattro cifre, e quindi di sole due la radice N (206). Porremo dunque $N=10a+b$, d'onde $N^2=100a^2+20ab+b^2$. Ora è chiaro che ridotti a numeri questi tre termini, il primo non potrà aver più di due cifre significative seguite da due zeri; il secondo non potrà averne più che tre con uno zero finale; il terzo non ne avrà al più che due sole. Fatta dunque la somma, e divisala in due classi secondo la regola, la classe finale conterrà b^2 e le diecine di $20ab$, mentre la prima sarà composta del quadrato a^2, del prodotto $2ab$ meno la sua ultima cifra, con al più l'unità che potrà portarvi la somma delle diecine del secondo e terzo termine; ed è poi da osservarsi che la porzione del prodotto $2ab$ che così viene ad esser sommata con a^2, equivale al quoziente intero di $\frac{2ab}{10}$, quoziente che non può giungere al valor di $2a$, anche nel caso di $b=9$, come è evidente. Da tutto ciò risulta 1°. che la prima classe sarà in ogni caso $<(a+1)^2$; e poichè d'altronde è $>a^2$, sarà dunque a^2 il massimo dei quadrati che vi son contenuti, la cui radice ci farà quindi conoscere immediatamente la prima cifra a della radice cercata. 2°. Tolto questo quadrato dalla prima classe, il che equivale visibilmente a togliere $100a^2$ dall'intero quadrato N^2, ciò che resta sarà dunque $20ab+b^2$. Or se questo residuo si divida per $2a$ la prima cifra p del quoziente potrà risultare $=$ oppure $>b$. Postala in radice alla destra di a, e formato così il numero $10a+p$, se questo, secondo la regola, si moltiplichi per p avremo il prodotto $20ap+p^2$, che qualora si trovi eguale al resto avuto $20ab+b^2$ indicherà che $p=b$, e quindi che $10a+p$ è la radice cercata. Diversamente dovremo diminuir p, finchè o il prodotto coincida col resto se è possibile o ne sia immediatamente minore. Nel primo caso la quantità totale già segnata in radice sarà evidentemente la radice cercata; nel secondo sarà la radice del massimo quadrato contenuto nel numero dato, che dovrà allora concludersi non esser quadrato esatto.

Si suppongano adesso due nuove cifre nel dato quadrato, e quindi una di più, cioè tre nella radice. Rappresentando l'ultima di queste con b, ed il numero composto dalle prime due con a, avremo come sopra $N=10a+b$, ed $N^2=100a^2+20ab+b^2$, Il primo termine potrà avere fino a sei cifre, compresi gli zeri finali; il secondo cinque al più; l'ultimo non più che due. Ragionando perciò come sopra si concluderà nel modo medesimo che il quadrato a^2 è il massimo dei quadrati contenuti nel numero che rimane tolte dal dato le due ultime cifre. Quindi applicato separatamente a que-

sto numero il metodo precedente scuopriremo le due prime cifre della radice cercata; dopo di che per aver la terza non dovremo che rinnuovar l'operazione medesima con la quale condotti ci siamo alla scoperta della seconda; il tutto conforme a quanto la regola ci prescrive. Nella stessa maniera, qualora il quadrato abbia un maggior numero di cifre, scuopriremo la quarta della radice dopo aver trovata, come sopra, la terza, la quinta dopo aver trovata la quarta, e così di seguito.

211. Oss. I. Allorchè il numero dato N è un quadrato esatto Q, il resto finale è sempre zero; onde supposta a la radice, sarà $N-a^2=0$. Ma se $N=Q+r$, il resto finale dovrà evidentemente essere r, e si avrà $N-a^2=r$: il che si verifica come è chiaro, non solo dell'ultimo, ma anche di tutti i resti intermedj, purchè si prenda per N quella sola porzione di N sulla quale si è operato fino a quel punto.

II. Quando si sono avute in radice più della metà delle cifre che ci abbisognano, il residuo y può immediatamente aversi dal quoziente $\frac{10^{n-1}r}{2a}$, ove a è la parte già calcolata della radice, n il numero delle sue cifre, ed r l'ultimo dei resti avuti. Così se vogliasi $\sqrt{2}$ con 11 cifre, compresa quella degl' interi, si cercheranno le prime 6 e si troverà 1,41421 col resto 100759, che moltiplicato o espressamente o in modo sottinteso per 10^5, e diviso per 282842 doppio della parte di radice già avuta, darà per le altre 5 cifre 35624. Infatti poichè si suppongono al più $n-1$ cifre in y, avremo I^a. (10.1°.) $\sqrt{N}=10^{n-1}a+y$. In oltre si chiami N_1 la parte di N impiegata nel calcolo di a, e q la rimanente: siccome per natura del metodo deve trovarsi in q un doppio numero di cifre che in y (206), e per ipotesi y non ne ha al più che $n-1$, saranno $2n-2$ le cifre di q, ed avremo II^a. $N=$ ..... $10^{2n-2}N_1+q$ (10.1°.). In fine il teorema precedente darà III^a. $N_1-a^2=r$. Da queste tre equazioni facilmente si trarrà $y=\frac{10^{n-1}r}{2a}+\frac{q-y^2}{2.10^{n-1}a}$. Ma le $n-1$ cifre di y danno $y<10^{n-1}$, ed $y^2<10^{2n-2}$; le $2n-2$ di q danno $q<10^{2n-2}$, mentre le n di a danno $a>10^{n-1}$, e $10^{n-1}a>10^{2n-2}$, sarà molto più $q-y^2<10^{n-1}a$, e perciò $\frac{q-y^2}{2.10^{n-1}a}<\frac{1}{2}$; onde riducendo il valor di y al suo primo termine $\frac{10^{n-1}r}{2a}$, questo differirà dal vero di meno di una mezza unità nell' ultima cifra.

212. Sia ora $m=3$ (202), cioè si tratti di alzare a cubo il binomio $a\pm b$. Si avrà $(a\pm b)^3=(a\pm b)^2(a\pm b)=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$. Onde *la terza potenza o cubo di un binomio contiene i cubi dei suoi due termini, e i tripli prodotti del quadrato di ciascun termine nell' altro*. Così $(2a^2c-3b)^3=8a^6c^3-36a^4bc^2+54a^2b^2c-27b^3$. All' opposto la radice terza di un cubo perfetto ed ordinato, si avrà prendendo quella del primo e dell' ultimo termine. Per il cubo imperfetto avran luogo metodi analoghi a quelli dati per il quadrato (204).

213. Sia $m=4$, o voglia alzarsi $a\pm b$ alla quarta potenza. Troveremo $(a\pm b)^4=a^4\pm4a^3b+6a^2b^2\pm4ab^3+b^4$; come pure se $m=5$ avremo $(a\pm b)^5=a^5\pm5a^4b+10a^3b^2\pm10a^2b^3+5ab^4\pm b^5$. Or se prendiamo a considerare l'andamento di queste potenze, e delle altre che possono nel modo stesso formarsi, si troverà costantemente: 1.° che i termini sono uno di più del numero esponenziale; 2.° che i segni son positivi se il secondo termine della radice è positivo; nel caso opposto sono negativi tutti i termini di posto pari; 3.° che gli esponenti delle due lettere vi procedono in ordine opposto: quello di a è massimo nel primo termine, ove eguaglia l'esponente stesso della potenza, e va poi successivamente decrescendo di un'unità in ciascuno dei termini seguenti, finchè diviene zero (147) nell'ultimo: quello di b comincia dall'essere zero nel primo termine, e va crescendo di un'unità in ciascun dei seguenti, finchè nell'ultimo eguaglia esso pure il grado della potenza; 4.° che il coefficiente del primo e dell'ultimo termine è l'unità; ciascuno poi degli altri si ottiene col moltiplicare quello del termine che precede nell'esponente ivi dato ad a, e col dividere il prodotto per il numero dei termini già costruiti. Ma come dal mezzo in poi tornano eguali in ordine inverso, così non si renderà necessario calcolargli che per la prima metà.

214. Tutto ciò serve chiaramente a concludere che qualunque siasi m, avremo in generale $(a\pm b)^m=a^m\pm ma^{m-1}b+\ldots$ $m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}b^2\pm m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3+m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$ $a^{m-4}b^4+$ ec. . . . $\pm b^m$, avvertendo rapporto all'ultimo termine che il segno di sotto ha soltanto luogo quando essendo negativo il secondo termine del binomio, sia impari il grado m della potenza, nel qual caso esso ultimo termine, secondo ciò che abbiamo detto (213.1°.), è di posto pari. Questa celebre formula è conosciuta col nome di formula del *Binomio di Nevvton*, dal nome immortale del suo discopritore. L'uso grande e continuo che se ne fa in tutti i rami delle Matematiche, porterà sempre a riguardarla come uno dei più importanti e preziosi ritrovamenti del genio.

Per farne un'applicazione al caso nostro sia $m=5$. Sarà $(a\pm b)^5$

$=a^5 \pm 5a^4b + \frac{5.4}{2}a^3b^2 \pm \frac{5.4.3}{2.3}a^2b^3 + \frac{5.4.3.2}{2.3.4}ab^4 \pm \frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}b^5$. Qui la formula si arresta, perchè tutti i termini seguenti contengono per fattore $m-5$ che è zero, e perciò tutti si annullano. Frattanto riducendo si avrà $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$, precisamente come sopra (213).

215. Del resto questa formula che qui abbiamo stabilita sul semplice appoggio dell'induzione, ma che altrove dimostreremo con più rigorosi principj, sussiste, come pur si vedrà, anche nei casi di m negativo e di m frazionario. Ma può anche ridursi in un modo molto più comodo per le applicazioni. Poichè in generale $a^{m-n} = (163.\ 2.^o) \frac{a^m}{a^n}$, sarà dunque $(a \pm b)^m = a^m \pm \frac{ma^mb}{a} + m\frac{(m-1)a^mb^2}{2a^2} \pm m\frac{(m-1)(m-2)a^mb^3}{2.3a^3} +$ ec. ossia, fatto per comodo $\frac{\pm b}{a} = Q$, $(a \pm b)^m = a^m + ma^mQ + m\frac{(m-1)a^m}{2}Q^2 + \ldots m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}a^mQ^3 +$ ec. ove potrà osservarsi che il secondo termine è il prodotto del primo in mQ: il terzo è il prodotto del secondo in $\frac{m-1}{2}Q$, il quarto è il prodotto del terzo in $\frac{m-2}{3}Q$ ec. Dunque se si rappresentino con A, B, C ec. i termini primo, secondo, terzo ec., si avrà sostituendo $(a \pm b)^m = a^m + \ldots mAQ + \frac{(m-1)}{2}BQ + \frac{(m-2)}{3}CQ +$ ec. con legge assai manifesta. Così volendo alzare alla quarta potenza $\frac{c}{2\sqrt{b}} - \frac{2a\sqrt{b}}{c}$, porremo $Q = -\frac{2a\sqrt{b}}{c} : \frac{c}{2\sqrt{b}} = -\frac{4ab}{c^2}$; $m=4$, $a^m = \left(\frac{c}{2\sqrt{b}}\right)^4 = \frac{c^4}{16b^2}$, e quindi $\left(\frac{c}{2\sqrt{b}} - \frac{2a\sqrt{b}}{c}\right)^4 = \frac{c^4}{16b^2} - \frac{ac^2}{b} + 6a^2 - \frac{16a^3b}{c^2} + \frac{16a^4b^2}{c^4}$.

216. Si osservi 1.° Che se in vece di un binomio, si abbia un trinomio, un quadrinomio ec. come $p+q+r+s$, porremo $a = p+q$, $b = r+s$, e quindi $Q = \frac{r+s}{p+q}$, e fatte le sostituzioni svilupperemo le potenze e i prodotti secondo il solito. Il Calcolo differenziale dà per questi casi metodi assai più facili. 2.° Che se l'esponente sia frazionario (215), e divenga $\frac{m}{n}$, fatto l'analogo

cambiamento in tutta la formula, essa diverrà $(a\pm b)^{\frac{m}{n}}=$ (187) $\sqrt[n]{(a\pm b)^m}=a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+$ ec., interminabile, perchè non essendo m multiplo di n (187), niuno dei coefficienti $m-n$, $m-2n$, $m-3n$, ec. potrà ridursi a zero. Debba per esempio cercarsi il valore di $\sqrt{(a^2\pm x^2)}$. Sarà $m=1$, $n=2$, $Q=\pm\frac{x^2}{a^2}$ ed a si cangerà in a^2, e quindi

$$\sqrt{(a^2\pm x^2)}=a\pm\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}\pm\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}\pm\frac{35x^{10}}{1280a^9}-\text{ec.}$$

Vogliasi il valore di $\sqrt{\left(\frac{1}{a^2\pm x^2}\right)}=(163.2.^\circ)(a^2\pm x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Sarà $m=-1$, e come sopra $n=2$, $Q=\pm\frac{x^2}{a^2}$ ed a sarà cangiata in a^2; con che avremo

$$\sqrt{\left(\frac{1}{a^2\pm x^2}\right)}=\frac{1}{a}\mp\frac{x^2}{2a^3}+\frac{3x^4}{8a^5}\mp\frac{5x^6}{16a^7}+\frac{35x^8}{128a^9}\mp\text{ec.}$$

Vogliasi il valore di $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{1\pm x^2}\right)}=(1\pm x^2)^{-\frac{1}{3}}$. Sarà $m=-1$, $n=3$, $Q=\pm x^2$ ed $a=1$: troveremo

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{1\pm x^2}\right)}=1\mp\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{9}\mp\frac{14x^6}{81}+\frac{35x^8}{243}\mp\frac{91x^{10}}{729}+\text{ec.}$$

217. La formula può applicarsi all'estrazione approssimata di qualunque radice n^{sima} di un dato numero N che non sia potenza del grado corrispondente. A tale effetto si rappresenti con p^n la potenza n^{sima} inferiormente o superiormente più prossima ad N, e si ponga $N-p^n=\pm q$ avendo luogo il segno di sopra quando si ha $N>p^n$. Fatto $a=p^n$, $b=\pm q$ ed $m=1$, sarà $Q=\frac{\pm q}{p^n}$, e $\sqrt[n]{N}=p+\frac{1}{n}\times AQ-\frac{n-1}{2n}BQ-\frac{2n-1}{3n}CQ-$ ec. Così volendo $\sqrt[3]{6}$ ho $n=3$, $p^n=8$, $p=2$, $q=-2$, $Q=-\frac{1}{4}$, e $\sqrt[3]{6}=2-\frac{1}{6}-\frac{1}{72}-\frac{5}{2592}$ ec. Questo metodo, benchè sempre pronto e sicuro, è peraltro laboriosissimo, ed ha in oltre il difetto di esigere che si conosca la potenza p^n; laonde non potrebbe applicarsi con qualche facilità che nel caso di numeri molto bassi, per i quali assai meglio servono i logaritmi.

218. Se nell'esempio numerico precedente in luogo del cubo maggiore 8 si fosse scelto il cubo minore 1, e quindi si fosse fatto $a=1$, $b=5$, si sarebbe avuto $Q=5$, e la serie sarebbe risultata crescente, e perciò, qualsivoglia numero di termini ai

fossero posti in calcolo, ci saremmo trovati sempre lontanissimi dal vero. In generale, nei casi dell' esponente frazionario o negativo, che rendono la formula interminabile, non potremo usarla per le applicazioni numeriche, se non qualora la combinazione dei valori particolari di a, b la renda o tutta affatto decrescente, o crescente fino ad un certo termine e quindi costantemente decrescente. Su di che si noterà 1°. Che nell' ipotesi dell' esponente frazionario, rappresentato con R il termine qualunque r^{simo}, sarà $\frac{m-n(r-1)}{nr}RQ$ il susseguente, ed $\frac{m-n(r-1)}{nr}Q$ ossia $\left(\frac{m+n}{nr}-1\right)Q$ il loro rapporto. 2°. Che m, n essendo costanti, ed r continuamente crescendo, il coefficiente $\frac{m+n}{nr}-1$, astrazion fatta dal segno, aumenta sempre con r e si accosta di più in più all' unità. 3°. Quindi affinchè il rapporto o sempre, o almeno da un certo termine in poi risulti e si mantenga costantemente frazionario, condizione necessaria per la convergenza o totale o finale della serie, è necessario che sia $Q<1$, e in conseguenza $b<a$. 4°. Che supposto $Q=\frac{1}{p}$, la condizione di $\left(\frac{m+n}{nr}-1\right)\frac{1}{p}<1$ darà $p>\frac{m+n}{nr}-1$; onde poichè per il 1°. termine si ha $r=1$, dovrà dunque esser $p>\frac{m}{n}$ affinchè la serie sia tutta convergente. In caso diverso la stessa condizione darà $r>\frac{m+n}{n(p+1)}$, che sarà il termine esclusivo fino a cui la serie si manterrà divergente, e al quale si cangerà in convergente.

219. Ripresa adesso la formula primitiva (214) osserveremo 1°. che il termine n^{simo}, o generale è $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}a^{m-n+1}b^{n-1}$. Perciò l'ultimo termine in cui $n=m+1$ (213.1°.), avrà per coefficiente l'unità come il primo; il penultimo in cui $n=m$, avrà per coefficiente m come il secondo; il terz'ultimo in cui $n=m-1$, avrà $\frac{m(m-1)}{2}$ come il terzo; e così in egual modo i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi saranno eguali come già si notò (213); e poichè in principio van sempre crescendo, il massimo avrà dunque luogo al termine medio se m è pari, e perciò impari il numero dei termini; cadrà ripetutamente sui due medj se m è impari, e quindi il numero dei termini pari. 2°. Poichè il numero totale dei termini è $m+1$, quindi se m è pari, avremo per il termine medio $n=\frac{m+2}{2}$; se è impari per il primo dei due medj sarà $n=\frac{m+1}{2}$, per l'altro $n=\frac{m+3}{2}$. Dunque nel caso di m pari il termine medio sarà rappre-

sentato da $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(\frac{1}{2}m+1)}{1.2.3\ldots\frac{1}{2}m}a^{\frac{1}{2}m}b^{\frac{1}{2}m}$; nel caso di m impari il primo dei due medj sarà rappresentato da $\frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ \frac{1}{2}(m+3)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \frac{1}{2}(m-1)}a^{\frac{1}{2}(m+1)}b^{\frac{1}{2}(m-1)}$, e l'altro da $\frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ldots\ \frac{1}{2}(m+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ \frac{1}{2}(m+1)}a^{\frac{1}{2}(m-1)}b^{\frac{1}{2}(m+1)}$.

220. In secondo luogo, fatto $a=\mp b$, il segno superiore darà $2^m=1+m+\ldots\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}+$ ec., e il segno inferiore $0=1-m+\frac{m(m-1)}{2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}+$ ec. cioè 1°. la somma di tutti i coefficienti del binomio è eguale alla potenza m^{sima} di 2; 2°. le somme dei coefficienti dei termini impari e pari si eguagliano; onde 3°. ciascuna corrisponde alla potenza $m-1$ di 2.

221. In terzo luogo fatta $a+b=x$, e trasportando a^m si ha $x^m-a^m=ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3+$ ec. $\ldots\ldots+b^m$, cioè per essere $b=x-a$, $x^m-a^m=ma^{m-1}(x-a)+\frac{m(m-1)}{2}\times a^{m-2}(x-a)^2+\ \ldots\ldots\ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}(x-a)^3+$ ec.; perciò 1°. *qualunque sia* m, *il binomio* x^m-a^m *è sempre multiplo* di $x-a$, *o divisibile per* $x-a$.

2°. Avendosi $(a-b)^m=a^m-ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\times a^{m-3}b^3+$ ec. $\ldots\pm b^m$, ove il segno superiore dell'ultimo termine ha luogo per m pari, l'inferiore per m impari, fatto $a-b=x$ e trasportando $\pm b^m$, si avrà $x^m\mp b^m=a^m-ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}a^{m-3}b^3+$ ec. multiplo di a ossia di $x+b$, e perciò il *binomio* x^m-b^m *se* m *è pari, e il binomio* x^m+b^m *se* m *è impari son divisibili* per $x+b$.

222. In quarto luogo se b è irrazionale, saranno nella formula sviluppata irrazionali tutti i termini di posto pari, e razionali i rimanenti; onde la serie prenderà la forma di $p\pm\sqrt{q}$. Se anche a è irrazionale ed m impari, la serie avrà tutti i suoi termini irrazionali: ma se m è pari saranno irrazionali i soli termini di posto pari, ed anche in questo caso la serie prenderà la forma di $p\pm\sqrt{q}$. Le quantità sì algebriche che numeriche di quest'ultima forma possono esser dunque talora potenze esatte, ed aver radici espresse da $x\pm\sqrt{y}$, con x ed y razionali, ed anche da $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ nel solo caso di potenze pari. Ecco il metodo di trovar queste radici, se vi sono, per il secondo e terzo grado.

223. Vogliasi dunque estrar la radice quadra da $p\pm\sqrt{q}$. Porremo $\sqrt{(p\pm\sqrt{q})}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$, d'onde quadrando $p\pm\sqrt{q}=x\pm2\sqrt{xy}+y$, e quindi per il noto prin-

ciplo (247) $x+y=p, 4xy=q$. Di qui facilmente $x=\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}$, $y=\frac{p}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}$. Converrà dunque che p^2-q sia un quadrato perchè x, y risultino razionali, e le radici sieno della forma prescritta. In ogni altro caso si avrebbero espressioni più complicate della proposta, e quindi da rigettarsi.

Esempj. Sia $p=2$, $q=3$; sarà $p^2-q=1$ e quindi $\sqrt{(2+\sqrt{3})}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, il che può facilmente verificarsi quadrando questo binomio. Sia $p=7$, $q=48$; sarà $p^2-q=1$ e $\sqrt{(7+\sqrt{48})}=\sqrt{(7+4\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$. Sia infine $p=a$, $q=a^2-c^2$; sarà $p^2-q=c^2$, e $\sqrt{(a+\sqrt{(a^2-c^2)})}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+c)}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-c)}$.

224. Vogliasi la radice terza di $p\pm\sqrt{q}$. Dovremo porre $\sqrt[3]{(p\pm\sqrt{q})}=x\pm\sqrt{y}$ e cubando $p\pm\sqrt{q}=x^3\pm3x^2\sqrt{y}+3xy\pm y\sqrt{y}$, d'onde al solito I.^{a} $p=x^3+3xy$, II^a. $\sqrt{q}=(3x^2+y)\sqrt{y}$, equazioni che quadrate e quindi sottratte danno $p^2-q=(x^3+3xy)^2-(3x^2+y)^2y$, ossia, riguardando il secondo membro come la differenza di due quadrati, $p^2-q=(x^3+3xy+3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y})(x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y})$ $=(x+\sqrt{y})^3(x-\sqrt{y})^3=(x^2-y)^3$. Fatto adesso per comodo $p^2-q=a$, sarà $x^2-y=\sqrt[3]{a}$, e quindi III^a. $y=x^2-\sqrt[3]{a}$, valore che posto nella prima darà $x^3-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{a}-\frac{p}{4}=0$. Per togliere i rotti e il radicale, pongo IV^a. $x=\frac{\omega}{2\sqrt[3]{a}}$, ed ottengo V^a. $\omega^3-3a\omega-2ap=0$. Trovata ω per mezzo di quest'equazione, avremo x dalla IV^a. ed y dalla III^a. Si osservi 1°. che se a è un cubo perfetto, nel qual unico caso x ed y son razionali, ed h ne sia la radice, in luogo della IV^a. porremo $x=\frac{\omega}{2}$, e l'equazione finale diverrà $\omega^3-3h\omega-2p=0$. 2°. Che se non essendo a un cubo perfetto, si trovi un tal quadrato b^2 che moltiplicato per a faccia un cubo c, potrà semplicizzarsi l'equazione finale ponendo nella IV^a $x=\frac{\omega}{2\sqrt[3]{b}}$ in luogo di $x=\frac{\omega}{2\sqrt[3]{a}}$, dal che, sostituendo e osservando che $\frac{a}{b}=\frac{ab^2}{b^3}=\frac{c^3}{b^3}$, si avrà $\omega^3-3c\omega-2bp=0$, d'onde ω, e quindi come sopra x ed y ambedue per altro irrazionali.

Es. I Si voglia la radice cuba di $10+6\sqrt{3}$; sarà $p=10$, $q=108$, $a=-8$ cubo. Dunque $h=-2$ e di qui l'equazione $\omega^3+6\omega-20=0$, che dà $\omega=2$. Dunque $x=1$, $y=3$, e $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$ come può verificarsi cubando. II. Si voglia la radice cuba di $8+4\sqrt{5}$; avremo $p=8$, $q=80$, $a=-16$, che moltiplicato per 4 divien -64 cubo di -4. Dunque $b=2$, $c=-4$, valori che sostituiti con quello di p nell' equazione finale danno $\omega^3+12\omega-32=0$; di qui $\omega=2$, $x=1:\sqrt[3]{2}$; $y=5:\sqrt[3]{4}$.

225. In ultimo, se nella formula generale (214) si uniscano sotto un sol coef-

ficiente i termini che lo hanno comune, avremo $(a+b)^m = a^m + b^m + mab(a^{m-2} + b^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{2} a^2b^2(a^{m-4}+b^{m-4}) + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3} a^3b^3(a^{m-6}+b^{m-6}) +$ ec. . . . $+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(\frac{1}{2}m+1)}{1.\,2.\,3.\ldots\frac{1}{2}m} a^{\frac{1}{2}m} b^{\frac{1}{2}m}$ se m è pari, ovvero . . . . $\frac{m(m-1)(m-2),\ldots\frac{1}{2}(m+3)}{1.\,2.\,3.\ldots\ldots\frac{1}{2}(m-1)} (ab)^{\frac{1}{2}m-1} (a+b)$ se m è impari. Nell'ultimo caso la formula avrà $\frac{m+1}{2}$ termini, considerati come un solo i due primi a^m+b^m; nel primo dovremo prenderne $\frac{m}{2}$ con più la metà del seguente.

Da questa, fatto $a+b=x$, si trarrà in generale $a^m+b^m = x^m - mab(a^{m-2} + b^{m-2}) - \frac{m(m-1)}{2} a^2b^2(a^{m-4}+b^{m-4}) - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3.} a^3b^3(a^{m-6}+b^{m-6}) - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} a^4b^4(a^{m-8}+b^{m-8}) -$ ec; e di qui

$$a^{m-2}+b^{m-2} = x^{m-2} - (m-2)ab(a^{m-4}+b^{m-4}) - \frac{(m-2)(m-3)}{2} a^2b^2 \times \ldots (a^{m-6}+b^{m-6}) - \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.} a^3b^3(a^{m-8}+b^{m-8}) - \text{ec.}$$

$$a^{m-4}+b^{m-4} = x^{m-4} - (m-4)ab(a^{m-6}+b^{m-6}) - \frac{(m-4)(m-5)}{2} a^2b^2(a^{m-8}+b^{m-8}) - \text{ec.}$$

$$a^{m-6}+b^{m-6} = x^{m-6} - (m-6)ab(a^{m-8}+b^{m-8}) - \text{ec.}$$

$$a^{m-8}+b^{m-8} = x^{m-8} - \text{ec.}$$

e sostituendo questi valori gli uni negli altri, cioè l'ultimo nel penultimo, questo nel terz'ultimo ec., fatte le convenienti riduzioni, troveremo.

$$a^{m-6}+b^{m-6} = x^{m-6} - (m-6)abx^{m-8} + \text{ec.}$$

$$a^{m-4}+b^{m-4} = x^{m-4} - (m-4)\,abx^{m-6} + \frac{(m-4)(m-7)}{2} a^2b^2x^{m-8} - \text{ec.}$$

$$a^{m-2}+b^{m-2} = x^{m-2} - (m-2)\,abx^{m-4} + \frac{(m-2)(m-5)}{2} a^2b^2x^{m-6} - \ldots \frac{(m-2)(m-6)(m-7)}{2.3} a^3b^3x^{m-8} + \text{ec. ed in fine}$$

$$a^m+b^m = x^m - mabx^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2} a^2b^2x^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3} \times \ldots a^3b^3x^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4} a^4b^4x^{m-8} - \text{ec.}$$

Faremo uso in seguito di questa formula, e intanto avvertiremo che il numero m deve essere intero e positivo, e che nei casi particolari la serie deve estendersi esclusivamente fino a quel termine in cui le potenze di x comincerebbero a divenir negative.

Teoria generale dell' Equazioni

Preliminari

226. Ogni formula che esprime l'eguaglianza di due quantità può chiamarsi *equazione*. Così $6+3=9$, $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ sono equazioni. Più particolarmente però si dà questo nome a quelle, nelle quali l'eguaglianza delle due parti non è per se medesima manifesta. Tale sarebbe $\frac{3x}{4}+2=\frac{5}{8}+9x$. Le due quantità eguagliate diconsi *membri* dell'equazione; il sinistro è il primo, il destro è il secondo.

227. In un' equazione puramente aritmetica il secondo membro non è ordinariamente che il risultamento delle operazioni indicate dal primo; dato questo, l'altro ne viene per conseguenza, nè potrebbe variarsi, nè porsene uno diverso in sua vece. Non così se l'equazione sia algebrica, cioè se l'un membro, o l'altro, o ambedue insieme contengano qualche lettera algebrica. Fra due espressioni di questa natura, qualunque sieno e comunque formate, può sempre sussistere un' equazione. Così per esempio, mentre non potrebbe farsi, siccome è evidente, $\frac{6}{7}+5=\frac{3}{8}$, niente impedirà che si ponga $\frac{6x}{7}+5=\frac{3x}{8}$. E ciò, perchè la lettera x essendo di sua natura atta a rappresentare qualunque numero, può dunque rappresentar quello pure che soddisfà all' equazione, cioè che rende il primo membro eguale al secondo. Se non che mentre x isolata e fuori dell' equazione, è capace di qualunque significato, introdotta in quella perde per dir così la sua generalità, ed assume il valore del numero ignoto di cui tien luogo, e che siccome vedremo in qualche caso, può esser moltiplice. La difficoltà consiste nel trovar questo valore, il che forma l'oggetto primario della bella ed interessante parte d'analisi conosciuta col nome di *Teoria dell' equazioni*. Ma prima di passare a stabilirne i principj, sarà bene di premettere alcune osservazioni.

228. Una stessa incognita x non può, generalmente parlando, assoggettarsi a soddisfare a due differenti equazioni. Infatti dovendo per soddisfare alla prima assumere il valore particolare e proprio di quell'equazione (227), perde dunque ogni attitudine a prendere il valore che necessario sarebbe per soddisfare alla seconda. Diverse quindi essendo l'incognite nelle due equazioni, se in una si rappresenta con x, nell'altra si dovrà rappresentare o con y o con z, o in qualunque altro modo proprio a distinguere l'una dall'altra, e mostrare che l'una non deve confondersi con l'altra.

229. Se due incognite x, y si trovassero in una stessa equazione, come se per esempio si avesse $3xy+5x=8y+6$, una sola bastando per rendere il primo membro eguale al secondo, l'altra rimarrà dunque indeterminata, e conserverà il suo valore generico. Potremo dunque darle qualunque valor ci piaccia; e come ad ogni nuovo valore che le daremo, l'equazione cangerà, così altrettante volte cangerà dunque di valore la prima incognita, in modo che per ogni valore arbitrario dato ad y ne corrisponderà sempre uno differente per x. Così se nell'equazione proposta si fa $y=1$, nascerà l'altra $3x+5x=14$, ossia $8x=14$, che è soddisfatta da $x=\frac{7}{4}$; mentre se si pone $y=2$, si ha $6x+5x=22$, ossia $11x=22$ che è soddisfatta da $x=2$.

230. Per altro se l'incognita y debba simultaneamente soddisfare ad un'altra equazione, come se per esempio, oltre l'equazion precedente si avesse l'altra $3y+6=18$, in virtù di questa la nuova incognita perderà la sua generalità, nè potrà avere altri valori che quelli opportuni per la nuova equazione, che soli potranno esser sostituiti nella prima. Questa prenderà dunque una forma fissa e determinata, ed i valori di x si ristringeranno a quei pochi atti a soddisfarla. Nel nostro caso, per la nuova equazione, si ha $y=4$; la prima divien dunque $12x+5x=38$, a cui soddisfà unicamente $x=\frac{38}{17}$.

231. Lo stesso accaderà se le due incognite si trovino contemporaneamente in due differenti equazioni. È chiaro che, dando ad y un valor qualunque arbitrario, risulterebbero due equazioni differenti con la sola incognita x, da cui dovrebbero esser

soddisfatte ambedue, il che si è veduto generalmente impossibile (228). Non può dunque y avere valori qualunque; ma quei soli bensì che introdotti nell'equazioni portano ad aver dall'una e dall'altra gli stessi valori di x. Altrettanto si dica nel caso che si avesse un più gran numero d'incognite e d'equazioni. Tutte le incognite debbono esser determinate in maniera che, postone il valore in qualunque delle equazioni, queste risultin tutte in egual modo soddisfatte. Come ciò possa ottenersi, in breve lo mostreremo; e intanto si osserverà che come l'eguaglianza di numero fra l'equazioni e l'incognite cangia in determinato il valor generico di quest'ultime, così ogni qual volta le incognite aver dovranno un valor determinato, sarà necessario che il loro numero coincida con quello delle equazioni.

232. La riunione di più equazioni, nelle quali sparse si trovin comunque le stesse incognite, prende il nome di *sistema*, e l'equazioni si dicono *coesistenti*. Per formar dunque un sistema son necessarie più incognite; con una non può stabilirsi che un'equazione, da cui per via d'operazioni possono per altro trarsene altre seco lei coesistenti; il che principalmente si fa o riducendo comunque i suoi termini, o tutta moltiplicandola, o tutta dividendola per una funzione φ dell'incognita. Nel primo caso l'equazione mantiene il suo grado e rimane *identica*, cioè la stessa benchè sotto forma diversa, e l'incognita vi conserva i suoi valori. Nel secondo l'equazione cresce di grado; e l'incognita, oltre i valori primitivi, acquista quelli che nascono dall'equazione $\varphi=0$, e che sono estranei in conseguenza al Problema che ha condotto allo stabilimento dell'equazion primitiva. Nel terzo caso se, ridotta l'equazione a zero, la divisione riesca esatta, la funzione φ corrisponderà al prodotto di una parte dei fattori della proposta, e l'equazione risultante, scemando di grado, corrisponderà al prodotto dei fattori rimanenti. Non sarà dunque soddisfatta da tutti i valori che può aver l'incognita nella data, nè risponderà completamente al Problema, ossia non ne darà tutte le possibili soluzioni; quelle però che ne avremo saranno tutte opportune.

233. I cofficienti che accompagnano l'incognita in un'equazione, come pure i termini senza di essa, non son sempre numerici. Spessissimo gli troveremo rappresentati con lettere, le quali per quanto è possibile si trascelgono fra le prime dei due alfabeti latino e greco; l'ultime essendo esclusivamente consacrate dall'uso a rappresentare le incognite. La differenza dunque che passa fra l'une e l'altre è, che quelle debbon ri-

guardarsi come quantità note e già date o trovate, queste come quantità da trovarsi: il che meglio s' intenderà nel progresso.

234. L'equazioni sono infine di diverso grado, che sempre è determinato o dal maggiore esponente dell' incognita, quando questa sia unica, o anche dalla maggior dimensione (143) considerata relativamente alle incognite se queste sono più d'una. Così, l'equazione $x^3+x^2=x-1$, è del terzo grado; $xy=5x+6$, ed $x^2+2x=1$ son del secondo; $x+y=5$ è del primo. Ma qualunque ne sia il grado, lo scopo è di far conoscere il valor dell' incognite. Un poco d' abito al calcolo basta per l' equazioni del primo e secondo grado: quelle del terzo e del quarto hanno delle difficoltà: per quelle del quinto, del sesto ec. non vi è metodo generale.

Equazioni del primo grado

235. Riunire in un membro dell'equazione tutti i termini noti, e lasciar nell'altro l'incognita *sola*, *positiva*, *senza coefficiente o divisore, e senza esponente*, è ciò che si chiama *risolvere un' equazione*. Ora l' operazioni che guidano all' intento per un' equazione del primo grado, principalmente dipendono dai tre seguenti assiomi, cioè che *due quantità restano eguali* 1°. *se all' una e all' altra si aggiungano, o tolgano quantità eguali*; 2°. *se l' una e l' altra si dividano o si moltiplichino per quantità eguali*; 3°. *se l' una e l' altra si cangino di segno.*

Col mezzo del primo l' incognita può ridursi in un sol membro ed isolarsi; poichè se per esempio si abbia $6x-9=8x+5$, potremo toglier dall' uno e dall' altro membro $8x$, ed avremo (149) $6x-9-8x=8x+5-8x$, cioè riducendo $-2x-9=5$; potremo aggiunger 9 all' uno e all' altro membro, ed avremo $-2x-9+9=5+9$, cioè $-2x=14$. Col mezzo del secondo potremo spogliar l' incognita del suo coefficiente, poichè dividendo per 2 si avrà $-\frac{2x}{2}=\frac{14}{2}$, ossia $-x=7$. Col mezzo del terzo potremo infine renderla positiva, poichè cangiando segno si ha $x=-7$, con che l' equazione è risoluta; infatti se si sostituisce -7 in luogo di x nel primo membro, si ha $-42-9=-51$,

e se si sostituisce nel secondo si ha $-56+5=-51$. Dunque -7 è il numero prima ignoto e adesso noto che soddisfa all'equazione, e di cui l'incognita x teneva il luogo (227).

236. Come però il richiamo diretto di questi assiomi, o almeno dei due primi, riescirebbe in pratica di grave imbarazzo, si usa perciò di appoggiar piuttosto i ragionamenti ai seguenti principj, che ne sono immediata conseguenza.

I. *In ogni equazione si può trasportare qualunque termine da un membro all'altro, purchè si cangi di segno.* Trasportandolo infatti si toglie da un membro, e segnandolo nell' altro, con segno opposto, si toglie anche da questo (149): dunque in virtù del primo assioma i due membri restano eguali. Così dall'equazione $3x-a=2x+c$, può farsi nascer l'altra $3x-2x=a+c$, cioè $x=a+c$.

II. *Se l'uno e l'altro membro sieno o moltiplicati, o divisi per una medesima quantità, questa potrà elidersi affatto dall'equazione.* Infatti così facendo vengonsi a dividere nel primo caso, e moltiplicar nel secondo i due membri per la quantità che si elide o si sopprime, dunque in forza del secondo assioma questi restano eguali. Così l'equazione $\frac{3x}{2}=\frac{9a}{2}$ può ridursi ad $x=3a$. Di qui intanto risulta un modo facile per togliere i rotti da un'equazione: per il che basterà ridurla tutta quanta al medesimo denominatore, e questo quindi sopprimere, o anche neppur segnarlo, comecchè divisor comune de' due membri. Così l'equazione $\frac{x}{2}+\frac{3}{5}=\frac{3x}{10}-\frac{7a}{6}$, ridotta al denominatore 30, si cangerà nell'altra $15x+18=9x-35a$.

III. *Il coefficiente o moltiplicatore totale, e il divisor totale di un membro possono trasportarsi l'uno come divisore, l'altro come moltiplicatore nell'altro membro.* Infatti queste due operazioni equivalgono l'una a dividere, l'altra a moltiplicare i due membri per la medesima quantità: dunque in forza del secondo assioma nè l'una, nè l'altra altera la loro eguaglianza. Così l'equazione $3x=7b+c$, si cangia nell'altra $x=\frac{7b+c}{3}$; e l'equazione $\frac{x}{3}=5$ si cangia in $x=15$.

237. Quasi tutte queste operazioni si fanno (per dirlo quì in breve) anche nell' *ineguaglianze*, cioè in quelle formule che hanno tramezzo il segno $>$ o il $<$. Infatti è chiaro 1°. che se i due membri d'un' ineguaglianza si aumentino o si diminuiscano di quantità eguali restano ineguali; il che rende lecito il trasporto delle quantità da un membro nell'altro; 2°. che resteranno pure ineguali se si moltiplichino o si dividano per quantità eguali; il che dà luogo a trasformare il coefficiente di un membro in divisore dell' altro, e viceversa. onde posto $\frac{a^2x}{p}+mn>ab+ax+mn$, sarà 1°. $\frac{a^2x}{p}-ax>ab$: 2° $\frac{ax}{p}-x>b$: 3°. $ax-px>bp$: 4°: $x>\frac{bp}{a-p}$.

Più cose però vi sono in cui le ineguaglianze differiscono dall'equazioni. E prima di tutto in quelle non si può come in queste trasportare i due membri l'uno in luogo dell'altro. Così mentre è indifferente scrivere $x=a-b$, oppure $a-b=x$, lo stesso non sarebbe se invece di $a>b$, si scrivesse $b>a$, il che è bene evidente. Occorrendo quest'inversione, convien rovesciare il segno dell'ineguaglianza, e scrivere $b<a$. Quindi neppur potremo senza la stessa cautela 1°. cambiare i segni ai due membri, operazione equivalente al trasporto dell'un membro in luogo dell'altro; 2°. moltiplicargli o dividergli per quantità negative, operazioni che portano il cambiamento totale dei segni.

In oltre date due equazioni, come $x=a-b$, $y=c+d$, possiamo sommarle e sottrarle, moltiplicarle fra loro, e divider l' una per l'altra; ma date due ineguaglianze anche omogenee, cioè col primo membro in ambedue maggiore o minor del secondo, come $m>a$, $n>a$ non sempre potremo sottrar l'una dall'altra, o divider l' una per l'altra, potendosi soltanto sommarle o moltiplicarle fra loro; perciò si potrà fare $m+n>a+b$, ovvero $mn>ab$, ma non già $m-n>a-b$, ovvero $\frac{m}{n}>\frac{a}{b}$. Anzi neppure è lecita la moltiplicazione qualora o tutte le quantità poste in confronto sian negative, o lo sieno le due minori. Così da $-3>-5$, $-6>-7$, come pure da $5>-10$, $2>-8$, malamente si concluderebbe moltiplicando, $18>35$, $10>80$; e poichè l'inalzamento d'un'ineguaglianza a potenze intere o rotte equivale alla moltiplicazione o divisione di più ineguaglianze tra loro, non può formarsi qualche potenza, o estrarsi qualche radice da un'ineguaglianza, senza le stesse cautele. Tutto questo è evidente.

All'opposto alcune operazioni che non sarebbero permesse nell'equazioni, divengon lecite nell'ineguaglianze. Così supposti a, b, p numeri interi e positivi, ed $a>b+p$, può concludersi che a più forte ragione sarà $a>b$; rigettando il p dal secondo membro senza trasportarlo nel primo, il che non sarebbe permesso nell' equazioni. Come pure da $a<b-p$ si avrà $a<b$; da $a+\frac{1}{p}>b$ si avrà $a>b$; e da

$a>\sqrt{b}$ si avrà $a>p$, se p sieno gl' interi contenuti in $\sqrt{b}$. Infine da $a>b$ sarà permesso concludere $a>-b$, come pure $-a<b$, ed $a-b>0$, $b-a<0$. Supposto $a-b=d$, avremo dunque $d>0$, e $-d<0$; d' onde si ha che lo zero è il limite di separazione tra le quantità positive e negative.

238. Ciò premesso ecco l' ordine d' operazioni che dovremo tenere per risolvere un' equazione qualunque di primo grado con un' incognita sola. Prima di tutto si comincerà dallo spogliarla dei fattori o divisori comuni ai due membri, quando ne abbia. In seguito si scioglieranno, moltiplicando (155), le parentesi entro le quali inclusa si trovasse l' incognita, come sarebbe nell' equazione $3a+bx=b+a(x-5)$, lasciando intatte le rimanenti, fino che il colpo d' occhio non ne faccia conoscere necessario lo scioglimento per dar luogo a qualche riduzione. Quindi si toglieranno i rotti riducendo tutta l' equazione al medesimo denominatore, il quale non si segnerà. Si trasporteranno nel primo membro tutti i termini con l' incognita, e nell' altro tutti i termini senza, cangiando gli uni e gli altri di segno. Si faranno in seguito tutte le possibili riduzioni a cui il trasporto può aver dato luogo, sia dei termini simili (142), sia dei fattori comuni a ciascun termine, che si segneranno con l' incognita fuori di parentesi (144), includendo al di dentro ogni restante; onde il primo membro risulti in forma di un termine solo. Si cangeranno i segni a tutta l' equazione, se questo termine risulta negativo; e in fine si trasporterà come divisore nel secondo membro il coefficiente totale dell' incognita, con che rimasta questa in tal modo sola, senza coefficiente e positiva, l' equazione sarà dunque completamente risoluta.

239. Esempj. Abbiasi l' equazione $\frac{39x}{5}+6=15x-\frac{3}{2}$. Divideremo per 3 ed avremo $\frac{13x}{5}+2=5x-\frac{1}{2}$; ridurremo al comun denominatore 10, e verrà $26x+20=50x-5$; trasporteremo, e si avrà $26x-50x=-5-20$, cioè riducendo $-24x=-25$, e cangiando i segni $24x=25$; d' onde infine, dividendo per il coefficiente 24, $x=\frac{25}{24}$. Infatti sostituito questo va-

lore nella proposta, il primo membro si cangerà in $\frac{65}{8}+6=\frac{113}{8}$, ed il secondo in $\frac{125}{8}-\frac{3}{2}=\frac{125-12}{8}=\frac{113}{8}$, come il primo.

II. Sia $\frac{3ax}{b}+x+\frac{5a}{2b}=\frac{1}{2}ax+b$. Tolti i rotti con ridurre al medesimo denominatore $2b$, avremo $6ax+2bx+5a=abx+2b^2$. Trasportando verrà $6ax+2bx-abx=2b^2-5a$; e ponendo fuori l'incognita, $x(6a+2b-ab)=2b^2-5a$; d'onde $x=\frac{2b^2-5a}{6a+2b-ab}=(172)\frac{2b^2-5a}{6a+b(2-a)}$.

III. Sia $3a(b-x)+ax=2b(a-x)$. Sciolte le parentesi verrà $3ab-3ax+ax=2ab-2bx$, ossia $3ab-2ax=2ab-2bx$; di qui $2bx-2ax=2ab-3ab=-ab$; quindi $2x(b-a)=-ab$, ed $x=\frac{-ab}{2(b-a)}=\frac{ab}{2(a-b)}$ (173).

240. Fin qui l'incognita é stata una sola: se son due, avremo altresì due equazioni (231), ove le incognite dovranno essere sparse in termini differenti, e non riunite in un termine solo, altrimenti le due equazioni non sarebbero di primo grado (234). Due metodi si conoscono per risolverle, preferibili l'uno all'altro, secondo le diverse opportunità.

I°. Metodo. Prima di ogni altra operazione, si cominci dal togliere i rotti dalle due equazioni, se ve ne sono. Quindi si sciolga una di esse relativamente alla sola incognita x, cioè riguardando l'altra y come nota, o come se fosse una di quelle quantità che abbiamo detto doversi rappresentare con le prime lettere dell'alfabeto (233). Si sostituisca quindi il valore così ottenuto di x nell'altra equazione; questa rimarrà allora con la sola incognita y, e potrà risolversi coi metodi precedenti.

Esempio I. Abbiasi I^a. $2x+3y=17$; II^a. $5x+2y=26$. Dalla I^a. si avrà $x=\frac{17-3y}{2}$, valore che posto nella II^a. darà $\frac{85-15y}{2}+2y=26$. Di qui, tolti i rotti, si ha $85-15y+4y=52$, ossia $85-11y=52$; d'onde $-11y=-33$, ossia $11y=33$, ed $y=3$. Posto questo valore nella I^a, si avrà $2x+9=17$, e quindi facilmente $x=4$: come pur si avrebbe ponendolo nella II^a.

Es. II. Abbiansi l'equazioni I^a e II^a di fianco. Tolti i rotti, avremo la III^a e IV^a. Dalla IV^a, come più semplice della III^a prendendo il valore d' y, avremo la V^a; e sostituendo questo valore nella III^a, e quindi togliendo il rotto, avremo la VI^a, che trasportati nel primo membro i termini ove è x, darà la VII^a, la quale ridotta si cangerà nell' VIII^a; d'onde in fine il valore di x, che posto nella V^a darà quello di y.

I. $ax+\frac{y}{a}=a+x+y$

II. $\frac{x}{a}+y=ax$

III. $a^2x+y=a^2+ax+ay$

IV. $x+ay=a^2x$

V. $y=\frac{a^2x-x}{a}=\frac{x}{a}\,(a^2-1)$

VI. $a^3x+x(a^2-1)=a^3+a^2x+ax(a^2-1)$

VII. $a^3x+x(a^2-1)-a^2x-ax(a^2-1)=a^3$

VIII. $x(a-1)=a^3$

$x=\frac{a^3}{a-1}\,;\,y=\frac{a^2}{a-1}(a^2-1)=a^2(a+1)$

II^o. Metodo. Dopo aver tolti i rotti, si riuniscano nel primo membro sì dell'una che dell'altra equazione tutti i termini con le incognite, e i rimanenti nel secondo. Se si facciano tutte le possibili riduzioni, potranno condursi i primi membri a non aver più che due termini, uno con l'incognita x, l'altro con l'incognita y. Si moltiplichi allora la prima equazione per il coefficiente di x nella seconda, e la seconda per il coefficiente di x nella prima; e qualora i termini con x abbiano lo stesso segno, si sottraggano una dall'altra le due nuove equazioni; se lo hanno diverso si sommino. Nell'uno e nell' altro caso x rimarrà *eliminata*, cioè sparirà dal risultamento, ed avremo un'equazione con y sola, che sciolta darà y; d'onde x come sopra.

Così nel primo esempio precedente, ove le due equazioni hanno già la forma prescritta, moltiplicando per 5 la I^a, per 2 la II^a, si avranno la III^a e IV^a, che sottratte danno la V^a, d' onde il valore di y che posto nella I^a dà infine la VI^a, dalla quale si ha x.

III^a. $10x+15y=85$

IV^a. $10x+\;4y=52$

V^a. $11y=33$

$y=\frac{33}{11}=3$

VI^a. $2x+9=17$

$2x=8\,;\,x=4.$

241. Questo metodo è tanto più prezioso, quanto che si estende con molta facilità al caso d'un più gran numero d' incognite. Abbiansi le prime tre equazioni da tergo. Si moltiplichi ciascuna di esse per il prodotto dei coefficienti di x nell'altre due,

cioè la I^a. per 16, la II^a. per 24, la III^a. per 6. Avremo così la IV^a., V^a. e VI^a. Si sottragga la V^a. e VI^a. dalla IV^a., e verranno la VII^a. e VIII^a. con le sole incognite y, z; equazioni che moltiplicate l'una per 62, l'altra per 104 daranno la IX^a. e X^a, e queste sottratte daranno finalmente l'XI^a. con la sola incognita z,

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & 3x-2y+4z=23 \\
\text{II.} & 2x+3y+5z=9 \\
\text{III.} & 8x+5y-10z=20 \\
\hline
\text{IV.} & 48x-32y+64z=368 \\
\text{V.} & 48x+72y+120z=216 \\
\text{VI.} & 48x+30y-60z=120 \\
\hline
\text{VII.} & -104y-56z=152 \\
\text{VIII.} & -62y+124z=248 \\
\hline
\text{IX.} & -6448y-3472z=9424 \\
\text{X.} & -6448y+12896z=25792 \\
\hline
\text{XI.} & 16368z=16368 \\
 & z=1
\end{array}$$

e dalla quale si avrà $z=1$. Questo valore posto nella VII^a o nell'VIII^a. farà trovare $y=-2$, ed ambedue posti in una qualunque delle prime tre daranno in fine $x=5$.

242. L'esercizio insegnerà da se stesso non poche facili pratiche per render più agevole e spedita l'operazione. Così se in luogo di eliminare in principio x si fosse eliminato y moltiplicando la prima per 15, la seconda per 10, la terza per 6, avremmo avute equazioni con coefficienti numerici molto minori; ed anche più piccoli si sarebbero ottenuti se la prima si fosse moltiplicata per 5, la seconda per quattro, la terza per 2, con che si sarebbe ridotta z al medesimo coefficiente 20, cioè al minimo multiplo di quei tre coefficienti; multiplo che, quando non si presenti da se medesimo, può sempre trovarsi con la regola già data per ridurre compendiosamente più rotti al medesimo denominatore (56). Con ciò la IV^a., la V^a. e la VI^a. sarebbero venute come quì di contro. La V^a. sottratta dalla IV^a. avrebbe dato la VII^a., e la VI^a. sommata con la IV^a. avrebbe dato l'VIII^a. con la sola x; d'onde si sarebbe avuta

$$\begin{array}{ll}
\text{IV.} & 15x-10y+20z=115 \\
\text{V.} & 8x+12y+20z=36 \\
\text{VI.} & 16x+10y-20z=40 \\
\hline
\text{VII.} & 7x-22y=79 \\
\text{VIII.} & 31x=155
\end{array}$$

immediatamente $x=\frac{155}{31}=5$; e quindi dalla VII^a. $y=-2$; e da una delle prime tre $z=1$ come sopra.

243. In più alte equazioni, che suppongo $A=0$, $B=0$, ambedue con x, y si elimina x col metodo del comun divisore (58.175), cioè formando coi due primi membri il rotto $\frac{B}{A}$, e quindi cercando i resti R_1, R_2, ec. finchè non si giunga ad averne uno spogliato affatto dell'incognita x. Siccome in generale (105) $R_k = \pm AM_k \mp BN_k$, tutti questi resti dovranno esser nulli quando lo sono A, B; e per conseguenza tutti i valori di x, y atti a soddisfare all'equazioni $A=0$, $B=0$ sod-

disfaranno anche a quelle rappresentate in generale da $R_k=0$, e potranno quindi ottenersi da due qualunque di queste, come dalle proposte. Formati dunque ed eguagliati a zero gli ultimi due resti, R_{k-1}, R_k, avremo due nuove equazioni, l' una con x per lo più al primo grado soltanto, l' altra con y sola, le quali potremo assumere in luogo delle due date. Risoluta l' ultima, avremo dunque immediatamente tutti i cercati valori di y, e questi sostituiti ad uno ad uno nella prima, ci porteranno a conoscere i valori corrispondenti di x.

244. Bensì è da osservarsi che, se nella ricerca dei resti R_k si usi l'artifizio altrove raccomandato per render più semplice l'andamento dell'operazione (175.167), l' equazione finale $R_k=0$, oltre i valori di y convenienti alle due equazioni proposte, altri potrà darne dei falsi e non atti a soddisfarle. Infatti si suppongano i due polinomj A, B ordinati per x. I coefficienti di questa incognita saranno o tutti, o in parte funzioni di y; e tale potrà esser dunque anche μ, coefficiente del primo termine di B (167). Se dunque per dar mano a dividere A per B siasi secondo la regola dovuto moltiplicare A per μ^n (*ivi*), o più in generale per m multiplo qualunque o di μ o di uno o più fattori di μ, è chiaro che in luogo del sistema $A=0$, $B=0$, si viene in tal caso a sostituire l' altro $mA=0$, $B=0$, nel quale oltre tutti i valori di y primitivi e proprj del sistema dato, han luogo tutti quelli introdotti dal nuovo fattore m, o dati dall' equazione $m=0$. Questi dunque dovran pur trovarsi nell' equazion finale, la quale deriva adesso non più dal sistema proposto, ma dall' altro $mA=0$, $B=0$ surrogato in sua vece; e lo stesso ragionamento potendo estendersi anche rapporto a m_1, m_2, ec. qualora nel seguito dell' operazione occorra di moltiplicare per queste quantità i successivi resti, risulta di qui, che nell' equazione finale, oltre i valori di y proprj delle due equazioni proposte, dovranno comparir tutti quelli dati dall' equazioni $m=0$, $m_1=0$, $m_2=0$ ec estranei alle cercate soluzioni. L' ultimo moltiplicatore soltanto, o quello per cui avremo moltiplicato R_{k-2} non ne introdurrà, perchè non essendo questi in ipotesi nè fattore del resto divisore R_{k-1}, nè del quoziente p_k per natura del calcolo, non può esserlo di $R_k=m_{k-1}R_{k-2}-p_kR_{k-1}$ (105).

245. Come però tutti questi valori estranei possono anticipatamente conoscersi per mezzo appunto dell' equazioni $m=0$, $m_1=0$, ec. così sarà facile escludergli dopo averli conclusi con gli altri dall' equazione finale. Anzi potremo eliminargli da questa equazione anche prima di risolverla, dividendola per il prodotto $m\,m_1m_2$ ec., che deve esserne fattore esatto, appena che la medesima conta tra le sue radici quelle date dall' equazioni $m=0$, $m_1=0$, ec. Ma anche meglio sarà poi eliminargli nel corso dell' operazione, il che può sempre effettuarsi in forza dell' osservazione seguente. Sia β uno dei valori di y dati dall' equazione $m=0$. Se l' introduciamo nel sistema $B=0$, $R_1=0$, che nasce immediatamente dall' altro $mA=0$, $B=0$, queste due equazioni si ridurranno con la sola incognita x. In oltre siccome $y=\beta$ rende nullo m, renderà nullo anche il primo termine di B che ha in ipotesi o lo stesso m, o un summultiplo di m per coefficiente. Quindi, qualora non

accada che anche il secondo termine di B abbia per cofficiente m, o un summaltiplo di m, il che qui non supponiamo, ponendo $y=\beta$ l' equazione $B=0$ dal grado n passerà al grado $n-1$ che è quello di R_1. Le due equazioni $B=0$, $R_1=0$ essendo dunque del medesimo grado, e contenendo la stessa identica incognita x, che deve dall' una e dall' altra risultare dello stesso valore, dovranno allora essere identiche, essendo evidente che non possono aversi gli stessi valori per una medesima incognita da due equazioni di egual grado differenti tra loro. Dunque la sostituzione di β in luogo di y rende $B=R_1$, e per conseguenza $\frac{B}{R_1}=1$, quoziente esatto; e quindi $R_2=0$. Dunque il resto R_2, anche indipendentemente dalla circostanza di $B=0$, $R_1=0$, si annulla da per se stesso quando si fa $y=\beta$. Questo resto è dunque per sua natura multiplo di $y-\beta$ fattore di m. E poichè il medesimo ragionamento è applicabile a tutti gli altri fattori di m, dovrà concludersi che R_2 è multiplo di m. Potremo dunque secondo la regola dividerlo per questa quantità prima di passare alla ricerca del nuovo quoziente $\frac{R_1}{R_2}$; il che eseguito, il fattore estraneo m sparirà dal calcolo, ne potrà più avere influenza alcuna sull' equazione finale. Si dimostrerà nella maniera medesima che R_3, R_4 ec. risulteranno multipli di m_1, m_2, ec; quantità tutte che potranno in egual modo volta per volta eliminarsi prima di giungere al termine dell' operazione.

Esempio. Abbiansi le due equazioni $A=x^3y-3x+1=0$, $B=x^2(y-1)+\ldots x-2=0$. Dovremo dividere A per B (58); e siccome il quoziente risulta di due termini (170), moltiplicheremo A per $(y-1)^2$ (167), e fatta la divisione avremo per resto $R_1=-x(y^2-5y+3)+y^2-4y+1$ per il quale dovremo divider B: e come si avrebbe di nuovo un quoziente di due termini, moltiplicheremo B per $(y^2-5y+3)^2$, e fatta quindi la divisione, troveremo $R_2=y^5-10y^4+37y^3-64y^2+52y-16$, che diviso secondo la regola per $(y-1)^2$ dà l' equazione finale con la sola incognita y, e spogliata d' ogni radice estranea, $y^3-8y^2+20y-16=0$, le cui radici sono $y=2, 2, 4$, valori che posti in $R_1=0$, danno $x=1, 1, -1$.

246. Osservazioni I^a. Se l' incognite nelle due equazioni fossero alla stessa dimensione, fatto $y=zx$, e divisa l' una equazione per l' altra, verrebbe subito un' equazione in z, il cui valore posto in $y=xz$ darebbe y per x, d' onde poi x da una delle due date: per esempio, le due $3x^3+2xy^2+4y^3=a$, $2x^2y+4xy^2-y^3=b$, postovi $y=xz$ e dividendole, danno $\frac{3+2z^2+4z^3}{2z+4z^2-z^3}=\frac{a}{b}$, d' onde si ha z ec. II^a. Se alcuno dei resti si trovi multiplo di qualche funzione $\varphi(y)$ di y differente da m, m_1 ec. potremo secondo la regola dividerlo per $\varphi(y)$, purchè ai valori di y dati dall' equazione finale si aggiungano quelli dati da $\varphi(y)=0$. III^a. Se si trovi che i due polinomj A, B abbiano un fattor comune $\varphi(x,y)$, è chiaro che tutti gli infiniti valori dati (229) dall' equazione $\varphi(x,y)=0$ renderanno $A=0$, $B=0$. Il problema è dunque indeterminato. Coi valori dati da $\varphi(x,y)=0$, avranno poi luogo anche quelli che risultano operando a parte sull' equazioni $A=0$, $B=0$, dopo averle di-

vise per il fattor comune $\varphi(x,y)$. Che se il supposto fattor comune sia $\varphi(x)$ funzione della sola x, l'equazioni $A=0$, $B=0$ saranno soddisfatte dal valore o dai valori di x dati dall'equazione $\varphi(x)=0$, qualunque valore arbitrario si dia ad y. Il problema sarà dunque determinato rapporto ad x, indeterminato rapporto ad y. IV^a. Se l'ultimo resto non contenga y, e si riduca ad un numero N, avremo l'equazione assurda $N=0$, d'onde si concluderà che assurde sono altresì le condizioni del problema. V^a. Se la sostituzione di una qualche radice β dell'equazion finale, faccia sparire x dall'equazione formata col penultimo resto, $x=\infty$ sarà il valore di quest'incognita corrispondente ad $y=\beta$. Infatti il penultimo resto ove x è al primo grado (243), non può aver che la forma $Tx+L$, con T ed L funzioni di y. Questo resto darà dunque $Tx+L=0$, nè potrà sparire x sè non sia $T=0$; e poichè in generale $x=-\frac{L}{T}$, sarà in questo caso $x=-\frac{L}{0}$ infinito.

247. Termineremo con osservare di passaggio come in alcuni casi una sola equazione può servire a determinare due incognite, o per meglio dire può risolversi in due, atte a determinare l'una incognita e l'altra. Tale sarebbe l'equazione $(x-a)^2+(y-b)^2=0$, quando si sappia che x ed y son reali; poichè in tal caso ambedue i quadrati essendo positivi, non è possibile che l'uno distrugga l'altro: se dunque la lor somma è zero, conviene che ciascuno dei due si annulli da se medesimo, e che si abbia $(x-a)^2=0$, $(y-b)^2=0$, e quindi ancora $x-a=0$, $y-b=0$, il che dà $x=a$, $y=b$. Tale pure sarebbe l'altra $ax+y\sqrt{\pm b}=g+p\sqrt{\pm b}$, ossia $ax-g+(y-p)\sqrt{\pm b}=0$, se tutte le quantità note ed ignote fossero per condizione reali e razionali; poichè in tal caso la prima parte $ax-g$ essendo reale e razionale, non può esser distrutta dalla seconda $(y-p)\sqrt{\pm b}$, che è o irrazionale se ha luogo il segno di sopra, o immaginaria se ha luogo quello di sotto. Le due parti dunque si annulleranno da se medesime, e si avrà $ax-g=0$, $(y-p)\sqrt{\pm b}=0$, o più semplicemente $y-p=0$; e di qui $x=\frac{g}{a}$, $y=p$.

Applicazioni delle Teorie precedenti alla soluzione dei Problemi di primo grado

248. Intendiamo per *Problema* un quesito nel quale sia proposta la ricerca d'una o più quantità dotate di qualche par-

ticolarità determinata, o atte a soddisfare a certe stabilite condizioni, o aventi relazioni assegnate con altre quantità note. Quelle che si cercano si chiamano le *incognite* del Problema; le condizioni o relazioni volute si chiamano i *dati*. Perchè il Problema sia solubile è necessario che i dati sieno tali ed in tal modo espressi, da poter concludere tra le quantità note ed ignote, e secondo il numero di quest' ultime, una o più equazioni, le quali sciolte rendan palese il valore delle quantità che si cercano.

249. Ma quando pur niente manchi nell' esposizione dei dati, il saper condurci da questi all' equazioni, nel che adunque tutto consiste il segreto della soluzione di un Problema, non è cosa che così facilmente si apprenda; tanto più che non posson darsi regole e precetti generali su questo proposito. Il solo buon senso, e l' esame attento e minuto delle condizioni proposte possono unicamente servirci di scorta. I pochi esempj che qui riportiamo serviranno intanto a dare una qualche idea dello spirito del metodo, che presso a poco dovremo negli altri casi tenere. Si scorgerà che tutta l'arte in principal modo consiste nel suppor già trovati i numeri che si cercano, rappresentargli algebricamente con i soliti simboli dell' incognite, cioè con x, y, z ec. (233), e su di essi eseguir tutte le operazioni che naturalmente si farebbero, se già conoscendone il valore, si volesse mostrare come questo realmente corrisponde alle richieste condizioni.

I°. Trovare un numero la cui metà, quarta e quinta parte sommate insieme faccian 38. Sia x il numero cercato; $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{5}x$ ne saranno la metà, la quarta e la quinta parte; la lor somma deve per condizione essere eguale a 38, avremo dunque l' equazione $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x=38$. Tolti i rotti, si ha $10x+5x+4x=38\times20$ cioè $19x=760$, d' onde $x=\frac{760}{19}=40$, numero cercato. Infatti 20 sua metà, 10 sua 4ª parte, 8 sua 5ª parte fanno 38.

II°. Qual è quel numero il cui terzo e quinto differiscon d'8? Sia x: il terzo sarà $\frac{1}{3}x$, il quinto $\frac{1}{5}x$. Dunque $\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x=8$, d' onde, tolti i rotti, $5x-3x=120$, ed $x=60$. Infatti 20 terza parte di 60, e 12 quinta parte differiscono appunto d' 8.

III°. Diviso un numero per 6 si è avuto un tal quoziente,

che sommato col divisore e col dividendo dà 69. Qual è questo numero? Sia x: il suo quoziente per 6 sarà $\frac{1}{6}x$, e quindi in forza della condizione $\frac{1}{6}x+x+6=69$, ossia $x+6x+36=414$, d'onde facilmente $x=54$. Infatti 9, quoziente di 54 diviso per 6, sommato con 54 e con 6 dà 69.

IV°. Dividere il 32 in due parti tali che moltiplicando l'una per 3, l'altra per 2, la somma dei due prodotti sia 70. Chiamo x una delle due parti, sarà $32-x$ l'altra; $3x$ sarà il prodotto della prima per 3, $2(32-x)$ quello della seconda per 2; la somma dei quali dovendo far 70, avremo visibilmente l'equazione $3x+2(32-x)=70$; cioè, sciogliendo la parentesi e riducendo, $x+64=70$, d'onde $x=6$. Sarà dunque 6 una delle parti, e quindi $32-6=26$ l'altra. Infatti la prima moltiplicata per 3 fa 18, l'altra per 2 fa 52, prodotti che sommati danno 70. Si noti che lo stesso si sarebbe trovato se nello stabilir l'equazione si moltiplicava per 2 la parte x, per 3 la parte $32-x$.

V°. Trovare un tal numero x tanto minore di 12, quanto il suo prodotto per 5 è maggiore di 30. Il sensò del quesito è che sottraendo da 12 il numero cercato x, deve aversi lo stesso resto che sottraendo 30 dal suo quintuplo $5x$. Dunque $12-x=5x-30$, ed $x=7$. Infatti il 7 è minore del 12 di 5 unità, e di altrettante è maggiore del 30 il 35 quintuplo di 7.

VI°. Dividere il 25 in due parti tali, che la maggiore contenga 49 volte la minore. Ciò vuol dire che l'una parte divisa per l'altra deve dare in quoziente 49. Sia dunque x la maggiore, sarà $25-x$ la minore, e quindi $\frac{x}{25-x}=49$, d'onde $x=49(25-x)$; e sciolta la parentesi, $x=1225-49x$; di qui $x=\frac{1225}{50}=24,5$ parte maggiore, e $25-x=0,5$ parte minore.

VII°. Un padre ha il sestuplo dell'età del figlio, e la somma delle loro età è 91. Qual'è l'età di ciascuno? Sia x l'età del padre, sarà $\frac{1}{6}x$ quella del figlio; d'onde $x+\frac{1}{6}x=91$; $6x+x=546$; $x=78$, età del padre; ed $\frac{1}{6}x=13$, età del figlio.

VIII°. A e B postisi al giuoco con egual somma han perduto. La perdita di A è 12, quella di B è 57, e B ha solo il quarto di ciò che resta ad A. Quanto avevano in principio? A-

vevano x; e poichè A perdè 12, gli resta $x-12$; mentre a B che perdè 57 resta $x-57$. Ma B rimane col quarto di ciò che resta ad A, dunque $x-57=\frac{x-12}{4}$, d'onde $x=72$.

IX°. Si hanno due tazze con un solo coperchio; l'una pesa 12 oncie, ed è ignoto il peso dell'altra, e del coperchio. Sappiamo però che posto il coperchio sulla prima si ha un peso totale triplo della seconda; postolo sulla seconda si ha un peso doppio di quello della prima. Quanto pesa la seconda tazza, quanto il coperchio? Sia x il peso del coperchio; sarà $x+12$ ciò che con esso pesa la prima tazza; e perciò $\frac{1}{3}(x+12)=\ldots$ $\frac{1}{3}x+4$ ciò che pesa l'altra senza di esso. Questa dunque insieme col coperchio peserà $x+\frac{1}{3}x+4$ ovvero $\frac{4}{3}x+4$, numero che per condizione devesser doppio di 12, quantità d'oncie che pesa l'altra. Avremo dunque $\frac{4}{3}x+4=24$; d'onde $x=15$ peso del coperchio, e $\frac{1}{3}x+4=9$ peso dell'altra tazza.

X°. Tre amici, che chiamo B, C, D giuocarono, e il giuoco di B e C fu 21 lira; quello di B e D fu 24; e quello di C e D 27. Quanto giuocò ciascuno? Posto x il denaro di B, sarà $21-x$ quello di C, e $24-x$ quello di D, che sommati debbon far 27 lire. Dunque $21-x+24-x=27$; $2x=45-27=18$, ed $x=9$, giuoco di B, il che dà 12 lire per C e 15 per D.

Osserv. Al primo aspetto le tre quantità del denaro parevano tante incognite differenti: ma osservando meglio, si vede che una determina l'altre. Perciò il numero delle incognite non dipende da quello delle questioni, ma dalla relazione che è tra le condizioni del Problema. Pur si avrebbe la soluzione introducendo più incognite: ma le soluzioni più semplici van preferite.

XI°. Un padre lascia al figlio maggiore 1000 scudi e $\frac{1}{6}$ di ciò che resta; al secondo 2000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto; al terzo 3000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto, e così fino all'ultimo. Fatte le parti, si trovarono eguali. Cerco l'asse paterno, il numero dei figli e la parte di ciascuno. Anche qui basta un'incognita; poichè conosciuto l'asse paterno, e divisolo per la parte del figlio maggiore, si avrà il numero delle parti eguali e perciò de' figli. Chiamo dunque l'asse paterno x, e pongo per comodo $1000=a$; poi dico:

quando il maggiore ha preso a, l'asse resta $x-a$, di cui dee avere $\frac{1}{6}$; dunque la sua parte è $a+\frac{1}{6}(x-a)=\frac{1}{6}(5a+x)$. La tolgo da x, e resta $x-\frac{1}{6}(5a+x)=\frac{5}{6}(x-a)$, di cui il secondo dee avere $2a$, e rimarrà $\frac{5}{6}(x-a)-2a=\frac{1}{6}(5x-17a)$, il cui sesto è $\frac{1}{36}(5x-17a)$: onde la parte del secondo è $2a+\frac{1}{36}(5x-17a)$ $=\frac{5}{36}(11a+x)$. Or le due parti sono eguali; dunque $\frac{1}{6}(5a+x)=$ $\frac{5}{36}(11a+x)$. Tolgo i rotti ed ho $30a+6x=55a+5x$, $x=25a=$ 25000; onde la parte del maggiore è 5000 scudi; e 5 sono i fratelli.

XII°. La somma di due numeri è a, la lor differenza è b: quali son questi numeri? Siano x, y; avremo $x+y=a$, $x-y=b$, equazioni che sommate danno $x=\frac{a+b}{2}$, sottratte $y=\frac{a-b}{2}$. Così se $a=10$, $b=6$, si troverà $x=8$, $y=2$.

XIII°. Indovinate le lire di A e di B: se A ne dà una a B, ne hanno un'egual somma; se B ne dà due ad A, questo ne ha il doppio di B. Sieno x quelle di A, y quelle di B: la I^a. condizione dà $x-1=y+1$, la II^a. $x+2=2(y-2)$. Sottratta la I^a. equazione dalla II^a. si ha $y=8$, col qual valore la I^a. dà $x=10$.

XIV°. Un Orefice vende 3 once d'oro e 5 d'argento per 318 lire; e 5 once d'oro e 7 d'argento per 522 lire: quanto costa l'oncia d'oro, e l'oncia d'argento? Posti x, y i valori cercati, si avrà $3x+5y=318$; $5x+7y=522$, equazioni che sciolte secondo la regola (240), danno $y=6$, ed $x=96$.

XV°. Di tre cavalli, il primo colla metà del prezzo degli altri vale 25 rusponi; l'altro con un terzo del prezzo degli altri, 26; l'ultimo colla metà del prezzo degli altri, 29. Qual è il prezzo di ciascuno? Chiamando x, y, z i tre prezzi, l'equazioni saranno $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=25$. $y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=26$, $z+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=$ 29, le quali, fatti sparire i rotti, divengono. I^a. $2x+y+z=50$, II^a. $3y+x+z=78$, III^a. $2z+x+y=58$. Tolgo la I^a. dalla II^a. e viene IV^a. $2y-x=28$; moltiplico la II^a. per 2 e ne tolgo la III^a., il che mi dà V^a. $5y+x=98$; infine sommo la IV^a. e V^a. e trovo $y=18$; onde dalla IV^a. $x=8$, e dalla III^a. $z=16$.

Equazioni del secondo grado

250. L'equazioni del secondo grado o *quadratiche* possono

tutte assai facilmente ridursi alla forma $x^2+px=q$, in cui p e q si suppongon numeri noti interi o frazionarj, positivi o negativi. Così se si abbia $3x^2+6x+5=8+5x^2+3x$, primieramente trasportando e riducendo verrà $-2x^2+3x=3$, e quindi, cambiati i segni a tutta l'equazione, $2x^2-3x=-3$, e finalmente dividendo per 2, coefficiente dell'incognita al secondo grado, $x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{3}{2}$, equazione della forma che sopra. Risoluta perciò l'equazione $x^2+px=q$ saranno risolute tutte le altre.

251. Or ciò si ottiene agevolmente cominciando dal compire il quadrato del primo membro (204), cioè aggiungendo tanto a questo che all'altro il quadrato $\frac{p^2}{4}$, poi estraendo da ambedue la radice (203), il che dà $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$, equazione di 1°. grado, che risoluta darà $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$ in generale; ed $x=\pm\sqrt{q}$ nel caso particolare che sia $p=0$, e l'equazione proposta si riduca ad $x^2=q$.

252. L'incognita ha dunque quì due valori per causa del doppio segno inerente al radicale, e sono 1°. $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$ 2°. $x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$. Questi valori si chiamano ancora *radici* dell' equazione, le quali perciò saranno sempre due in un'equazione di secondo grado. In generale si dà il nome di *radice* al valore che ha l'incognita in qualunque equazione, o a quella qualunque quantità che sostituita in luogo dell'incognita soddisfa all' equazione (227).

253. Ora rapporto alle due radici precedenti è da notarsi 1°. che se q è positivo, come in $x^2-4x=5$, o se, essendo negativo, è $<\frac{p^2}{4}$, come in $x^2+6x=-1$, le radici saranno ambedue reali (189); 2°. e di più saranno razionali se $q+\frac{p^2}{4}$ sia un quadrato perfetto, come in $x+8x=9$; 3°. saranno poi immaginarie se q sia negativo e $>\frac{p^2}{4}$ (189), come in $x^2+5x=-20$.

254. E poichè in tutti i casi sommandole si ha $-p$, moltiplicandole si ha $-q$ (192), perciò chiamata l'una a l'altra b, avremo $p=$

$-a-b$, $q=-ab$. Se dunque l'equazione $x^2+px=q$ si riduca ad $x^2+px-q=0$, sostituiti i nuovi valori di p, q, sarà $x^2-ax-bx+ab=0$, ossia (172) $x(x-a)-b(x-a)=0$, ossia $(x-a)(x-b)=0$. Dunque *il primo membro di un' equazione del secondo grado, che abbia zero nell' altro membro e l' unità per coefficiente all'* x², *è il prodotto di due fattori semplici del primo grado della forma* x—a, x—b, *ove* a, b *sono le radici dell' equazione*. Così nell'equazione $x^2-5x+6=0$, che ha per radici $x=2$, $x=3$, il primo membro è il prodotto di $(x-2)(x-3)$. Vedremo in breve (259) come una consimile proprietà si verifica nell'equazioni d' ogni grado, e allora ne rileveremo la somma importanza. Intanto si osserverà che qualora si abbia un prodotto qualunque quadratico della forma x^2+fx+g, e se ne vogliano i fattori, basterà *mandarlo a zero*, cioè formarne il primo membro di un' equazione che abbia zero nel secondo: le radici di quest' equazione faranno, come è evidente, scoprire i fattori cercati. Ma si venga ai Problemi.

255. I°. Trovare un numero x che col suo settuplo e col suo quadrato dia 144. Dunque $x^2+7x=144$. Compito il quadrato, avrò $x^2+7x+\frac{49}{4}=144+\frac{49}{4}$, ed estraendo la radice e trasponendo, verrà $x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{(144+\frac{49}{4})}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{625}{4}}=-\frac{7}{2}\pm\frac{25}{2}$. Il segno + dà $x=-\frac{7}{2}+\frac{25}{2}=9$; il segno — dà $x=-\frac{7}{2}-\frac{25}{2}=-16$. Infatti $9\times9+7\times9=81+63=144$; come pure $-16\times-16+7\times-16=256-112=144$; esempio della doppia soluzione che ricevon l' equazioni del secondo grado.

Si paragoni $x^2+7x=144$ con l' equazione generale (250) $x^2+px=q$, si ha $p=7$, $q=144$; e dalle formule (251) $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$ verrà $x=9$ ed $x=-16$.

II°. Trovare un tal numero x che, sottratto 2 dal suo quadrato, dia il resto 1. Dunque $x^2-2=1$, ed $x^2=3$; estraendo la radice, $x=\pm\sqrt{3}$: dunque la radice di 3 in + o in —, soddisfà al problema: ma essendo inassegnabile, bisogna contentarsi d' un' approssimazione.

III°. Dividere il numero 10 in due parti, il cui prodotto sia 100. Fatta x una delle parti cercate, l' altra sarà $10-x$, e

il loro prodotto $10x-x^2$; onde $10x-x^2=100$, ovvero $x^2-10x=-100$ equazione che sciolta dà $x=5\pm\sqrt{(-100+25)}=5\pm\sqrt{-75}$, valore immaginario; dunque il problema è assurdo, nè si può divider 10 in due parti il cui prodotto sia 100.

IV°. Un numero x di persoue dee pagar 342^l per egual porzione. Tre non pagando, suppliscon l'altre, il che importa a ciascuua 19^l di più. Cerco x. Si dirà: la parte di ciascuno, pagando tutti, sarebbe $\frac{342}{x}$; tre non pagando, la parte dei rimanenti è $\frac{342}{x-3}$: ma questa supera l'altra di 19, dunque $\frac{342}{x-3}-\frac{342}{x}=19$. Fatte le operazioni, si trova $x^2-3x=54$; onde $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(54+\frac{9}{4})}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{225}{4})}=\frac{3}{2}\pm\frac{15}{2}$; d'onde $x=9$, ovvero $=-6$. Delle due soluzioni la prima soltanto è visibilmente la cercata. Eran dunque 9 le persone, 6 delle quali pagando 57^l, hanno formata la somma di lire 342.

Quanto all'altra soluzione, se comparisce affatto fuor di proposito rapporto al quesito, tale non è rapporto all'equazione, a cui pienamente soddisfà del pari che l'altra. E qui conviene riflettere che in queste ricerche l'Algebra non è direttamente impiegata a render risposta al quesito, ma a risolver l'equazione che le condizioni han fatta nascere. Se la soluzione è doppia spetta al solo buon senso lo scegliere fra le due l'opportuna.

V°. Un Generale vorrebbe dispor dei Soldati in battaglion quadrato, ma nel suo primo disegno avanzano 124 uomini, e se aggiunge un uomo ad ogni fila, ne mancano 129. Quanta è la Truppa? Pongo $a=124$, $b=129$, x il numero dei Soldati d'una fila nel primo disegno; sarà $x+1$ il loro numero nel secondo: or nel primo la Truppa è x^2+a, nel secondo $(x+1)^2-b$; dunque $x^2+a=x^2+2x+1-b$; ed $x=\frac{a+b-1}{2}=126$; onde $x^2=15876$, ed $x^2+a=16000$, truppa cercata.

VI°. Si cercano due numeri tali, che il triplo del loro prodotto eguagli il doppio della lor somma, e la differenza de' lor quadrati. Sia x il più grande de' numeri, y il minore. Per la I. condizione, $2(x+y)=3xy$; per la II., $3xy=x^2-y^2$, onde $2(x+y)=x^2-y^2$. Di qui $x=y+2$; il che cangia la I. in

$4y+4=3y^2+6y$, d'onde $y=-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}$, ed $x=\frac{5}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}$.

VII°. Gli scudi di A, B son tanti che sottratta dai lor quadrati la lor somma, si ha 78; unita questa al loro prodotto, si ha 39. Quanti sono? Gli chiamo x, y, e operando nei modi soliti, il problema, che è del secondo grado, comparisce del quarto. In tali casi potrà farsi così. Sia $2x$ la somma degli scudi, $2y$ la lor differenza: dunque (249.XII) il maggiore sarà $x+y$, il minore $x-y$. Si avrà perciò I°. $(x+y)^2+(x-y)^2-2x=78$, cioè $39=x^2+y^2-x$; II°. $(x+y)(x-y)+2x=39=x^2-y^2+2x$. Sommando verrà $2x^2+x=78$, che risoluta dà $x=-\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=6$, onde $y^2=39+x-x^2=9$, $y=3$, e i numeri cercati $x+y=9$, $x-y=3$.

256. Dee qui osservarsi che l'equazioni di questa forma $x^{2m}+px^m=q$, si risolvono come quelle del secondo grado; poichè fatta $x^m=y$, si riducono ad $y^2+py=q$, onde $y=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$, che dà $x=\pm\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}\right)}$.

Equazioni dei gradi superiori al secondo
Nozioni preliminari

257. Sia l'equazione $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+$ ec.... $+\Omega=0$, del grado qualunque m, ordinata per x, con zero nel secondo membro, con l'unità positiva per coefficiente al termine ove l'incognita è al più alto grado, e con gli altri coefficienti A, B, C ec. noti e qualunque, purchè reali e razionali; condizioni che sempre supporrò in avvenire. E per maggior comodo sia quest'equazione rappresentata da $X=0$.

258. Comincerò dal rammentare che se il polinomio X si divida per il binomio semplice di primo grado $x-a$, avremo un resto A_m corrispondente in tutto a ciò che diviene X quando vi si pone a in luogo di x (171). Sia frattanto a il valore o uno dei valori che posti in X in luogo di x soddisfanno all'equazione $X=0$ (227) ossia rendon nullo X. In tal caso è visibile che anche il resto A_m dovrà esso pure esser nullo. La divisione sarà dunque esatta, ed $x-a$ sarà fattore di X (31.2°). Quindi poichè

un valore qualunque di x atto a soddisfare l'equazione $X=0$ deve necessariamente sempre aver luogo (227), così il polinomio X quando abbia la forma prescritta non può non essere un prodotto di un fattore almeno di primo grado della forma di $x-a$, e di un altro che rappresenteremo con X_1, e che siccome vedemmo (171) sarà del grado $m-1$, e della forma stessa di X.

259. Dunque $X=X_1(x-a)$. Perciò se $m=2$, e per conseguenza X_1 di primo grado, sarà X il prodotto di due fattori di primo grado, come si sapeva (254).

Se $m=3$ sarà X_1 del secondo grado; ed X, oltre $x-a$, avrà i due fattori semplici contenuti in X_1, cioè sarà il prodotto di tre fattori consimili ad $x-a$.

Se $m=4$ sarà X_1 del terzo grado; ed in X, oltre $x-a$, saran contenuti i tre fattori semplici contenuti in X_1, cioè avrà quattro fattori semplici conformi ad $x-a$. E proseguendo a ragionare nella guisa stessa per ogni susseguente valor di m, si perverrà a concludere in generale, che *il primo membro d'un equazione del grado* m *è il prodotto di* m *fattori semplici di primo grado, della forma di* x—a.

260. Sieno $x-a$, $x-b$, $x-c$, ec. questi fattori. Avremo $X=(x-a)(x-b)(x-c)$ ec. $=0$, e questa seconda equazione sarà *identica* alla proposta $X=0$, cioè sarà la stessa, sotto forma diversa; e ambedue goderanno delle medesime proprietà.

Ora è ben manifesto che, qualunque delle quantità a, b, c, ec. si ponga nella seconda in luogo di x, il primo membro divien nullo, e l'equazione è perciò soddisfatta. Dunque tutte le predette quantità sono altrettante radici dell'equazione (252), e perciò *ogni equazione del grado* m, *ha sempre* m *radici*.

261. Oss. I. Se i fattori son noti, ciascun di essi eguagliato a zero farà agevolmente conoscere una delle radici. All'opposto se son note le radici, eguagliandole all'incognita e quindi mandando a zero l'equazioni, verranno a formarsi i fattori. Perciò se dato un prodotto algebrico P, purchè di forma analoga ad X (257), si faccia $P=0$, le radici di questa equazione, qualora possano rilevarsi, faran conoscere i fattori da cui P risulta. Così se per esempio sia $P=x^m-1$, poichè, fatto $x^m-1=0$, quest'equazione è

visibilmente soddisfatta da $x=1$, sarà dunque $x-1$ un fattore esatto di x^m-1; ed infatti $x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\text{ec.}\ldots+1)$; dal che intanto si apprende quest'utile e bella conseguenza che *qualunque potenza diminuita di un' unità è multipla della sua radice diminuita parimente d' un' unità*, come ciascuno può facilmente verificar con esempj. Che se una o più delle radici a, b, c, ec. dell'equazione sieno zero, l'equazione avrà altrettante volte x per fattore; sarà dunque divisibile altrettante per x, e viceversa.

262. II. Se nella proposta si cangi x in $-x$ anche i valori a, b, c, ec. di x si cangeranno in $-a$, $-b$, $-c$, ec., cioè le radici della nuova equazione saranno eguali, ma di segno contrario a quelle della prima in modo che le radici positive della prima saranno radici negative della seconda, e viceversa. Frattanto se m è pari il cangiamento di x in $-x$ riduce la prima ad $x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-\text{ec.}\ldots+\Omega=0$, e se m è impari la riduce a $-x^m+Ax^{m-1}-Bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots+\Omega=0$, che cangiati i segni diviene $x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-\text{ec.}\ldots-\Omega=0$. In ambedue i casi non perdono dunque il loro segno che i termini di posto pari, e perciò *due equazioni, che soltanto differiscan fra loro nei segni dei termini di posto pari, hanno le radici stesse, ma con segno diverso.*

263. Se si cangia x in $\frac{1}{x}$, l'equazione diverrà $1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots+\Omega x^m=0$ che avrà per radici $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ec., e per fattori $\frac{ax-1}{a}$, $\frac{bx-1}{b}$, $\frac{cx-1}{c}$, d'onde $(ax-1)(bx-1)(cx-1)$ ec. $=0=(1-ax)(1-bx)$ ec. Quanto però ai coefficienti A, B, C ec. conserveranno gli stessi valori della proposta, e sarà perciò (285.3°.) $A=a+b+c+$ ec., $B=ab+ac+$ ec. $C=abc+$ ec. ed Ω sarà il prodotto di tutti i coefficienti che ha x in ciascun dei fattori.

264. Viceversa se a, b, c, ec. sieno le radici di $1+Ax+Bx^2+Cx^3$ ec. $\ldots+\Omega x^m=0$, saranno $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ec. le radici dell'altra $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\text{ec.}\ldots+\Omega=0$, supponendo al solito in ambedue eguali i coefficienti A, B, C ec.

265. Se $-M$ sia il massimo coefficiente negativo di X, e si ponga $x=M+1$, X risulterà positiva. Infatti poichè $X=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots+\Omega$, e (261) si ha $x^m=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\text{ec.}\ldots+1)+1$, sarà dunque $X=\ldots$ $(x-1+A)x^{m-1}+(x-1+B)x^{m-2}+(x-1+C)x^{m-3}+\text{ec.}+(x-1+\Omega)+1$,

ed è chiaro che niun coefficiente può rimaner negativo quando $x-1=M$, ovvero $x=M+1$. A più forte ragione si avrà un resultato positivo se si ponga $x>M+1$. Quindi i veri valori di x, che rendono $X=0$, dovranno esser minori di $M+1$, che perciò potrà riguardarsi come un limite delle radici positive dell'equazione. Quanto al limite delle radici negative potrà trovarsi cangiando nella proposta x in $-x$ (262), e cercando nel modo medesimo il limite delle radici positive della trasformata, che corrispondono alle negative della proposta.

266. Se due quantità reali p, q successivamente poste in luogo di x nell' equazione, rendono il primo membro X, l'una positivo, l'altra negativo, l'equazione avrà per lo meno una radice reale contenuta fra p, q. Infatti nel primo caso X si converte in $(p-a)(p-b)(p-c)$ ec., nel secondo in $(q-a)(q-b)(q-c)$ ec. Ora se p, e q fossero o ambedue maggiori, o ambedue minori di ciascuna radice reale, i fattori $p-a$ e $q-a$, $p-b$ e $q-b$, ec. avrebbero respettivamente segni eguali, e in conseguenza eguali sarebbero pure i segni dei loro prodotti. Se ciò non succede, è dunque chiaro, che una almeno delle radici, come per esempio a, è contenuta fra p e q, nel qual caso i due fattori $p-a$, $q-a$ risultando necessariamente di differente segno, fanno diversificar di segno anche i prodotti.

267. Per altro se tra p, q restin contenute o due, o quattro, o più radici in numero pari, i resultamenti delle due sostituzioni non potranno esser giammai di segno diverso; poichè i fattori che cambian di segno essendo allora in numero pari, il loro prodotto parziale sarà sempre positivo, e quindi non potrà influire sul segno del prodotto totale. Non così se le radici contenute sieno in numero impari, come è evidente. Se poi tutte le radici fossero immaginarie, non potendo queste trovarsi fra le quantità reali p e q, qualunque valore abbiano queste due quantità, la loro sostituzione non darà mai risultamenti di segno differente.

268. Ogni equazione con l'ultimo termine negativo ha per lo meno una radice reale positiva: poichè, fatto $x=0$, si ha $X=-\Omega$, fatto $x=M+1$ (265) si ha X positivo; vi è dunque una radice reale positiva contenuta fra zero ed $M+1$ (266).

269. Ogni equazione di grado impari con l'ultimo termine positivo, ha una radice reale negativa; poichè posto $-x$ per x, l'ultimo termine diviene negativo (262), e la nuova equazione ha dunque una radice reale positiva (268), che sarà radice negativa della proposta (262).

270. Ogni equazione di grado pari con l'ultimo termine negativo ha una radice reale positiva, come si sa (268), ed una negativa; poichè posto $-x$ per x, l'ultimo termine non si cangia (262); dunque la nuova equazione ha una radice positiva (268), e la data ne ha una negativa. Perciò ogni equazione che non abbia radice alcuna reale dovrà esser di grado pari, ed aver l'ultimo termine positivo.

271. In ogni equazione di grado pari mancante di tutti i termini di con x a potenza pari, ad ogni radice positiva ne corrisponderà una eguale negativa. Infatti ponendo $x^2=y$ ne nascerà un'equazione completa, ed ogni radice di questa ne darà due per la proposta espresse da $x=\pm\sqrt{y}$. E la stessa proprietà avrà luogo nel caso medesimo

per l'equazioni di grado impari mancanti di x a potenza pari; ma queste avran di più una radice zero. Infatti nella supposta ipotesi dovrà mancare l'ultimo termine; l'equazione sarà dunque divisibile per x, che ne sarà perciò un fattore e darà luogo all'equazione $x=0$ (261). Divisa l'equazione per x, ne risulterà un'altra di grado pari, in cui avrà dunque luogo la proposizione già dimostrata.

272. Se nella proposta abbiansi una o più coppie di radici eguali, ma di segno contrario, e quindi dei fattori della forma x^2-a^2, sì quelle che questi rimarranno anche nella trasformata, che nasce dal porre $-x$ in luogo di x. Sia frattanto P il prodotto dei fattori di cui si tratta, potremo rappresentar con PX_1 la proposta, e con PX_2 la trasformata, e chiamata M la somma dei termini di posto impari, ed N quella dei termini di posto pari, avremo dalla proposta $M+N=PX_1$ e dalla trasformata $M-N=PX_2$; d'onde, sommando e sottraendo, $M=\frac{1}{2}P(X_1+X_2)$, $N=\frac{1}{2}P(X_1-X_2)$. Dunque M ed N avranno P per comun divisore, che la nota regola (175) farà assai facilmente discoprire. Dopo di che, l'equazione $P=0$ darà tutte le radici e tutti i fattori del genere di cui parliamo. Es. Sieno da trovarsi i fattori della forma x^2-a^2 nell' equazione $x^7+3x^6-3x^5-9x^4+4x+12=0$. Sarà $M=x^7-3x^5+4x$, $N=3x^6-9x^4+12$, che hanno per comun divisore x^6-3x^4+4. Eguagliandolo a zero (261), e facendo $x^2=y$ (271), nasce l'equazione $y^3-3y^2+4=0$, che ha per radici -1, $+2$, $+2$. La proposta avrà dunque per fattori x^2+1, x^2-2, x^2-2 tutti della forma richiesta.

273. Se l'equazione $X=0$ abbia una radice immaginaria, ed espressa da $a+b\sqrt{-1}$, ne avrà parimente un'altra espressa da $a-b\sqrt{-1}$. Infatti dovendo in tal caso aversi (258) $X=X_1(x-a-b\sqrt{-1})$, ed X essendo reale (257), anche X_1 sarà immaginario (199) e potrà esprimersi con $A+B\sqrt{-1}$. Sarà dunque $X=(x-a)A-Ab\sqrt{-1}+(x-a)B\sqrt{-1}+bB=0$, d'onde per il noto principio (247), $(x-a)B=Ab$, ed $(x-a)A=-bB$, equazioni che moltiplicate danno $(x-a)^2=-b^2$, d'onde $x=a\pm b\sqrt{-1}$. Quindi le radici immaginarie di un' equazione dovranno esser sempre in numero pari: e perciò un' equazione di grado impari dovrà aver sempre per lo meno una radice reale.

274. Dalle due radici $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$ si hanno i fattori $x-a-b\sqrt{-1}$, $x-a+b\sqrt{-1}$ (261), il cui prodotto $x^2-2ax+a^2+b^2$ è reale. Quindi il polinomio X è sempre decomponibile in fattori reali o di primo o di secondo grado.

275. Se nella proposta si ponga $x=\frac{y}{h}$ avremo la trasformata $y^m+Ahy^{m-1}+Bh^2y^{m-2}+Ch^3y^{m-3}+$ ec... $+h^m\Omega=0$, le cui radici saranno quelle della proposta moltiplicate per h. Se A, B, C ec. sieno frazionarj, e si eguagli h o al prodotto totale, o al numero multiplo di ciascun denominatore (56), il numeratore di ciascun coefficiente della nuova trasformata diverrà visibilmente multiplo del respettivo denominatore, e perciò spariranno i rotti da tutta l'equazione. Con questo mezzo un' equazione con rotti può cangiarsi in un' altra che non ne abbia.

276. Se si fa $x = y + h$ avremo l' altra trasformata

$$\left.\begin{array}{l} y^m + my^{m-1}h + m\frac{(m-1)}{2}y^{m-2}h^2 + m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}y^{m-3}h^3 + \text{ec} \ldots + h^m \\ + Ay^{m-1} + (m-1)Ay^{m-2}h + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ay^{m-3}h^2 + \text{ec.} \ldots + Ah^{m-1} \\ \quad + \quad By^{m-2} + \quad (m-2)By^{m-3}h + \text{ec} \ldots + Bh^{m-2} \\ \quad\quad + \quad Cy^{m-3} + \text{ec} \ldots + Ch^{m-3} \\ \quad\quad\quad + \text{ec.} \ldots + \text{ec.} \\ \quad\quad\quad\quad + \Omega \end{array}\right\} = 0$$

le cui radici equivarranno a quelle della proposta diminuite o accresciute di h, secondo che h sarà positiva o negativa. Può anche osservarsi che l' ultimo termine non è che il primo membro dell' equazione proposta col solo cambiamento di x in h. Onde se $h = 1$ questo termine eguaglierà la somma dei coefficienti della proposta.

277. Posto $h = -\frac{A}{m}$ sparirà il secondo termine della trasformata. Perciò *un' equazione col secondo termine si cangia in un' altra che non lo abbia, con eguagliar l'incognita x ad una nuova incognita y unita al coefficiente del secondo termine, preso con segno contrario, e diviso per il grado dell' equazione.* Se A non sia multiplo di m e vogliano evitarsi i rotti che la sostituzione introdurrebbe, si farà $x = \frac{y - A}{m}$ (275). Se poi vogliasi togliere il terzo, o il quarto termine, dovremo prendere il valore di h dall' equazioni $\frac{m(m-1)}{2}h^2 + (m-1)Ah + B = 0$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^2 + (m-2)Bh + C = 0$, i cui primi membri sono i coefficienti dei termini terzo e quarto. Generalmente però non è utile che l' espulsion del secondo. È poi da avvertirsi che non sarà sempre possibile espellere i termini oltre il secondo, perchè dalle stabilite equazioni può aversi h immaginario, con che la trasformata non risulterebbe sotto forma reale.

278. Se h si determini in modo che tutti i termini della trasformata risultino positivi, y non avrà alcun valor positivo (285. 2°.). Onde poichè $x - h = y$, sarà $x - h$ una quantità negativa, e perciò h maggior di tutti i valori positivi di x, ossia il limite delle radici positive della proposta più prossimo al vero dell' altro già trovato sopra (265). Quanto a quello delle radici negative si avrà col metodo già praticato (*ivi*).

279. Se $h = a$, essendo a una delle radici della proposta, le radici y della nuova equazione saranno eguali ad $x - a$, cioè alla differenza fra ciascuna delle radici o valori di x, e la data radice a. Una delle radici sarà dunque $y = a - a = 0$, cioè y sarà fattore dell' equazione (261), che dovendo perciò esser tutta quanta divisibile per y, mancherà quindi dell' ultimo termine, il quale dovrà in conseguenza annullarsi da se medesimo. Il che anche d' altronde è manifesto; poichè non essendo quest' ultimo termine che il primo membro della proposta, cangiato x in h (276), dovrà esser nullo quando h eguagli alcuno dei valori di x (257).

280. Che se la proposta abbia n radici eguali ad a, la trasformata avrà n fattori eguali ad y, e dovendo perciò esser tutta divisibile per y^n mancherà degli ultimi n termini, che tutti si annulleranno da se stessi. In tal caso la radice a, supposta n volte ripetuta, dovrà soddisfare ad un numero n delle seguenti equazioni (276)

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+Ca^{m-3}+\text{ec.}\ldots+\Omega=0$$
$$ma^{m-1}+(m-1)Aa^{m-2}+(m-2)Ba^{m-3}+\text{ec.}\ldots=0$$
$$m(m-1)a^{m-2}+(m-1)(m-2)Aa^{m-3}+(m-2)(m-3)Ba^{m-4}+\text{ec.}=0$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

ossivvero, dovrà, ponendola in luogo di x, soddisfare ad un numero n delle seguenti

$$\text{I.}^a \quad x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+\text{ec.}=0$$
$$\text{II.}^a \quad mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+(m-3)Cx^{m-4}+\text{ec.}=0$$
$$\text{III.}^a \quad m(m-1)x^{m-2}+(m-1)(m-2)Ax^{m-3}+(m-2)(m-3)Bx^{m-4}+\text{ec.}=0$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

ciascuna delle quali non è che il coefficiente differenziale (1223) o, come suole anche dirsi, la derivata prima della sua precedente.

281. Abbia dunque la proposta n radici eguali ad a, e per conseguenza un fattore multiplo della forma $(x-a)^n$. Potremo rappresentarla con $X_1(x-a)^n=0$. Differenziandola si ha $n(x-a)^{n-1}.X_1+(x-a)^n\dfrac{dX_1}{dx}=0$, che equivarrà alla II.ª, e che potrà rappresentarsi con $X_2(x-a)^{n-1}=0$. Questa, differenziata, dà $(n-1)(x-a)^{n-2}\times X_2+(x-a)^{n-1}\dfrac{dX_2}{dx}=0$ che equivarrà alla III.ª, e potrà rappresentarsi con $X_3\times(x-a)^{n-2}=0$. Dal che si conclude che ciascuna di queste equazioni contiene il fattore $x-a$ una volta meno che la sua precedente.

Or ciò che si è detto del fattore $x-a$, dovendosi visibilmente verificare per qualunque altro fattore multiplo della proposta, supponiamo che questa abbia le tre radici a, b, c ripetute l'una n, l'altra p, la terza q volte, e che in conseguenza ne sia fattore $(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q$. Le tre equazioni verranno rappresentate da $X_1(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q=0$, $X_2(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}=0$, $X_3(x-a)^{n-2}\times(x-b)^{p-2}(x-c)^{q-2}=0$, ed i coefficienti di X_2 nella II.ª, di X_3 nella III.ª, saranno fattori comuni l'uno della I.ª e della II.ª, l'altro della I.ª, della II.ª e della III.ª. Trovati con la nota regola (175) questi fattori, diviso il primo per il secondo, ed eguagliato a zero il quoziente, risulterà l'equazione $(x-a)(x-b)(x-c)=0$, che avrà per uniche radici le singole radici multiple della proposta. Con ciò potremo conoscere il valore di tutte le radici che si trovano ripetute nella proposta. Quante poi al numero delle ripetizioni di ciascuna radice, si concluderà da quello delle derivate a cui ciascuna si troverà soddisfare. Si noti 1.° che se per divisor comune della I.ª e II.ª s'incontri $(x-a)(x-b)(x-c)$ ciò indicherà che le radici a, b, c non sono che due volte ripetute nella prima, e potremo averle ponendo come sopra $(x-a)(x-b)(x-c)=0$ senza procedere alla ricerca del comun divisore della II.ª e III.ª che non si troverebbe. 2.° Se il divisor comune fra la proposta e la de-

rivata prima risulti di secondo grado, e sia o un quadrato perfetto, o un prodotto di due fattori inegnali, nella prima ipotesi la radice del quadrato sarà tre volte ripetnta nella proposta, nella seconda le radici date dai due fattori vi si troveranno ripetute due volte. E qui pure nell'un caso e nell'altro sarà inutile sperimentare il divisor comune fra la seconda e la terza, e inutile lo sperimento delle radici nelle derivate susseguenti.

Es. Sia l'equazione $x^6-4x^5+3x^4+3x^2+4x+1=0$. Avremo per prima derivata $6x^5-20x^4+12x^3+6x+4=0$, che in comune con la proposta ha il divisore di secondo grado x^2-2x-1. Lo eguaglio a zero, ed ottengo le due radici ineguali $x=1\pm\sqrt{2}$, ciascuna delle quali sarà dunque due volte ripetuta nella proposta. Infatti formati i fattori $x-1-\sqrt{2}$, $x-1+\sqrt{2}$, e divisa la data per $x^4-4x^3+2x^2+4x+1$ prodotto dei loro quadrati, o quadrato del loro comun prodotto x^2-2x-1, trovo il quoziente esatto x^2+1, che mi dà in seguito le altre due radici ineguali $x=\pm\sqrt{-1}$. Ma torniamo alla trasformata.

282. Continuando a supporre $h=a$ e divisa la trasformata per y (279), la nuova equazione del grado $m-1$, avrà per radici le differenze fra la radice a, e ciascuna delle rimanenti b, c, d ec. della proposta, e quindi potrà rappresentarsi con

$$\big(y-(b-a)\big)\big(y-(c-a)\big)\big(y-(d-a)\big)\ldots=0.$$

Del pari posta $h=b$, $=c$ avremo

$$\big(y-(a-b)\big)\big(y-(c-b)\big)\big(y-(d-b)\big)\ldots=0$$
$$\big(y-(a-c)\big)\big(y-(b-c)\big)\big(y-(d-c)\big)\ldots=0;$$

e così proseguendo potremo ottenere un numero m d'equazioni tutte dello stesso grado $m-1$. Se si moltiplichino insieme ne nascerà una nuova del grado pari $m(m-1)$ che avrà per radici le radici singole delle equazioni dal cui prodotto risulta, ossia le differenze fra ciascuna radice della proposta e ciascun'altra delle rimanenti; per il che vien detta *equazione delle differenze*. È poi chiaro che questa equazione avrà soltanto termini con y a potenza pari. Infatti ad ogni fattore come $y-(b-a)$, ne corrisponde un altro $y-(a-b)=y+(b-a)$, che moltiplicati insieme danno il fattor quadratico $y^2-(b-a)^2$; e ben si vede che da fattori quadratici tutti di questa forma, non può derivare un prodotto ove y sia a potenza impari: onde posto $m(m-1)=2n$, potremo rappresentarla con $y^{2n}+A_1y^{2n-2}+B_1y^{2n-4}+C_1y^{2n-6}+\text{ec.}=0$. Posto poi $y^2=z$ risulterà l'altra completa $z^n+A_1z^{n-1}+B_1z^{n-2}+C_1z^{n-3}+\text{ec.}=0$ che avrà per radici i quadrati y^2 delle differenze fra le radici della proposta. Vedremo (291) come comporla anche non conoscendo quest'ultime.

283. Intanto 1.° Se la proposta ha una o più coppie di radici eguali, l'equazione in z avrà altrettante radici eguali e zero. 2.° Se i segni di questa equazione son tutti positivi, e quindi tutte negative le radici (285. 2.ª), da $y^2=z$ avremo y immaginario, e perciò le radici della proposta o tutte immaginarie, o una sola reale. All'opposto se i segni sono alternativi e perciò tutti i valori di z positivi (*ivi*), la proposta avrà tutte ra-

dici reali. Se poi i segni alternino in parte e in parte si succedano, la proposta avrà delle radici immaginarie e delle reali.

284. Infine se fatto $z=\frac{1}{\nu}$ sia l il limite delle radici positive nella nuova equazione che ne risulta, sarà $\frac{1}{l}$ minore di tutti i valori positivi di z o di y^2(282), e perciò qualunque differenza tra le radici della proposta sarà maggiore di $\frac{1}{\sqrt{l}}$, ed a più forte ragione maggiore di $\frac{1}{\lambda}$, se si rappresenti con λ il numero intero immediatamente superiore a $\sqrt{l}$. Quindi se si costruisca la serie $0, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}$ ec. prolungata fino al limite delle radici positive della proposta (265.278), tutte queste radici saran contenute fra il primo ed ultimo termine della serie, ma fra un termine e l' altro non potrà esser contenuta più d' una radice ineguale. Infatti sieno a, e $b=a+d$ due radici qualunque, e si supponga a compresa fra $\frac{n}{\lambda}$, ed $\frac{n+1}{\lambda}$. Avremo $a>\frac{n}{\lambda}$, $d>\frac{1}{\lambda}$; e poichè $b=a+d$, sarà quindi $b>\frac{n+1}{\lambda}$, nè potrà perciò esser contenuta come a tra $\frac{n}{\lambda}$ ed $\frac{n+1}{\lambda}$. Dunque sostituiti ad x l' un dopo l' altro nella proposta i valori $0, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}$ ec. avremo tante variazioni di segno (266), quante saranno le radici reali positive ed ineguali; e il rotto avanti a quello che darà luogo alla variazione, sarà un valore prossimo della radice da cui differirà meno di $\frac{1}{\lambda}$.

285. Si prendano adesso a considerare le particolari equazioni $(x-a)(x-b)=0$, $(x-a)(x-b)(x-c)=0$, $(x-a)(x-b)\times(x-c)(x-d)=0$, ec. Sviluppando i prodotti avremo

$$\left.\begin{array}{l} x^2-ax+ab \\ \quad -bx \end{array}\right\}=0 \qquad \left.\begin{array}{l} x^4-ax^3+abx^2-abcx+abcd \\ \quad -bx^3+acx^2-abdx \\ \quad -cx^3+adx^2-bcdx \\ \quad -dx^3+bcx^2 \\ \qquad\quad +bdx^2 \\ \qquad\quad +cdx^2 \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3-ax^2+abx-abc \\ \quad -bx^2+acx \\ \quad -cx^2+bcx \end{array}\right\}=0$$

In tutte si osserveranno le tre seguenti proprietà, che per un'induzione evidentemente permessa, potran giudicarsi convenire a qualunque altra equazione di più alto grado.

1ª. Il numero completo dei termini dovuti ad un'equazione supera di un'unità quello che ne determina il grado. Può accader però che nella riduzione qualche coefficiente si annulli

(142), e in questo caso l'equazione mancherà del termine a cui quel coefficiente appartiene.

2°. I segni sono alternativi se le radici son tutte positive. Si cangerebbero tutti in positivi se le radici fossero tutte negative, nel qual caso i fattori $x-a$, $x-b$, ec. divengono $x+a$, $x+b$, ec. (262).

3°. Il coefficiente del secondo termine è la somma delle radici prese con segno contrario; il terzo, il quarto, il quinto, il sesto ec. son respettivamente le somme dei prodotti delle radici moltiplicate a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, a cinque a cinque ec., e prese coi loro segni nei termini di posto impari, con segni contrarj nei termini di posto pari; l'ultimo è il prodotto di tutte le radici, prese con segno contrario se l'equazione è di grado impari, e quindi questo termine di posto pari. D'onde intanto potremo concludere che se in un'equazione manchi il secondo termine, la somma delle radici positive eguaglierà quella delle negative; se manchi l'ultimo una almeno delle radici sarà zero.

286. Quando non bastasse l'induzione per assicurarci della generalità di queste leggi, si supponga che l'equazione $X_1 = x^{m-1} + A_1x^{m-2} + A_2x^{m-3} + A_3x^{m-4} +$ ec. $= 0$ del grado $m-1$ e con le radici b, c, d ec. sia l'ultima fra quelle sulle quali se ne è verificata col fatto la sussistenza, e che da questa moltiplicata per $x-a$ nasca l'altra $X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ ec. del grado m. Saranno in $X=0$ tutte le radici di $X_1=0$ con più la radice a proveniente dal nuovo fattore $x-a$ (259). Inoltre avremo (174) $A = A_1 - a$, $B = A_2 - aA_1$, $C = A_3 - aA_2$, ec. Ma in ipotesi $A_1 = -b-c-d-$ec.; $A_2 = bc+bd+cd+$ec.; $A_3 = -bcd-$ec.; dunque $A = -a-b-c-d-$ec.; $B = ab+ac+ad+bc+bd+$ec.; $C = -abc-abd-bcd-$ec.; cioè le leggi stesse state già verificate nella prima equazione continuano a verificarsi anche nella sua susseguente, dunque anche in un'altra che in egual modo si facesse nascer da questa, e così in tutte le successive.

287. Frattanto se l'equazione $X=0$ si divida successivamente per ciascuno dei suoi m fattori, cioè prima per $x-a$, poi la stessa per $x-b$, poi per $x-c$, ec., e sieno A_1, A_2, A_3, ec. i coefficienti del secondo, terzo, quarto termine del quoziente primo; B_1, B_2, B_3, ec. quelli del quoziente secondo; C_1, C_2, C_3, ec. quelli del terzo ec.: mancherà in A_1, A_2, A_3, ec. la radice a e suoi prodotti; in B_1, B_2, B_3 ec. la radice b e suoi prodotti; in C_1, C_2, C_3, ec. la radice c e suoi prodotti, ec. Applicati perciò i valori di A, B, C ec. del num°. precedente, dedurremo con ogni facilità

$A_1 = A + a$ $\quad A_2 = B - ab - ac - ad - \text{ec.}$ $\quad A_3 = C + abc + abd + acd + \text{ec.}$

$B_1 = A + b$ $\quad B_2 = B - ab - bc - bd - \text{ec.}$ $\quad B_3 = C + abc + abd + bcd + \text{ec.}$

$C_1 = A + c$ $\quad C_2 = B - ac - bc - cd - \text{ec.}$ $\quad C_3 = C + abc + acd + bcd + \text{ec.}$

$D_1 = A + d$ $\quad D_2 = B - ad - bd - cd - \text{ec.}$ $\quad D_3 = C + abd + acd + bcd + \text{ec.}$

ec. ec. ec.

e di qui sommando

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + \text{ec.} = mA + a + b + c + d + \text{ec.} = mA - A = A(m-1)$$

$$A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + \text{ec.} = mB - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - \text{ec.} = mB - 2B = B(m-2)$$

$$A_3 + B_3 + C_3 + D_3 + \text{ec.} = mC + 3abc + 3abd + 3bcd + \text{ec.} = mC - 3C = C(m-3)$$

e in generale, supposta k non $> m$, $A_k + B_k + C_k + D_k + \text{ec.} = R(m-k)$, ove per R deve intendersi significato il coefficiente di x^{m-k}.

D'altronde le formule del num.° 171 danno, o portano a concludere

$A_2 = a^2 + aA + B$ $\quad A_3 = a^3 + a^2A + aB + C$ $\quad A_4 = a^4 + a^3A + a^2B + aC + D$

$B_2 = b^2 + bA + B$ $\quad B_3 = b^3 + b^2A + bB + C$ $\quad B_4 = b^4 + b^3A + b^2B + bC + D$

$C_2 = c^2 + cA + B$ $\quad C_3 = c^3 + c^2A + cB + C$ $\quad C_4 = c^4 + c^3A + c^2B + cC + D$

$D_2 = d^2 + dA + B$ $\quad D_3 = d^3 + d^2A + dB + C$ $\quad D_4 = d^4 + d^3A + d^2B + dC + D$

ec. ec. ec.

dalle quali, ponendo $a + b + c + \text{ec.} = P_1$, $a^2 + b^2 + c^2 + \text{ec.} = P_2$, $a^3 + b^3 + c^3 + \text{ec.} = P_3$ ec. e quindi sommando si ha

$$A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + \text{ec.} = P_2 + AP_1 + mB$$

$$A_3 + B_3 + C_3 + D_3 + \text{ec.} = P_3 + AP_2 + BP_1 + mC$$

$$A_4 + B_4 + C_4 + D_4 + \text{ec.} = P_4 + AP_3 + BP_2 + CP_1 + mD$$

ec. ec, e in generale,

$$A_k + B_k + C_k + D_k + \text{ec.} = P_k + AP_{k-1} + BP_{k-2} + CP_{k-3} + \text{ec.} + mR$$

supposta come sopra k non $> m$, ed R il coefficiente di x^{m-k}. Dunque eguagliando le due espressioni di $A_k + B_k + \text{ec.}$ e riducendo avremo

$$\text{I.}^a \; P_k + AP_{k-1} + BP_{k-2} + CP_{k-3} + DP_{k-4} + \text{ec.} = -kR$$

ove nel primo membro dovremo prender tanti termini, quante unità sono nell'indice k, escludendo del tutto quelli ove, dato a k un valore, s'incontrasse P coll'indice zero o negativo; essendo manifesto che le espressioni da cui l'equazione è stata cavata, non danno luogo a quantità di questo genere.

288. Si è supposta k non $> m$, perchè le formule dalle quali abbiam tratto il doppio valore di $A_k + B_k + \text{ec.}$ non potrebbero estendersi oltre i valori di A_m, B_m ec. i quali non danno luogo che alla somma P_m. Del resto anche per $k = m + n$ ha luogo una consimile espressione. Moltiplicata la proposta per x^n, vi si sostituiscano ad una ad una tutte le radici. La somma delle equazioni che ne risultano, sarà

$$\text{II.}^a \; P_k + AP_{k-1} + BP_{k-2} + CP_{k-3} + DP_{k-4} + \text{ec.} + \Omega P_{k-m} = 0.$$

289. Col mezzo di queste due singolarissime formule, prima ancora di conoscer le radici dell'equazione proposta, potremo avere una dopo l'altra le somme delle loro potenze prime, seconde, terze ec. fino a quelle di qualsivoglia grado k. Vogliansi per esempio queste somme fino alla potenza $k = 8$ per l'equa-

zione $x^4+3x^3-6x-4=0$. Avremo $m=4$, $A=3$, $B=0$, $C=-6$, $D=\Omega=-4$:

la prima darà	la seconda darà
$P_1=-A=-3$	$P_5=-AP_4-BP_3-CP_2-DP_1=-33$
$P_2=-AP_1-2B=9$	$P_6=-AP_5-BP_4-CP_3-DP_2=81$
$P_3=-AP_2-BP_1-3C=-9$	$P_7=-AP_6-BP_5-CP_4-DP_3=-129$
$P_4=-AP_3-BP_2-CP_1-4D=25$	$P_8=-AP_7-BP_6-CP_5-DP_4=289$

il che si ha facil modo di verificare, giacchè l'equazione è solubile coi metodi ordinarj (293), ed ha per radici -1, -2, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

290. Si osservi che se l'equazione manchi di tutti i termini di posto pari, e sia perciò $A=0$, $C=0$, $E=0$, ec., saranno nulli P_1, P_3, P_5, ec.: e per k pari avremo $P_k+BP_{k-2}+DP_{k-4}+\text{ec.}=-kR$, ovvero III.ª $P_k+AP_{k-2}+BP_{k-4}+CP_{k-6}+\text{ec.}=-kR$ qualora la proposta venga rappresentata con $x^n+Ax^{n-2}+Bx^{n-4}+Cx^{n-6}+\text{ec.}=0$.

291. Giovano queste dottrine a comporre l'equazione delle differenze $y^{2n}+A_1y^{2n-2}+B_1y^{2n-4}+\text{ec.}=0$ (282.). Infatti esprima Q_k relativamente a questa, ciò che per P_k abbiamo inteso rapporto ad un'equazione qualunque. Poichè la nostra manca dei termini di posto pari, dedurremo dalla III.ª (290), per k pari, $Q_k+A_1Q_{k-2}+B_1Q_{k-4}+C_1Q_{k-6}+\text{ec.}=-kR$: e perciò

$Q_2=-2A_1$	$Q_4=-A_1Q_2-4B_1$
$Q_6=-A_1Q_4-B_1Q_2-6C_1$	$Q_8=-A_1Q_6-B_1Q_4-C_1Q_2-8D_1$
$Q_{10}=-A_1Q_8-B_1Q_6-C_1Q_4-D_1Q_2-10E_1$	$Q_{12}=-A_1Q_{10}-B_1Q_8-C_1Q_6-D_1Q_4-E_1Q_2-12F_1$
ec.	ec.

dalle quali equazioni è chiaro che potremo concludere i valori de' coefficienti ignoti A_1, B_1, C_1, D_1 ec. quando siano conosciuti quelli di Q_2, Q_4, Q_6 ec., e in generale quello di Q_k, limitato al solo caso di k pari.

292. Or poichè la nostra equazione ha per radici le differenze fra ciascuna delle radici a, b, c ec. della proposta e ciascuna delle rimanenti, è chiaro che dovrà esser $Q_k=(a-b)^k+(a-c)^k+(a-d)^k+\text{ec.}+(b-a)^k+(b-c)^k+(b-d)^k+\text{ec.}+(c-a)^k+(c-b)^k+(c-d)^k+\text{ec.}+\text{ec.}$ Se, sviluppando i binomj della prima serie con osservare che k essendo pari l'ultimo termine è positivo, tutto si sommi rammentandoci che il numero dei binomj corrisponde ad $m-1$, con ogni facilità troveremo, chiamata S la somma,

$$S=(m-1)a^k-ka^{k-1}(P_1-a)+\frac{k(k-1)}{2}a^{k-2}(P_2-a^2)-\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}a^{k-3}(P_3-a^3)$$
$$+\text{ec.}+P_k-a^k=$$

$$\left\{\begin{array}{l} ma^k-ka^{k-1}P_1+\frac{k(k-1)}{2}a^{k-2}P_2-\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}a^{k-3}P_3+\text{ec.}\ldots\ldots+P_k \\ \quad -a^k\left(1-k+\frac{k(k-1)}{2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}+\text{ec.}\ldots\ldots+1\right) \end{array}\right\}=$$

$$ma^k-ka^{k-1}P_1+\frac{k(k-1)}{2}a^{k-2}P_2-\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}a^{k-3}P_3+\text{ec.}\ldots\ldots\ldots+P_k,$$ in

quanto che il coefficiente di a^k nel secondo rigo si annulla da se medesimo (220. 2.°). Frattanto poichè le serie seguenti non differiscono dalla prima già contemplata, se non perchè le radici b, c, d ec. vi tengono respettivamente il luogo della radice a, è manifesto che le loro somme S', S'', S''' ec. potranno concludersi dalla già trovata S, ponendovi successivamente b, c, d ec. in vece di a. Ciò fatto e tutto sommato, rammentandoci che le serie sommate sono in numero di m, troveremo assai agevolmente $Q_k = S + S' + S'' + S''' +$ ec. $= 2mP_k - kP_1P_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} \times P_2P_{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{2.3} P_3P_{k-3} +$ ec. Perciò trovati col mezzo dei coefficienti della proposta i valori di P_1, P_2, P_3 ec., potremo avere da questa serie i valori di Q_2, Q_4, Q_6 ec.; e quindi col mezzo sopra indicato, quelli di A_1, B_1, C_1, D_1 ec. Ma passiamo agli esempj.

I.° Sia l'equazione $x^3-2x-5=0$. Avremo $m=3$, $n=3$ (282), $A=0$, $B=-2$, $C=-5$; quindi $P_1=0$, $P_2=4$, $P_3=15$, $P_4=8$, $P_5=50$, $P_6=91$; $Q_2=24$, $Q_4=144$, $Q_6=-2994$; dal che e dalle formule superiori (291), $A_1=-12$, $B_1=36$, $C_1=643$, e l'equazione delle differenze $y^6-12y^4+36y^2+643=0$; ovvero posto $y^2=z$ (282), $z^3-12z^2+36z+643=0$:

II.° Sia l'equazione $x^4-4x^2+4x-1=0$. Sarà $m=4$, $n=6$, $A=0$, $B=-4$, $C=4$, $D=-1$; $P_1=0$, $P_2=8$, $P_3=-12$, $P_4=36$, $P_5=-80$, $P_6=200$, $P_7=-476$, $P_8=1156$, $P_9=-2784$, $P_{10}=6728$, $P_{11}=-16236$, $P_{12}=39204$; $Q_2=64$, $Q_4=672$, $Q_6=7360$, $Q_8=82048$, $Q_{10}=926464$, $Q_{12}=10560000$; onde $A_1=-32$, $B_1=344$, $C_1=-1312$, $D_1=784$, $E_1=-128$, $F_1=0$, e l' equazione cercata $y^{12}-32y^{10}+344y^8-1312y^6+784y^4-128y^2=0$, ovvero posto come sopra $y^2=z$, $z^6-32z^5+344z^4-1312z^3+784z^2-128z=0$. Può osservarsi, come da questa apparisce aver la proposta due radici eguali (283). Per trovarle applico il metodo prescritto (281), cercando il comun divisore fra essa e la sua derivata $4x^3-8x+4=0$ (280), che trovo essere $x-1$. Divido dunque per $(x-1)^2$, ed ho $x^2+2x-1=0$; d' onde $x=-1\pm\sqrt{2}$. Le quattro radici della proposta son dunque $+1, +1$, e $-1\pm\sqrt{2}$.

Equazioni con radici reali e razionali

293. Se l'equazione $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ ec... $+\Omega=0$ abbia una o più radici reali razionali ed intere, dovranno queste trovarsi fra i divisori sia positivi, sia negativi dell'ultimo termine Ω (285. 3.°). Perciò calcolati questi divisori (47) e sostituitili in luogo di x nell'equazione, quelli che ne renderanno nullo il primo membro saranno radici. Per tal via si

troverà che l'equazione $x^3+2x^2-5x-6=0$, ha per radici $x=2$, $=-1$, $=-3$.

294. Si chiami S la somma dei coefficienti della proposta presi secondo i loro segni. Avremo $1+A+B+C+$ec. $+\Omega=S$, equazione che sottratta dalla data farà nascer l'altra $x^m-1+A\times(x^{m-1}-1)+B(x^{m-2}-1)+$ec. $=-S$, nella quale tutto il primo membro essendo multiplo di $x-1$ (261), esser dunque lo deve anche il secondo $-S$, e in conseguenza la somma S. Dunque $x-1$ deve trovarsi tra i divisori della somma S, e per conseguenza x deve trovarsi tra i divisori di S aumentati di un'unità. Non potran dunque esser radici e dovran rigettarsi i divisori di Ω che non si troveranno tra quei di S aumentati di un'unità.

E se i divisori rimasti dopo questo primo scarto sieno tuttora in numero troppo grande, si cangi nella proposta x in $-y$, ed avremo (262) $y^m-Ay^{m-1}+By^{m-2}-Cy^{m-3}+$ec. $\pm\Omega=0$, preso il segno di sopra quando m è pari. Chiamata S_1 la nuova somma dei coefficienti, operando e ragionando come sopra, si troverà che $-S_1$ deve esser multipla di $y-1$, cioè di $-x-1$, ed S_1 di $x+1$: d'onde nel modo stesso che sopra, si concluderà che tra i divisori di Ω rimasti, dovran di più escludersi quelli che non si troveranno fra i divisori di S_1 diminuiti di un'unità.

Es. Abbiasi l'equazione $x^7-8x^6-x^5+98x^4-22x^3-364x^2+40x+400=0$, ove $\Omega=400$, $S=144$, $S_1=108$; avremo per divisori di Ω, $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm8, \pm10, \pm16, \pm20, \pm25, \pm40, \pm50, \pm80, \pm100, \pm200, \pm400$; per divisori di S aumentati di un'unità $2,3,4,5,7,9,10,13,17,19,25,37,49,73,145,-1,-2,-3,-5,-7,-8,-11,-15,-17,-23,-35,-47,-71,-143$; e per divisori di S_1 diminuiti di un'unità $1,2,3,5,8,11,17,26,35,53,107,-2,-3,-4,-5,-7,-10,-13,-19,-28,-37,-55,-109$; onde i soli divisori di Ω da ritenersi saranno $2,5,-2,-5$.

Si noti che se la proposta avesse per radice l'unità positiva o negativa, e in conseguenza $x-1$, ovvero $x+1$ per fattore (261), risulterebbe $S=0$, o $S_1=0$, e il metodo non potrebbe applicarsi. Si riparerà togliendo questi fattori per mezzo della divisione; dopo di che eguagliato a zero il quoziente, si opererà sulla nuova equazione per avere i fattori rimanenti.

295. Sia frattanto d uno dei divisori rimasti. Se questo è radice, $x-d$ sarà fattore dell' equazione (261), la quale divisa per $x-d$, darà un quoziente esatto della forma $x^{m-1}+A_1x^{m-2}+A_2x^{m-3}+\text{ec}+A_{m-1}$, in cui A_1, A_2 ec. avranno i noti valori (171) che per comodo riportiamo di contro. Or dalla legge che regna in queste equazioni si avrebbe $A_m=\Omega+A_{m-1}d$. Ma A_m è il resto finale della divisione (171) che deve esser nullo quando $x-d$ sia fattore dell' equazione, perciò, calcolati un dopo l' altro i coefficienti A_1, A_2 ec. dovremo trovare $A_m=0$, ossia $\Omega+A_{m-1}d=0$, qualora il divisore d sia veramente una delle radici cercate.

$$A_1=A+d$$
$$A_2=B+A_1d$$
$$A_3=C+A_2d$$
$$A_4=D+A_3d$$
ec. ec.

296. Trovato che d è radice, si passerà a sperimentar nel modo medesimo un nuovo divisore, non più per altro sulla proposta, ma sul quoziente $x^{m-1}+A_1x^{m-2}+A_2x^{m-3}+\text{ec.}$, che contiene, come è chiaro tutte le altre radici, e i cui coefficienti A_1, A_2, ec. son già stati determinati con l' operazione precedente. E nel modo stesso si proseguirà finchè non si sia fatta prova di ciascuno dei divisori rimasti. Dopo di che dovranno di nuovo e nella guisa medesima sperimentarsi sull' ultimo quoziente avuto, le radici già ritrovate buone, per il caso che nell' equazione proposta ve ne sieno una o più delle eguali fra loro. Che se dopo tutto ciò rimangano altre radici ignote, queste non potranno essere che incommensurabili o immaginarie. È poi inutile avvertire che l' intero metodo precedente si estende al caso, che i coefficienti della proposta siano o tutti o in parte frazionarj.

Proseguendo frattanto l' esempio già incominciato, poichè $A=-8$, $B=-1$, $C=98$, $D=-22$, $E=-364$, $F=40$, $\Omega=400$, dal divisore 2, primo dei ritenuti, avremo $A_1=-6$, $A_2=-13$, $A_3=72$, $A_4=122$, $A_5=-120$, $A_6=-200$, $A_7=0$. Concluderemo dunque che 2 è radice; e passando a far prova dell' altro divisore 5 nel quoziente $x^6-6x^5-13x^4+72x^3+122x^2-120x-200$, avremo $A_1=-1$, $A_2=-18$, $A_3=-18$, $A_4=32$, $A_5=40$, $A_6=0$, onde anche 5 è radice. Egualmente il -2 sperimentato sul quoziente $x^5-x^4-18x^3-18x^2+32x+40$ dà $A_1=-3$, $A_2=-12$, $A_3=6$, $A_4=20$,

$A_5=0$. Onde ancor -2 è radice. Ma non così l'ultimo divisore -5; poichè sperimentato sul quoziente $x^4-3x^3-12x^2+6x+20$, dà $A_4=690$.

Dunque dei quattro divisori rimasti i soli 2, 5, -2 sono effettivamente radici. Ora per distinguere se tra queste ve ne sia alcuna ripetuta, sperimento di nuovo la prima 2 sull'ultimo quoziente, ed ho $A_4=-24$, onde il 2 non è due volte radice: sperimento il 5 ed ho $A_1=2$, $A_2=-2$, $A_3=-4$, $A_4=0$; sperimento il -2 ed ho $A_1=-5$, $A_2=-2$, $A_3=10$, $A_4=0$; onde il 5 e il -2 son due volte radici. E siccome l'ultimo quoziente è $x^2-2=0$, equazione del secondo grado, che sciolta dà $x=\pm\sqrt{2}$; perciò tutte le radici della proposta sono 2, 5, 5, -2, -2, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

Equazioni del terzo e quarto grado con radici incommensurabili, o immaginarie

297. Se un'equazione del terzo grado non ha radici reali razionali, nè in conseguenza può sciogliersi col metodo precedente, comincio dal toglierle il secondo termine (277), e la riduco alla forma $x^3+px+q=0$. Quindi osservo che fatto I^a. $p=-3ab$, II^a. $q=-a^3-b^3$, quest' equazione si cangia nell'altra identica ed egualmente generale $x^3-3abx-a^3-b^3=0$, che risulta altresì dalla formula del num^o. 225 ponendovi $m=3$, e che già sappiamo (*ivi*) aver per radice $x=a+b$. Or la I^a. e II^a. danno (256) $a=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, $b=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, dunque o si prendano i segni superiori o gl'inferiori, avremo sostituendo . . . . $x=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$. Così $x^3+9x+6=0$, ove $p=9, q=6$ dà $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$.

298. Per avere le altre due radici, riprendo l'equazione $x^3-3abx-a^3-b^3=0$, e dividendola per il fattore $x-a-b$, ho il quoziente $x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2$, che eguagliato a zero mi dà $x=-\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-3}$, ossia $x=$ . . . . $\frac{a(-1\pm\sqrt{-3})+b(-1\mp\sqrt{-3})}{2}$; posti dunque i valori di a, b già adoprati per la 1^a. radice, avremo per le due rimanenti $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$ $+\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$.

299. Se $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$ è reale, le due ultime radici sono immaginarie: ma se è im-

maginario, cioè se con p negativo si abbia $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, ciascuna delle tre radici è reale. Infatti la prima prende allora la forma $x = \sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$, e alle due ultime possiamo dar l'altra $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})} \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} - \sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}\right)\sqrt{-3}$. Or poichè negli sviluppamenti dei radicali $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}$, $\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$ i termini ove B è a potenza pari vengono con segno eguale e reali (198.184), e gli altri con segno ineguale e immaginarj, dunque nella prima radice, come pure nella prima parte dell'altre due, ove questi sviluppamenti son sommati, gli immaginarj si distruggon fra loro; mentre nella seconda parte si distruggono i reali e restano gli immaginarj, che per altro essendo moltiplicati per l'immaginario $\sqrt{-3}$ si cangiano tutti in reali. L'aver tentato invano di ridur questi tre radicali a forma finita reale ha dato a questo caso il nome d'*irriducibile*. Vedremo a suo luogo come la Trigonometria faciliti il loro calcolo trasformandogli in funzioni circolari. Intanto osserveremo che lo stesso metodo risolve anche l'equazioni della forma $x^{3n} + px^{2n} + qx^n + r = 0$, fatto $x^n = y$.

300. Sia ora l'equazione del quarto grado $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Suppongo $x^2 + tx + s$, $x^2 + vx + u$ i fattori quadratici del primo membro (274); gli moltiplico, e paragonando la data col loro prodotto trovo I^a $v = -t$, e quindi II^a $u + s = t^2 + p$, III^a $u - s = \frac{q}{t}$, IV^a $su = r$; sommo e sottraggo la II^a e III^a, ed ho V^a $u = \frac{1}{2}(p + t^2) + \frac{q}{2t}$, VI^a $s = \frac{1}{2}(p + t^2) - \frac{q}{2t}$, che moltiplicate danno $su = r = \frac{1}{4}(p + t^2)^2 - \frac{q^2}{4t^2}$, da cui la *ridotta* $t^6 + 2pt^4 + (p^2 - 4r)t^2 - q^2 = 0$ della forma generale $x^{3n} + px^{2n} + \text{ec.} = 0$ (299). Pongo $t^2 = y$ ed ho $y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$. Sieno y_1, y_2, y_3 le tre radici di quest'equazione; avremo (285.3^a.) $2p = -y_1 - y_2 - y_3$, e $-q^2 = -y_1 y_2 y_3$, ossia $q = \pm\sqrt{y_1 y_2 y_3}$, o più propriamente $q = \pm\sqrt{y_1} \times \pm\sqrt{y_2} \times \pm\sqrt{y_3}$; ove dovrà avvertirsi che essendo il segno di q determinato da quello che questo coefficiente ha nella proposta, i segni dei tre radicali dovranno combinarsi fra loro in modo che due di essi lo abbiano eguale, e il terzo segua quello di q. Sostituendo frattanto in $t^2 = y$ quello dei tre valori di y la cui radice ha il segno di q, e che potremo supporre esser l'y_1, sarà $t = \pm\sqrt{y_1}$, e $\frac{q}{t} = \sqrt{y_2 y_3}$ quantità in ogni caso positiva, e quindi $u = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + 2\sqrt{y_2 y_3})$, ed $s = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 - 2\sqrt{y_2 y_3})$, e per le radici della data, o dei suoi due fattori avremo

$$x = \tfrac{1}{2}(t + \sqrt{(t^2 - 4u)}) = \tfrac{1}{2}(\pm\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \mp \sqrt{y_3})$$
$$x = \tfrac{1}{2}(t - \sqrt{(t^2 - 4u)}) = \tfrac{1}{2}(\pm\sqrt{y_1} \mp \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3})$$
$$x = \tfrac{1}{2}(-t + \sqrt{(t^2 - 4s)}) = \tfrac{1}{2}(\mp\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3})$$
$$x = \tfrac{1}{2}(-t - \sqrt{(t^2 - 4s)}) = \tfrac{1}{2}(\mp\sqrt{y_1} \mp \sqrt{y_2} \mp \sqrt{y_3})$$

ove rapporto ai segni conviene osservare che per la riflessione già fatta, in uno dei tre radicali dovrà prendersi il superiore se q è positivo, l'inferiore se è negativo; quanto poi a quelli dei due rimanenti sarà indifferente prendere il superiore o l'inferiore, purchè quello dei due che si adotta per l'uno, si adotti anche per l'altro. Dunque usando della libertà in cui questo stato di cose ci pone, e per fissare in modo più preciso una regola, stabiliremo che in tutte le quattro formule, e per ciascuno dei tre radicali dovran prendersi i segni superiori se q è positivo, gl'inferiori se è negativo.

Esempio. Abbiasi $x^4-20x^2-12x+13=0$, ove $p=-20$, $q=-12$, $r=13$, la ridotta sarà $t^6-40t^4+348t^2-144=0$, che fatto $t^2=y$ diviene $y^3-40y^2+348y-144=0$, equazione che ha l'unica radice razionale (293) $y_1=12$; le altre due son contenute nel quoziente $y^2-28y+12=0$, d'onde si ha $y_2=14+2\sqrt{46}$, $y_3=14-2\sqrt{46}$. Dunque $\sqrt{y_1}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{y_2}=$ (223) $\sqrt{(7+\sqrt{3})}+\sqrt{(7-\sqrt{3})}$, $\sqrt{y_3}=\sqrt{(7+\sqrt{3})}-\sqrt{(7-\sqrt{3})}$; e poichè q è negativo, sarà $x=-\sqrt{3}\mp\sqrt{(7-\sqrt{3})}$, $x=\sqrt{3}\mp\sqrt{(7+\sqrt{3})}$.

301. Nel modo stesso si risolvon l'equazioni della forma $x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+rx^n+v=0$, fatto $x^n=y$.

Equazioni del quinto grado, del sesto ec. risolubili col metodo precedente

302. Con un metodo analogo a quello che abbiamo esposto (300), cerco i divisori o quadratici o cubici o biquadratici d'un'equazione che non ne ha dei semplici: se vi sono, l'equazione è *riducibile*; se no, è *irriducibile*. Tutti i gradi però hanno dell'equazioni che la formula generale (225) risolve.

303. Sia in essa $m=5, =6$, ec.; si troverà sempre una radice almeno dell'equazioni $x^5-5abx^3+5a^2b^2x-a^5-b^5=0$; $x^6-6abx^4+9a^2b^2x^2-2a^3b^3-a^6-b^6=0$ ec. Si abbia per esempio $x^5+5px^3+5p^2x+2q=0$. Sarà $p=-ab$, $2q=-a^5-b^5$, d'onde $a=\sqrt[5]{(-q\pm\sqrt{(q^2+p^5)})}$, $b=\sqrt[5]{(-q\mp\sqrt{(q^2+p^5)})}$, dunque $x=a+b=\sqrt[5]{(-q+\sqrt{(q^2+p^5)})}+\sqrt[5]{(-q-\sqrt{(q^2+p^5)})}$.

Equazioni di qualunque grado a due termini

304. Sia l'equazione a *due termini* $x^m\mp1=0$. È chiaro che risolvendola avremo immediatamente $x=\sqrt[m]{\pm1}$; e come in forza del grado m dell'equazione, x deve avere m valori, che nel caso nostro non possono essere eguali, perchè mx^{m-1} non ha alcun comun divisore con $x^m\mp1$ (281), perciò *l'unità positiva o negativa ha sempre* m *differenti radici del grado* m*esimo*, cioè due del secondo grado come si sa, tre del terzo, quattro del quarto, ec.: il che deve pur dirsi di qualunque quan-

tità $\pm p$; poichè avendosi $\pm p = p \times \pm 1$, sarà $\sqrt[m]{\pm p} = \sqrt[m]{p \times \pm 1} = \sqrt[m]{p} \times \sqrt[m]{\pm 1}$, e tanti valori avrà $\sqrt[m]{\pm p}$ quanti potrà averne $\sqrt[m]{\pm 1}$.

305. Di tutte queste radici però due sole saranno reali nel caso del segno superiore e con m pari; una sola per l'uno e per l'altro segno quando m è impari, veruna col segno inferiore e con m pari. Infatti nel primo caso l'equazione $x^m - 1 = 0$ ha per fattori $x - 1$ ed $x + 1$ (221), e quindi due delle sue radici sono $x = 1$, $x = -1$. Dividendola poi per $x^2 - 1$ si ha $x^{m-2} + x^{m-4} + x^{m-6} + \text{ec.} \ldots + 1 = 0$ equazione che mostra immaginarie tutte le radici rimanenti, poichè sia per la qualità dei segni tutti positivi, sia per quella degli esponenti tutti di grado pari, niun valore reale di x nè positivo nè negativo potrebbe annullare il primo membro.

306. Nel secondo caso, cioè con m impari e col segno superiore, l'equazione $x^m - 1 = 0$ non può primieramente aver radici reali negative, perchè queste renderebbero negativo x^m, nè sarebbe $x^m - 1 = 0$. È bensì soddisfatta dalla radice positiva $x = 1$; ma siccome dividendola per $x - 1$, si ha $x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} +$ ec. $+ 1 = 0$, equazione che non ammette radici reali positive (285.2°.), così non può la proposta averne neppur di questo genere oltre la già accennata, e le rimanenti saranno dunque tutte immaginarie.

307. Nel terzo caso l'equazione $x^m + 1 = 0$ con m impari si trasforma in $x^m - 1 = 0$ ponendovi $-x$ in luogo di x; ha dunque l'unica radice reale della precedente, cangiata di positiva in negativa (262). Nè per l'ultimo caso può questa stessa equazione aver radice alcuna reale sia positiva, sia negativa, quando m è pari: poichè sì l'une che l'altre lascerebbero x^m positiva, e niuna di esse renderebbe nullo $x^m + 1$. Daremo più a basso l'espressione analitica di alcune di queste radici immaginarie, e insegneremo nella Trigonometria il modo di tutte rappresentarle in ciascuno dei quattro casi contemplati.

Equazioni reciproche

308. Si chiamano equazioni *reciproche* ed anche *convertibili* quelle nelle quali nulla si cangia ponendo $\frac{1}{x}$ in luogo di x. Condizione necessaria di quest'equazioni, come è manifesto, è quella di aver i coefficienti dei termini estremi, e degli equidistanti dagli estremi respettivamente eguali fra loro, e con i segni o tutti eguali o tutti contrarj, dovendo però nell'ultimo caso mancare il termine medio se l'equazione è di grado pari. Tali sono $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0$; $x^6 - 5x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 5x - 1 = 0$.

309. Ogni reciproca è dunque rappresentata o da $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ etc. . . $+ Bx^2 + Ax + 1 = 0$, o da $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ etc. . . $- Bx^2 - Ax - 1 = 0$; forme che facilmente si cangiano nelle due $x^m + 1 + Ax(x^{m-2} + 1) + Bx^2 \times$

$(x^{m-4}+1)+$ etc. $=0$; e $x^m-1+Ax(x^{m-2}-1)+Bx^2(x^{m-4}-1)+$ etc. $=0$; le quali mostrano che con m impari le reciproche della 1ª. specie sono divisibili per $x+1$ (221.2°), quelle della seconda per $x-1$ (221.2°); e queste di più con m pari sono divisibili anche per $x+1$, e quindi per x^2-1. Sia frattanto m impari, e la reciproca della prima specie: e si supponga che dividendo il primo membro per $x+1$ risulti il quoziente $x^{m-1}+ax^{m-2}+bx^{m-3}+$ etc. $+rx^2+sx+t=0$; il prodotto di questo per $x+1$ dovrà eguagliare il primo membro della reciproca. Instituita quindi l'equazione, il noto metodo (419) darà $a=A-1$; $b=B-a$; ... $c=C-b$, etc., $t=1$, $s=A-1=a$; $r=B-s=b$, $q=C-r=c$, etc. Il quoziente è dunque una nuova reciproca della prima specie. E nel modo medesimo si troverà che si hanno reciproche della prima specie dividendo quelle della seconda per $x-1$, se m è impari, e per x^2-1 se m è pari.

310. Da ciò risulta che qualunque reciproca o di grado impari con segni opposti o no, o di grado pari con segni opposti, potrà sempre cangiarsi in un' altra di grado pari e con segni conformi, e sempre d' inferior grado. Tutto dunque si riduce a risolvere l' equazione $x^{2p}+Ax^{2p-1}+Bx^{2p-2}+Cx^{2p-3}+$ec. . . $+Cx^3+Bx^2+Ax+1=0$. Or se in questa si riuniscano insieme i termini affetti d'egual coefficiente, e quindi si divida tutto per x^p, troveremo $x^p+\frac{1}{x^p}+\ldots\ldots$ $A\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right)+B\left(x^{p-2}+\frac{1}{x^{p-2}}\right)+C\left(x^{p-3}+\frac{1}{x^{p-3}}\right)+$ec.; e fatto $x+\frac{1}{x}=y$, se dalla nota formula (225), ponendo $a=x$, $b=\frac{1}{x}$, ed $z=y$ si traggano e quindi si sostituiscano i valori di $x^p+\frac{1}{x^p}$, $x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}$, ec., avremo una nuova equazione in y del grado p, minore perciò almeno per metà di quello della proposta, da cui se possono in qualche modo ottenersi i valori di y, si avranno poi quelli di x dall' altra $x=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(y^2-4)}$ che nasce dalla supposta $x+\frac{1}{x}=y$, ai quali dovremo aggiungere quelli di $x=1$, o di $x=\pm1$ nel caso che abbia avuto luogo in principio la divisione per $x-1$, o per x^2-1.

Si riprendano per darne qualche esempio, le due equazioni già presentate di sopra (308). La prima divisa per $x+1$ dà $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$; la seconda divisa per x^2-1 dà $x^4-5x^3-2x^2-5x+1=0$; ambedue reciproche di grado pari e con segni conformi. Dividendo per x^2, trasformo l'una in $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$, l' altra in $x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$. Fo $x+\frac{1}{x}=y$ d' onde dalla formula generale (225) ho $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, valori che posti nelle trasformate riducono quella ad $y^2+2y+1=0$, questa ad $y^2-5y-4=0$. Cavati di quì i doppj valori di y, e sostituitili nell'accennato valore di x, avremo quattro radici per l'una e per l'

altra delle due reciproche date, che unite ad $x=-1$ per la prima, ad $x=\pm 1$ per la seconda formeranno il numero completo delle radici cercate.

311. Ma la più importante di tutte le reciproche è senza dubbio l'equazione $x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\text{ec}\ldots+x^2+x+1=0$, che nasce dalla divisione per $x-1$ dell'altra reciproca $x^m-1=0$, e la quale per conseguenza contiene le $m-1$ radici m^{sime} che oltre l'1, ha l'unità positiva (301). Considerandola nel caso di m numero primo, sia in principio $m=3$; avremo $x^2+x+1=0$, dalla quale si hanno immediatamente le due radici $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. Sia in secondo luogo $m=5$: avremo $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, cioè, dividendo per x^2 (310), $x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$. Ma fatto $x+\frac{1}{x}=y$ abbiamo (310) $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$; sostituendo dunque avremo $y^2+y-1=0$, d'onde due valori d'y, che posti in $x+\frac{1}{x}=y$ daranno le quattro radici quinte

$$x=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}\right),\ x=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}\right).$$

Così potrebbero aversi le radici del 7^{mo}. grado; ma non quelle dell'11^{mo}, nè di altri gradi corrispondenti a numeri primi maggiori; perchè l'equazioni in y risultano tutte di gradi oltre il quarto, nè si sanno algebricamente risolvere. Vedremo a suo luogo come questo si ottiene dalla Trigonometria. Del resto sciolto il problema nel caso di m primo, con assai facilità lo scioglieremo nel caso di m non primo. Sia infatti $m=pq$, e si suppongan già note le radici a, b dei gradi p, q. Avremo $a^p=1$, $b^q=1$; e di quì elevando l'una equazione a q, l'altra a p, $a^{pq}=1$, $b^{pq}=1$. Queste moltiplicate danno $(ab)^{pq}=1$. Ma si ha $x^{pq}=1$, dunque $x=ab$, cioè le radici del grado composto pq si hanno col moltiplicare insieme quelle dei gradi componenti p, q

Equazioni di qualunque grado con radici reali irrazionali

312. Se l'equazione $X=0$ di grado qualunque non ha radice veruna reale e razionale, la spoglio del secondo termine (277), e formata quindi l'equazione delle differenze (291), con l'uno o con l'altro dei metodi già prescritti (265.278) determino il limite l, da cui dedotto λ, ho la serie 0, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{2}{\lambda}$, ec. (284), i termini della quale sostituiti in luogo dell'incognita nella proposta, possono immediatamente darmi un primo e assai approssimato valore delle cercate radici (281).

313. Ma poichè questa sostituzione di quantità nella maggior parte frazionarie riescirebbe forse difficoltosa, cangio nella proposta x in $\frac{\omega}{\lambda}$. È chiaro che siccome le radici della nuova equazione saranno allora λ volte più grandi di quelle della proposta (275), così ne saranno λ volte maggiori le differenze; onde in luogo di far uso della serie precedente, potremo impunemente adoprarne una λ volte maggiore,

quella cioè dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec. Col mezzo di questa otterremo con molta maggior prontezza i valori approssimati di ω, differenti dal vero meno che di un'unità, e che divisi per λ daranno quelli di x, o delle radici della proposta.

314. Sia p_1 uno dei detti valori approssimati. Fatto $\omega = p_1 + \frac{1}{\omega_1}$, sarà $\frac{1}{\omega_1}$ un rotto proprio e positivo, quindi $\omega_1 > 1$ (49). Sostituito perciò questo valor di ω nella trasformata precedente, ne risulterà una nuova trasformata in ω_1, che avrà necessariamente una radice reale positiva, di cui aver potremo il valore approssimato, mediante la semplice sostituzione dei numeri naturali, come abbiamo avuto quello di ω. Sia p_2 questo valore: in tal caso posto $\omega_1 = p_2 + \frac{1}{\omega_2}$ sarà parimente anche ω_2 una quantità maggiore di 1, e se ne avrà il valor prossimo nel modo medesimo con cui avuti abbiamo quelli di ω_1 e di ω. In egual modo fatto p_3 questo valore, e posto $\omega_2 = p_3 + \frac{1}{\omega_3}$ avremo con lo stesso metodo il valor prossimo di ω_3. Ed è chiaro che così seguitando, e sostituendo in fine gli uni negli altri in ordine retrogrado i valori di ω_1, ω_2, ω_3, ec. risulterà $\omega = p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3 + \text{ec.}}}$ rotto continuo, la cui somma $\frac{N_k}{M_k}$ (92) darà finalmente $x = \frac{N_k}{\lambda M_k}$.

Esempio. Sia $x^3 - 7x + 7 = 0$. Per l'equazione delle differenze troveremo $z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$, i cui segni alternativi mostrano esser reali tutte le radici della proposta (285.2ª.), come già d'altronde sappiamo, atteso il caso irriducibile in cui si trova compresa (299). Fatto $z = \frac{1}{v}$ (284) si ha $v^3 - 9v^2 + \frac{42}{49}v - \frac{1}{49} = 0$, per la quale col secondo dei due metodi (278) si ha il limite $l = 9$, d'onde $\lambda = 3$. Porremo dunque $x = \frac{\omega}{3}$ (313) ed avremo $\omega^3 - 63\omega + 189 = 0$, ove sostituiti i numeri naturali 0, 1, 2, ec. si trova un cambiamento di segno alla sostituzione del 5, ed un altro a quella del 6. Dunque quest'equazione ha due radici positive, una compresa fra il 4 e il 5, ed una fra il 5 e il 6. L'altra radice è negativa, come già si sa (269); quindi senza continuar le sostituzioni formo immediatamente l'equazione (262) $\omega^3 - 63\omega - 189 = 0$, ove il cambiamento di segno s'incontra alla sostituzione del 10, onde la radice cercata è tra il 9 e il 10.

315. Ripresa adesso la prima radice in cui $p_1 = 4$, pongo $\omega = 4 + \frac{1}{\omega_1}$, e dalla sostituzione di questo valore ho $\omega_1^3 - 15\omega_1^2 + 12\omega_1 + 1 = 0$, ove il cambiamento di segno ha luogo fra il 14 e il 15: sarà dunque $p_2 = 14$. Pongo perciò $\omega_1 = 14 + \frac{1}{\omega_2}$ ed ho $27\omega_2^3 - 180\omega_2^2 - 27\omega_2 - 1 = 0$, d'onde col solito metodo ottengo $p_3 = 6$. Continuando così troverò $p_4 = 1$, $p_5 = 4$, ec. Avrò dunque (102) $M_1 = 1$, $M_2 = 14$,

$M_3=85$, $M_4=99$, $M_5=481$, come pure $N_1=4, N_2=57, N_3=346$, $N_4=403$, $N_5=1958$, e per le successive approssimazioni della prima radice della proposta $\frac{4}{3}$, $\frac{57}{42}$, $\frac{346}{255}$, $\frac{403}{297}$, $\frac{1958}{1443}$, le quali sono alternativamente minori e maggiori del vero (103), e l'ultima non ne differisce neppure di due milionesimi (103.3°). Operando con l'istesso sistema per l'altra radice positiva troverò le approssimazioni $\frac{5}{3}$, $\frac{66}{39}$, $\frac{401}{237}$, $\frac{467}{276}$, $\frac{2269}{1341}$. L'equazione $\omega^3-63\omega-189=0$ darà nel modo medesimo la negativa.

316. Osservazioni I. Se la proposta non ha che una sola radice reale, come per esempio, se è del terzo grado e fuori del caso irriducibile (299), potremo immediatamente sostituirvi la serie 1, 2, 3, ec. (313) senza permutarvi l'incognita in $\frac{\omega}{\lambda}$.

317. II. Se la proposta abbia una o più coppie di radici eguali, il che apparirà dall'equazione delle differenze (283), le sostituzioni non saranno atte a farle conoscere (267) ma il metodo già insegnato (281) supplirà bastantemente al bisogno.

Equazioni indeterminate

318. Già avvertimmo (229) che qualora due incognite x, y si trovino combinate in una stessa equazione, bastando l'una di esse a soddisfarla pienamente, rimane all'altra la suscettibilità di rappresentar qualunque numero, e assumer qualunque valore che piaccia darle. Le soluzioni divengono allora infinite di numero, e in tal caso il Problema che ci ha condotti all'equazione, od a cui non può rispondersi in una maniera assoluta e decisa, dicesi *indeterminato*; per renderlo determinato è necessario che una nuova condizione dia campo ad un'altra equazione tra le due incognite; con che gl'infiniti valori che soddisfanno alla prima si riducono a quei pochi che insieme soddisfanno ancora alla seconda.

Non sempre però le condizioni del quesito son tali da poter esser messe in equazione, come succede appunto qualora si esiga che le soluzioni sieno tutte positive, o in numeri interi, o razionali, o non maggiori di un dato valore, nè minori di un altro. In tal caso, benchè si abbiano più incognite che equazioni, gran parte delle soluzioni arbitrarie restano escluse, spesso si riducono a poche le vere, e talvolta non si ha soluzione veruna, conforme accade pure nei problemi determinati, allorchè involgono condizioni fra loro contraddittorie. Or l'Analisi di cui ci proponiamo dar qui un piccolissimo accenno, si occupa dei mezzi di risolvere, quando e come si può, sotto le espresse condizioni questo genere di problemi.

Equazioni indeterminate di primo grado

319. Sia l'equazione generale $a=bx+cy$ coi numeri a, b, c interi e noti, e si tratti di risolverla in numeri interi e positivi, cioè di trovar quei valori interi e positivi di y che sostituiti nell'equazione danno luogo ad un valore intero e positivo anche per x. Primieramente osserverò che se b, c abbiano un comun divisore d, l'equazionenon potrà esser solubile in interi, se d non sia fattore anche di a; essendo chiaro che x ed y interi lasciano il secondo membro multiplo di d, il quale dovrà dunque moltiplicare anche il primo, onde l'equazione sussista; il che quando accada, divisa tutta l'equazione per d, i coefficienti b, c si ridurranno primi fra loro, come sempre gli supporrò in avvenire. Parimente supporrò $b<c$, ossia che venga rappresentata con x quella delle due incognite che resterà accompagnata dal minor coefficiente. Ciò premesso, e traendo dall'equazione il valor di x, avremo $x=\frac{a-cy}{b}$; e se divisi c ed a per b si abbiano i quozienti q, q_1 ed i resti r, r_1, sarà $x=q_1-qy+\frac{r_1-ry}{b}$, e tutto si ridurrà a trovare un valor di y che renda $\frac{r_1-ry}{b}=E$, intendendo per E un numero intero.

320. Ora è visibile che questa nuova equazione ricade, quanto alla forma, nella sua precedente $x=\frac{a-cy}{b}$; e presenta quindi le medesime difficoltà di soluzione, le quali costantemente sussisteranno finchè non riesca cangiarla in un' altra della forma $\frac{\mp r_1+y}{b}=E$, ove y abbia per coefficiente l'unità; nel qual caso tutti i valori dati da $y=bE\pm r_1$, posto per E qualunque numero intero, manifestamente soddisfaranno. Al qual proposito osserverò, che nell'equazione avuta $\frac{r_1-ry}{b}=E$ non altro esigendosi se non che il primo membro sia intero, potremo perciò senza alterarla, moltiplicare quel solo membro per un intero, aumentarlo o diminuirlo di un intero, cangiarlo di segno. Cerchisi frattanto un tal numero n, il cui prodotto per r diviso per b dia un quoziente intero p col resto ± 1, in modo che si abbia $\frac{nr}{b}=p\pm\frac{1}{b}$. Potremo moltiplicare per n il primo membro; e supposto $\frac{r_1 n}{b}=p_1+\frac{r_2}{b}$, avremo $\frac{nr_1-nry}{b}=p_1+\frac{r_2}{b}-py\mp\frac{y}{b}=E$, cioè, rigettati gl' interi del primo membro, $\frac{r_2\mp y}{b}=E$, e moltiplicando per ∓ 1, $\frac{\mp r_2+y}{b}=E$, equazione della forma voluta, e che dà $y=bE\pm r_2$ come sopra.

321. Se b, r sieno numeri non molto grandi, il moltiplicatore n si presenterà facilmente da se medesimo; così avendo $\frac{r}{b}=\frac{7}{9}$, sarà $n=4$, da cui avremo $\frac{7n}{9}=\frac{28}{9}=3+\frac{1}{9}$; e se abbiasi $\frac{r}{b}=\frac{11}{17}$, sarà $n=3$, da cui avremo $\frac{11n}{17}=\frac{33}{17}=2-\frac{1}{17}$.

(32). Ma in qualunque modo potremo sempre trovarlo calcolando N_k, denominatore di $\frac{M_k}{N_k}$ ultima delle convergenti verso il rotto $\frac{r}{b}$ (106). Infatti poichè r è il resto della divisione di c per b (319), dovrà $\frac{r}{b}$ essere irriducibile, qualora come abbiamo supposto (*ivi*) sia irriducibile $\frac{b}{c}$ (58). Sarà dunque (109) $bM_k - rN_k = \pm 1$, e quindi $\frac{rN_k}{b} = M_k \mp \frac{1}{b}$ come si voleva. Dovremo poi rammentarci che il segno superiore ha luogo con k impari (103), e che l'indice k vien determinato da quello che ha il resto finale $R_k = 1$.

322. Pervenuti così nell'un modo o nell'altro all'equazione $y = bE \pm r_1$, da $E = 1$, se ha luogo il segno di sotto, o da $E = 0$ se ha luogo quello di sopra, avremo il minimo valore di y, che introdotto in quello di $x = \frac{a - cy}{b}$ (319), darà il massimo valore di x se nella proposta il coefficiente c è positivo, il minimo se è negativo. Sieno frattanto g, h i due primi valori così trovati di x, y; e rappresentino x_1, y_1 qualunque dei rimanenti atti a soddisfare alla proposta. Potremo supporre $x_1 = g + z$, $y_1 = h + \omega$, e dovranno z, ω essere interi positivi o negativi. Introdotti questi nuovi valori nella proposta, avremo $a = b(g + z) + c(h + \omega)$; e poichè in ipotesi $a = bg + ch$, sarà dunque $0 = bz + c\omega$, nuova equazione indeterminata, che trattata come la proposta darà $z = -\frac{c\omega}{b}$; e fatto $\frac{c\omega}{b} = E$, sarà $\omega = bE$, ovvero cangiato l'intero E nell'intero m, $\omega = bm$, $z = -cm$; d'onde $x_1 = g - mc$, $y_1 = h + bm$, formule che dunque ci daranno tutti i rimanenti valori di x, y avuti i due primi g, h.

323. Da esse intanto si apprende 1.° che questi valori presi successivamente procedono in progressione aritmetica, differendo costantemente gli uni dagli altri di c quelli di x, di b quelli di y; 2.° che se c è negativa si avranno infiniti valori tanto per x, quanto per y; 3.° se poi c è positiva i valori di x formeranno una progressione decrescente, nè si manterranno positivi se non finchè sarà $mc < g$. In conseguenza il numero delle soluzioni, compresa la prima, non potrà esser maggiore degli interi contenuti in $\frac{g}{c} + 1$. Ma si venga agli esempj.

Debbansi risolvere in numeri interi l'equazioni I.ª $5 = 3x - 4y$; II.ª $2000 = 9x + 13y$; III.ª $1200 = 5x + 7y$; IV.ª $16 = 1872y - 253x$. Avremo dalla I.ª $x = \frac{5 + 4y}{3}$, e tolti gl'interi, $\frac{2 + y}{3} = E$, d'onde immediatamente $y = 3E - 2$. Fatto $E = 1$ si avrà $y = 1$ valor minimo, e quindi $x = 3$, valore parimente minimo, perchè c è negativo (322). Dunque $g = 3$, $h = 1$; e poichè $b = 3$, $c = -4$, sarà perciò $x_1 = 3 + 4m$,

$y_1=1+3m$, d'onde gl' infiniti valori 3, 7, 11, 15, ec. per x, e 1, 4, 7, 10, ec. per y tutti atti a risolvere l'equazione. La II.ª darà $x=\frac{2000-13y}{9}$, e $\frac{2-4y}{9}=E$, ossia, moltiplicando per $n=-2$ il primo membro, $\frac{-4+8y}{9}=E=\frac{-4-y}{9}$, e cambiati i segni $\frac{4+y}{9}=E$. Di qui $y=9E-4$, che con $E=1$ dà $y=5=h$ valor minimo, e perciò $x=215=g$ valor massimo, perchè c è positivo. Per i rimanenti valori di y si troverà dunque 14, 23, 32 ec., per quelli di x, 202, 189, 176 ec.; e poichè $\frac{g}{c}=\frac{215}{13}=16+\frac{7}{13}$ le soluzioni in numeri interi non saranno che 17. La III.ª darà $x=\frac{1200-7y}{5}$, e $\frac{-2y}{5}=E$, che qualunque debba esser n, dà $\frac{y}{5}=E$, e quindi $y=5E$. Sarà dunque 5 il minimo valore di y, 233 il massimo di x, e 34 il numero delle soluzioni. Infine la IV.ª dà $x=\frac{-16+1872y}{253}$, e $\frac{-16+101y}{253}=E$. Per aver n calcolo N_k per il rotto $\frac{101}{253}$ (402) e trovo $N_k=N_3=5$; e poichè k è impari, moltiplicando e quindi rigettando gl'interi dovrò avere $\frac{-80-y}{253}=E$, e di qui $y=253E-80$, che con $E=1$ dà $y=173$, $x=1280$, valori ambedue minimi, e che dan luogo ad altre infinite soluzioni.

324. Ma ecco un nuovo genere di ricerche che più o meno dipendono dalle precedenti; voglia cioè trovarsi un numero x che diviso per i numeri noti a, b, c ec. dia per resto altri numeri noti m, n, p ec. È chiaro che potrà porsi I.ª $\frac{x}{a}=E+\frac{m}{a}$, II.ª $\frac{x}{b}=E_1+\frac{n}{b}$, III.ª $\frac{x}{c}=E_2+\frac{p}{c}$, ec. La I.ª dà IV.ª $x=aE+m$, valore che introdotto nella II.ª dà un'equazione tra E ed E_1; onde trovata E da questa come si trovò y (320), e sostituitone il valore nella I.ª, avremo un nuovo valore di x dato per E_1, che posto nella III.ª, darà un'equazione tra E_1 ed E_2. Da questa dedotto al solito il valore di E_1 dato per E_2, e introdottolo in quello di x dato per E_1, avremo un nuovo valor di x dato per E_2, ec.

Esempio. Un avaro ha dei sacchetti: contandoli a tre a tre non vi è avanzo; a 7 a 7 ne avanza 1; a 10 a 10 ne avanzan 6: i sacchetti eran più di 100 e meno di 300; se ne cerca il numero. Sia x: si avrà I.ª $\frac{x}{3}=E$, II.ª $\frac{x-1}{7}=E_1$, III.ª $\frac{x-6}{10}=E_2$. La I.ª dà $x=3E$, che cangia la II.ª in $\frac{3E-1}{7}=E_1$, ossia moltiplicando per 2 e cambiando i segni $\frac{E+2}{7}=E_1$, onde $E=7E_1-2$, valore che posto in $x=3E$

dà $x=21E_1-6$. Quindi la III^a. dà $\frac{21E_1-12}{10}=E_2=\frac{E_1-2}{10}$; onde $E_1=\ldots$ $10E_2+2$, valore che posto in $x=21E_1-6$, dà $x=210E_2+36$. Presa $E_2=0$, si ha $x=36$; minimo dei numeri, che divisi per 3, per 7 e per 10 danno i resti 0, 1, 6: se $E_2=1, =2$ sarà $x=246$, 456; dunque i sacchetti sono 246.

325. Nel modo stesso si tratta un problema relativo al Calendario. Vogliasi l'anno dell'Era Cristiana in cui si ebbe 17 di Ciclo Solare, 6 di Ciclo Lunare, e 5 d'Indizione. È noto che il Ciclo Solare è un periodo di 28 anni, il Lunare o Numero Aureo di 19, e l'Indizione di 15. Perciò chiamato x l'anno cercato, sarà I. ... $\frac{x-17}{28}=E$, II. $\frac{x-6}{19}=E_1$, III. $\frac{x-5}{15}=E_2$; onde IV. $x=28E+17$; che riduce la II. a $\frac{28E+11}{19}=E_1=\frac{9E+11}{19}=\frac{(9E+11)2}{19}=\frac{-E+3}{19}$, e mutati i segni $E=$ $19E_1+3$, ed $x=532E_1+101$; che riduce la III. a $\frac{532E_1+96}{15}=E_2=\ldots$ $\frac{7E_1+6}{15}=\frac{14E_1+12}{15}=-\frac{-E_1+12}{15}$, e mutati i segni, $E_1=15E_2+12$, ed $x=$ $7980E_2+6485$. Se $E_2=0, =1$ ec., si avrà $x=6485, =14465$, ec.: ma poichè questi anni appartengono al Periodo Giuliano, che comincia 4713 anni prima dell'Era Cristiana, bisogna sottrarre 4713 da queste epoche per ridurre alla nostra Era. Fatta la sottrazione da 6485, si ha 1772: sicchè dal principio del Mondo, come è fissato dall'ordinaria Cronologìa, il solo anno 1772 della nostra Era ha avuto 17 di Ciclo Solare, 6 di Lunare e 5 d'Indizione. Sottraendo del pari 4713 da 14465, si ha 9752 che soddisfà alle stesse condizioni ec.

326. Si noti che qualora o tutti o parte dei divisori a, b ec. abbiano un fattor comune, questo genere di problemi può mancar molte volte di soluzione. Infatti si suppongano a, b multipli di t. Poichè la I^a. (324) dà $x=aE+m$, da questo valore posto nella II^a. avremo $aE+m-n=bE_1$, e quindi $bE_1-aE=m-n$, equazione nella quale E, E_1 non possono essere interi, quando $m-n$ non sia multiplo di t.

327. Infine per risolvere in numeri interi e positivi un'equazione con tre incognite, 1°. prendo quella del massimo coefficiente come x, e fatto $x=1$, riduco l'equazione a due incognite e la tratto al solito (319): 2°. ripeto l'operazione con $x=2, =3$ ec. finchè non risulti un'incognita zero o negativa. L'equazione $7x+5y+4u=41$ così maneggiata, dà le quattro soluzioni $x=1, u=1, y=6$; $x=1, u=6, y=2$; $x=2, u=3, y=3$; $x=4, u=2, y=1$.

328. Se l'incognite fossero quattro z, x, y, u, e avesse z il massimo coefficiente, porrei con $z=1$ anche $x=1$, 2, 3 ec., ed opererei come prima: ripeterei l'operazione con $z=2$ e con $x=1$, 2, 3 ec.; con $z=3$ e con $x=1$, 2, 3 ec., continuando con l'ordine stesso finchè fosse possibile. In tal modo l'equazione $9z+7x+5y+4u=58$ dà 12 soluzioni.

329. Con questi metodi, dato un rotto numerico $\frac{P}{Q}$, potremo decomporlo in tanti rotti quanti sono i fattori ineguali, che moltiplicati riproducono il suo denominatore. Sia $Q=abcd$. Porremo $\frac{P}{Q}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{\omega}{d}$, d'onde l' equazione $P=bcdx+acdy+abdz+abc\omega$, con quattro indeterminate. Ma quì conviene osservare che avendosi $P-bcdx=acdy+abdz+abc\omega$, non potremo dare ad x un valore in tutto arbitrario, ma bensì tale che $P-bcdx$ sia multiplo di a, o che abbiasi.. $\frac{P-bcdx}{a}=E$. Determinate in tal guisa x ed E, avremo $E=cdy+bdz+bc\omega$; d' onde $E-cdy=bdz+bc\omega$, e dovremo per la stessa ragione rendere $\frac{E-cdy}{b}=E_1$ intero. Determinate y ed E_1, avremo $E_1=dz+c\omega$, che scioglieremo al solito. Es. Abbiasi il rotto $\frac{193}{210}$ in cui $210=7.5.3.2$. Posto $\frac{193}{210}=\frac{x}{7}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}+\frac{\omega}{2}$, avremo $193=30x+42y+70z+105\omega$. Per determinare x, porremo $\frac{193-30x}{7}=E$, d' onde avremo $x=2$, $E=19$. Porremo $19=6y+10z+15y$, e fatto $\frac{19-6y}{5}=E_1$ avremo $y=4$, $E_1=-1$. Porremo infine $-1=2z+3\omega$, d' onde $\omega=1$, $z=-2$, e perciò $\frac{193}{210}=\frac{2}{7}+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$, come può verificarsi sommando. Ed è inutile avvertire che oltre i valori trovati di x, y, altri moltissimi se ne hanno dall'equazioni $\frac{193-30x}{7}=E$, $\frac{19-6y}{5}=E_1$; onde il problema ha un numero grande di soluzioni.

Equazioni indeterminate con una sola incognita oltre il primo grado

330. Abbiasi l' equazione $y=\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}}{a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec.}}$, e si tratti di trovare i valori interi di x che rendono y intero. Fo I^a. $A+Bx+Cx^2+\text{ec.}=p$; II^a. $a+bx+cx^2+\text{ec.}=q$. Sarà $y=\frac{p}{q}$ e dovrà ottenersi p multiplo di q. Mandate a zero l' equazioni I^a e II^a, col metodo già insegnato (243) elimino x. Avrò un' equazione finale $R_k=0$, che ordinata per p e per q prenderà la forma $A_1+B_1p+C_1q+\ldots D_1p^2+E_1pq+F_1q^2+\text{ec.}=0$, d' onde $A_1=-B_1p-C_1q-D_1p^2-E_1pq-F_1q^2-\text{ec}$, equazione il cui secondo membro è visibilmente multiplo di q, quando q sia summultiplo, come si suppone, di p. In quest' ipotesi dovrà dunque A_1 esser multipla di q, e per conseguenza i valori opportuni di q dovran trovarsi tra i divisori positivi e negativi di A_1. Cercati perciò questi divisori, e postili successivamente nella II^a. avrò altrettante equazioni in x, dalle quali tratti tutti quei valori interi di x che potrò, gli porrò nella I^a. e ne avrò così altrettanti di p. Scelti poi tra i valori di p quelli che troverò esattamente divisibili per i corrispondenti valori di q, avrò y intero

dall'equazione $y=\frac{p}{q}$. Che se non incontrerò verun valore reale ed intero di x, o verun valore di p divisibile per il valor corrispondente di q, la proposta non sarà solubile in numeri interi.

Es.° Sia $y=\frac{4-5x+x^2}{7+3x}$. Porremo I.° $x^2-5x+4=p$, II.° $3x+7=q$; d'onde $x^2-5x+4-p=0$, $3x+7-q=0$. Eliminata x si troverà per equazione finale $190-9p-29q+q^2=0$; onde $A_1=190$, numero che ha per divisori 1, 2, 5, 10, 19, 38, 95, 190. Fra questi il 2, il 5, il 38 e il 95, il -1, il -10, il -19 e il -190 posti in luogo di q nella II.° non danno x intero. Dai rimanenti si otterranno i valori di x, e quindi dalla I.° quelli di p, e infine quelli di y nel modo prescritto, colla corrispondenza che si vede nel quadro seguente.

$q=$	1,	10,	19,	190,	-2,	-5,	-38,	-95
$x=$	-2,	1,	4,	61,	-3,	-4,	-15,	-34
$p=$	18,	0,	0,	3420,	28,	40,	304,	1330
$y=$	18,	0,	0,	18,	-14,	-8,	-8,	-14

331. Se q non contiene x, cioè se la proposta divenga $y=\frac{A+Bx+Cx^2+\text{ec.}}{a}$ il metodo precedente non può applicarsi. In tal caso si sostituiscano un dopo l'altro in luogo di x tutti i numeri interi positivi e negativi da 0 inclusive fino ad $\frac{1}{2}a$, se a è pari, o fino ad $\frac{1}{2}(a-1)$ se è impari. Qualora dentro questi limiti s'incontri un numero n che soddisfaccia, cioè che renda il polinomio $A+Bx+Cx^2+$ec. multiplo di a, potremo avere infinite altre soluzioni ponendo $x=n+am$, presi successivamente per m tutti i numeri interi positivi e negativi. Infatti da $x=n+am$, per qualunque potenza p di x, si ha in generale $x^p=(n+am)^p=n^p+ah$, inteso per ah un multiplo di a. Sostituito dunque $n+am$ in luogo di x, avremo $A+Bx+Cx^2+$ec. $=A+Bn+Cn^2+$ec. $+Bah+Cah_1+Dah_2+$ec. ove la parte $Bah+Cah_1+Dah_2+$ec. è evidentemente multipla di a: onde lo è tutto il polinomio se, come abbiamo supposto, lo sia $A+Bn+Cn^2+$ec. Che se fra i prescritti limiti non si presenti il supposto numero n, non si presenterà più comunque si vogliano estendere i tentativi, ed il problema sarà per conseguenza insolubile. Infatti si ammetta che $n>\frac{1}{2}a$ soddisfaccia alla condizione, e si rappresenti con aq il multiplo di a superiormente o inferiormente più prossimo ad n, e con r la differenza fra aq ed n, che astrazion fatta dal segno non potrà esser $>\frac{1}{2}a$ (41). Sarà $n=aq\pm r$, ed $n-am=aq\pm r-am$. Or poichè m è un intero qualunque, potremo eguagliarlo a q, nel qual caso avremo $n-am=\pm r$; e come con $x=n$ soddisfà in generale $x=n-am$, dovrà in particolare soddisfare anche $x=\pm r$, cioè se ha luogo per x un valore $n>\frac{1}{2}a$, dovrà nel tempo stesso aver luogo anche un altro valore r non $>\frac{1}{2}a$, cioè compreso tra 0 e $\frac{1}{2}a$ inclusivamente; all'opposto se questo manca, dovrà mancare ancor quello.

Esempio. Sia $y=\frac{3x^2-5x+2}{7}$. Tentando da zero fino a 3, troveremo che soddisfà $x=1$, $x=3$; dunque soddisfaranno altresì $x=1+7m$, $x=3+7m$. Con m positivo la prima darà $x=1,=8,=15,=22$ ec., la seconda, $x=3,=10,=17,=24,=$ec.: con m negativo la prima darà $x=-6,=-13,=-20,=-$ec., la seconda, $x=-4,=-11,=-18,=-$ec.

332. Si osservi che se a non è numero primo, non potrà il polinomio $A+Bx+Cx^2+$ec. esser multiplo di a, nè per conseguenza y intero, qualora non sia nel tempo stesso multiplo di tutti i fattori ineguali di a. Posto dunque che abbiasi $a=a_1a_2a_3$ec. dovrà uno stesso valore di x soddisfare alle equazioni $y_1=\frac{A+Bx+Cx^2+\text{ec.}}{a_1}$, $y_2=\frac{A+Bx+Cx^2+\text{ec.}}{a_2}$, $y_3=\frac{A+Bx+Cx^2+\text{ec.}}{a_3}$ ec. Si supponga frattanto che $x=n_1+a_1m_1$, $x=n_2+a_2m_2$, $x=n_3+a_3m_3$ ec. sieno i valori di x che l'applicazione del metodo precedente ha fatto conoscere atti a soddisfare respettivamente a ciascuna di queste equazioni. Poichè da questi si traggono le relazioni $\frac{x-n_1}{a_1}=m_1$, $\frac{x-n_2}{a_2}=m_2$, $\frac{x-n_3}{a_3}=m_3$ ec., è chiaro che se su queste si operi a seconda dell'altro noto metodo (324), si avranno i valori di x che soddisfanno insieme a tutte quante, e quindi alla proposta. Tutto ciò servirà ad abbreviare l'operazione nel caso di a non primo e molto grande.

Esempio. Sia $y=\frac{6x^2-2x+1}{15}$: poichè $15=3.5$, porremo $y_1=\frac{6x^2-2x+1}{3}$, $y_2=\frac{6x^2-2x+1}{5}$. Alla prima soddisfà $x=-1$, e in conseguenza $x=-1+3m_1$; all'altra, $x=1$, e in conseguenza $x=1+5m_2$: deve dunque aversi insieme 1.ª $\frac{x+1}{3}=m_1$, 2.ª $\frac{x-1}{5}=m_2$. Di qui se giusta il metodo (324), si riprende il valor di x dato dalla 1.ª e si sostituisce nella 2.ª, avremo $\frac{-2+3m_1}{5}=m_2=\frac{-4+m_1}{5}$: d'onde $m_1=5m_2+4$, valore che posto nella 1.ª, darà $x=15m_2+11$, valor generale cercato; da cui ponendo al solito $m_2=0,=\pm1,=\pm2,=\pm3$, ec. si avranno gli altri infiniti valori particolari tutti atti a soddisfare alla proposta.

333. L'equazione $y=\frac{x^2-l}{a}$ è, tra tutte quelle comprese nel caso che qui contempliamo, la più importante, e merita quindi ulteriori considerazioni. Rigettati prima di tutto gl'interi contenuti in $\frac{l}{a}$, e resa così $l<a$, se si supponga n il minimo dei valori di x atto a rendere intero y, dovrà aversi $n<$, o al più $=\frac{1}{2}a$ (331). Ridotta perciò l'equazione alla forma $ay+l=x^2$, dovrà trovarsi altresì un tal valore per y che renda $ay+l<$, o al più $=\frac{1}{4}a^2$; condizione che darà dunque $ay<\frac{1}{4}a^2$ ed $y<\frac{1}{4}a$: cioè se l'equazione è solubile, tra i numeri

interi e positivi minori di $\frac{1}{4}a$ dovrà sempre trovarsene uno, che posto in luogo di y soddisfaccia all'equazione $ay+l=x^2$, o meglio $ay+l=Q$, inteso per Q un quadrato qualunque: nel qual caso da $x=\pm\sqrt{Q+am}$ si avranno tutti i valori di x atti a risolvere la proposta. Con ciò si facilita d'assai la soluzione nel caso di a indecomponibile e molto grande, in quanto che i tentativi vengon così ad estendersi non più ad $\frac{1}{2}a$, ma ad $\frac{1}{4}a$.

334. Si avverta 1.° che se si presenti un valor di $y>\frac{1}{4}a$ atto a soddisfar l'equazione $ay+l=x^2$, dovrà insieme con questo aver luogo un altro valore $y_1<\frac{1}{4}a$. Infatti con $y>\frac{1}{4}a$, sarà $ay>\frac{1}{4}a^2$, $ay+l>\frac{1}{4}a^2$; e quindi $x^2>\frac{1}{4}a^2$, cioè il valore di x che corrisponderà ad $y>\frac{1}{4}a$, sarà maggiore di $\frac{1}{2}a$. Ora con questo valore di x deve aver luogo un altro valore $x_1<\frac{1}{2}a$ (331); e supposto y_1 il valor di y che gli corrisponde, e che quindi abbia luogo l'equazione $ay_1+l=x_1^2$, troveremo, ragionando come sopra (333), doversi avere $y_1<\frac{1}{4}a$. 2.° Che qualora fosse $l>a$, nè si rigettassero gl'interi, supposto $\frac{l}{a}=q+\frac{r}{a}$, sarebbe $y=\frac{x^2-r}{a}-q$; d'onde $y+q=\frac{x^2-r}{a}$: e rappresentati con y_1 i valori che soddisfanno ad $\frac{x^2-r}{a}$, sarà $y=y_1-q$, valore che riuscirà positivo o negativo, maggiore o minore di $\frac{1}{4}a$, secondo che sarà y_1 maggiore o minore di q, e la lor differenza maggiore o minore di $\frac{1}{4}a$.

Equazioni indeterminate del secondo grado.

335. Sia l'equazione indeterminata e generale del secondo grado $z^2+ayz+by^2+cz+dy+e=0$, e si tratti di avere z ed y razionali, e se è possibile interi. Risolvendola rapporto a z si troverà $z+\frac{1}{2}(ay+c)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(y^2(a^2-4b)+2y(ac-2d)+c^2-4e)}$. Fatto dunque $z+\frac{1}{2}(ay+c)=x$, $a^2-4b=4h$, $ac-2d=2g$, $c^2-4e=4f$, tutto si ridurrà a risolvere in numeri razionali ed interi la trasformata $x=\sqrt{(hy^2+gy+f)}$.

336. Cominciamo dall'esaminarla nei casi particolari 1.° di h ed f eguali a zero, 2.° di $h=0$, 3.° di $f=0$, 4.° di $g=0$, e sia dunque 1.° $x=\sqrt{gy}$. Ponendo $y=m^2g$, preso per m qualunque numero intero, avremo $x=mg$, razionale ed intero. Sia 2.° $x=\sqrt{(gy+f)}$; sarà $y=\frac{x^2-f}{g}$, equazione che nei casi già indicati di sopra (333) può risolversi in numeri interi; si risolve poi sempre in numeri semplicemente razionali ponendo per x^2 un quadrato qualunque Q, o l'altro più generale $\frac{A^2}{a^2}$ ove A ed a sono due indeterminate arbitrarie. Sia 3.° $x=\sqrt{(hy^2+gy)}$; sarà $\frac{x^2}{y^2}=h+\frac{g}{y}$, e dovrà $h+\frac{g}{y}$ essere un quadrato. Lo eguaglio dunque ad $\frac{A^2}{a^2}$, ed ho $y=\frac{a^2g}{A^2-a^2h}$. Risoluta quindi l'equasione $A^2-a^2h=1$ col metodo che verrà dato (339. 4.°), avremo

y intero. Sia finalmente 4.° $x=\sqrt{(hy^2+f)}$; se $h=1$, l'equazione $x=\sqrt{(y^2+f)}$ divien razionale poneodo $y=\frac{A^2-a^2f}{2Aa}$, il che dà $x=\frac{A^2+a^2f}{2Aa}$. Fatto $a=1$ avremo y iotero coi metodi del num.° 331. Se h è maggior di 1, l'equazione $x^2=hy^2+f$ si risolverà nel modo che quì appresso daremo (340).

337. Prendendo ora a considerare la trasformata nella sua intera generalità, osservo che da $x=\sqrt{(hy^2+gy+f)}$ si ha $2hy+g=\sqrt{(g^2+4hx^2-4fh)}$. Fo $(2hy+g)^2=Q$, $g^2-4fh=k$, $4h=l$, con che cangio la data nella semplicissima $k+lx^2=Q$, dalla cui soluzione quella dunque dipende di qualsivoglia equazione indeterminata di secondo grado. Ne daremo le regole priocipali.

338. E innanzi a tutto premetteremo, che se occorra moltiplicare o divider la nuova equazione per un quadrato, potremo eseguire sì l'una che l'altra delle due operazioni sul solo primo membro, senza far lo stesso sul secondo. Desso infatti non rappreseota quì che un qoadrato qualunque; è perciò chiaro che se si moltiplichi o si divida per nn altro quadrato, non solo non perde la sua qualità di quadrato (185), ma neppur quella di quadrato iodetermioato, e può duoque come innanzi continuare ad esser rappresentato con Q.

339. Ciò premesso osserveremo: 1.° che se l sia nn quadrato m^2, avremo $m^2x^2=Q-k$; d'onde $x=\frac{1}{m}\sqrt{(Q-k)}=(336.\ 4.°)\frac{A^2-a^2k}{2Aam}$. Fatto $a=1$ avremo x intero col metodo del paragrafo 330. Si avverta che a questo caso si riduce quello di $l=1$.

2.° Se k sia eguale ad un quadrato c^2, sarà $\frac{c^2}{x^2}=Q-l$; d'onde $x=(336.\ 4.°)$ $\frac{2Aac}{A^2-a^2l}$. Determinando A ed a mediaote l'equazione $A^2-a^2l=1$ che ricade in quella del seguente caso 4.°, avremo x intero.

3.° Se coo $\pm k\mp lx^2=Q$ sia $kl=g^2$, moltiplicando per l avremo $g^2-l^2x^2=\pm lQ$. Fatto $l^2x^2=Q_1$ e dividendo per Q, verrà $\frac{g^2}{Q}=Q_1\pm l$; e $\frac{g}{\sqrt{Q}}=(336.\ 4.°)\frac{A^2\pm a^2l}{2Aa}$: d'onde $\sqrt{Q}$ e quiudi x.

4.° Se $k=\pm1$, l'equazione col segno superiore sarà soddisfatta da $x=0$; ma indipendentemente da questa solnziooe, si riduca la data a $\pm1=Q-lx^2$. Confrootandola coll'altra $\pm1=(N_{mn})^2-l(M_{mn})^2$ (120) ben si vede che i valori di N_{mn}, M_{mn} atti a risolver questa seconda, posti l'uno in luogo di $\sqrt{Q}$, l'altro io luogo di x risolveranno anche la proposta nei casi iodicsti (*ivi*), cioè sempre, e qoaluoque siasi n col segno superiore, nel solo caso di n impari col segno ioferiore. Sia data per esempio l'equazione $\pm1=Q-13x^2$. Poichè coo $l=13$ la Tavola (118) dà $p_1=3$, $p_2=1$, $p_3=1$, $p_4=1$, $p_5=1$, $p_6=6=2p_1$, avremo dunque $n=5$ (115); e perciò l'equazione sarà solubile in numeri interi o sia coll'un segno, o sia coll'altro, e sempre da convergenti d'indice $5m$. La risolveranno col seguo superiore quelle,

per le quali m sarà pari, cioè $\frac{N_{10}}{M_{10}}, \frac{N_{20}}{M_{20}}, \frac{N_{30}}{M_{30}}$ ec.; col segno inferiore quelle, per le quali m sarà impari, cioè $\frac{N_5}{M_5}, \frac{N_{15}}{M_{15}}, \frac{N_{25}}{M_{25}}$ ec. E difatti calcolando si trova
$N_5=18$, $N_{10}=649$, $N_{15}=23382$, $N_{20}=842401$, $N_{25}=30349818$, $N_{30}=1093435849$, ec.
$M_5=5$, $M_{10}=180$, $M_{15}=6485$, $M_{20}=233640$, $M_{25}=8417525$, $M_{30}=303264540$, ec.
valori che posti respettivamente in luogo di $\sqrt{Q}$ e di x nella proposta, effettivamente la soddisfanno, gli uni, cioè quelli coll'indice impari, nel caso del segno inferiore; i rimanenti, cioè quelli coll'indice pari, nel caso del segno superiore. Ma se abbiasi $\pm 1=Q-3x^2$, poichè la Tavola per il numero dei quozienti in periodo dà $n=2$, l'equazione col segno inferiore non sarà solubile; mentre col segno superiore si avranno soluzioni da tutte le convergenti dell'indice $2m$ qualunque siasi m o pari, o impari, come è agevole il verificare.

5.° Se $k=\pm b_k$, intendendosi per b_k uno dei valori di b dati dalla Tavola (118), l'equazione $\pm b_k=(N_{k+(m-1)n-1})^2-l(M_{k+(m-1)n-1})^2$ (120) mostra che in un modo analogo al precedente potremo avere infinite soluzioni in numeri interi ponendo $\sqrt{Q}=N_{k+(m-1)n-1}$ ed $x=M_{k+(m-1)n-1}$. Si avverta 1.° che l'indice k deve determinarsi dal luogo d'ordine che nella Tavola tiene quello dei b che corrisponde al dato valore di k. Così se sia proposta l'equazione $\pm 3+21x^2=Q$, siccome nella Tavola per 21 il valore 3 appartiene al quarto dei b, dovremo dunque fare l'indice $k=4$, e l'indice delle convergenti i cui termini soddisfanno alla proposta, sarà $3+(m-1)n$, ossia $6m-3$, giacchè la Tavola dà $n=6$. E poichè quest'indice, qualunque siasi m, è sempre impari, apparisce perciò che giusta il precetto dato (120), l'equazione col segno superiore non avrà soluzione, mentre ad ogni periodo una ne troveremo che la risolverà col segno inferiore (*ivi*). 2.° Che attesa la simmetria dei b_k, la quale si trova aver luogo come quella dei p_k, incontrandosi il più delle volte uno stesso valor di b_k in due luoghi differenti d'uno stesso periodo e quindi della Tavola, così l'indice k potrà aver due valori differenti, ciascuno dei quali dovrà introdursi nell'indice $k+(m-1)n-1$ per completare le soluzioni. Così se abbiasi $5=Q-59x^2$, siccome la Tavola dà $5=b_3=b_5$ ed $n=6$, soddisfaranno dunque non tanto le convergenti dell'indice $6m-4$, quanto quelle dell'indice $6m-2$, in conseguenza quelle dell'indice 2, 4, 8, 10, 14, 16 ec.

6.° Se $k+l=n^2$, soddisfarà in primo luogo $x=1$. Per aver poi altre soluzioni fo I.° $\sqrt{Q}=nx-kx_1$, ed osservando che $n^2-l=k$ ottengo $x^2-2nxx_1=1-kx_1^2$. Compito il quadrato del primo membro e quindi fatto II.° $\sqrt{Q_1}=x-nx_1$, ho infine $1=Q_1-lx_1^2$, equazione che risolvo col metodo del caso 4.°. Avuto x_1 e Q_1, la II.° darà x, la I.° Q.

7.° Se $k=l$, onde sia $l+lx^2=Q$, pongo $\sqrt{Q}=l\sqrt{Q_1}$. Sostituendo avrò $x^2-lQ_1=-1$, equazione che egualmente ricade tra quelle contemplate al caso 4.°.

8.° Se k ed l sono multiple d'uno stesso quadrato g^2, l'equazione si renderà più semplice, e talora si ridurrà ad uno dei casi contemplati, dividendola per g^2 (338).

Se lo sia soltanto k ed abbiasi $k=k_1g^2$, si porrà $x=x_1g$, ed avremo $k_1+lx_1^2=Q$. Se lo sia l ed abbiasi $l=l_1g^2$, si porrà $x=\frac{x_1}{g}$ e si avrà $k+l_1x_1^2=Q$. L'ultima trasformazione così facile ad ottenersi, ha dato luogo a poter compendiare la Tavola(118), escludendone non solo i valori quadrati di l, ma anche i multipli di quadrato.

9.° Se k o l sieno negative, nel primo caso moltiplicheremo l'equazione per l; e fatto $kl=g$, $l^2x^2=Q_1$, $Q=z^2$ troveremo $g+lz^2=Q_1$. Nel secondo si moltiplichi l'equazione per k e si divida per x^2; e fatto $\frac{k^2}{x^2}=Q_1$, $kl=g$, $Q=z^2$ avremo $g+kz^2=Q_1$; con che in ambedue i casi l'equazione sarà ridotta alla forma primitiva.

340. Qualora veruno degli accennati casi abbia luogo, e basti risolvere in numeri anche semplicemente razionali l'equazione $k+lx^2=Q$, nella quale k ed l si suppongon dunque maggiori dell'unità, non eguali ad un quadrato, nè multipli di quadrato, e di più positivi, pongo per maggior generalità $x=\frac{y}{z}$, ed ho (338) $kz^2+ly^2=Q$, ossia (ponendo per maggior simmetria del calcolo $Q=\omega^2$), $kz^2+ly^2=\omega^2$, equazione nella quale 1.° le indeterminate y, z, ω potranno essere intere ed anco frazionarie, poichè l'aver noi posto $x=y:z$ non porta che y e z debbano tenersi per interi, potendo una frazione provenire dalla divisione non tanto di due interi quanto di due rotti. Se non che è da osservarsi che quest' ultimo caso include necessariamente anche il primo, vale a dire, che se tra i valori di y e z che rendono la faziona $\frac{y}{z}=x$ atta a soddisfar l'equazione, se ne incontrino dei frazionarj, dovranno infallibilmente trovarsene anche degl' interi. Infatti se sia $y=\frac{a}{b}$, $z=\frac{c}{d}$, il che darebbe $x=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, sarà ancora $x=\frac{ad}{bc}$, e quindi fra i valori di y e z proprj al valore opportuno di x dovranno aver luogo anche i valori interi $y=ad$, $z=bc$, e in quest' ultimo caso anche l' indeterminata ω dovrà essere un intero. D'onde si ha che qualora la proposta sia solubile anche soltanto in numeri frazionarj, la trasformata dovrà sempre poter risolversi in numeri interi. Inoltre y, z ed ω potranno supporsi primi fra loro, perchè se avessero un comun divisore a, l'equazione potrebbe dividersi per a^2, senza cangiare nè di forma, nè di coefficienti. 2.° Saranno altresì prime fra loro due qualunque delle tre suddette indeterminate; perchè se a^2 fosse fattore di z^2 e di y^2, dovrebbe contro l' ipotesi esserlo anche di $\omega^2=kz^2+ly^2$; e se fosse fattore di ω^2 e di z^2 senza esserlo di y^2, o di ω^2 e di y^2 senza esserlo di z^2, dovrebbe nel primo caso esser fattore di l, nel secondo di k, e quindi o l, o k sarebbero multipli di quadrato contro l'ipotesi. 3.° Saran pure prime fra loro y, k, perchè se avessero un comun divisore a, questo apparterrebbe visibilmente anche ad ω, che non sarebbe più primo ad y. E per la stessa ragione saranno primi fra loro z ed l.

341. Ciò premesso e supposto $k>l$, cerco fra i numeri interi minori di $\frac{1}{4}k$ il più piccolo k_1 atto a formare un quadrato n^2 della quantità kk_1+l (333), o a risolvere in numeri interi l'equazione $kk_1+l=n^2$. Quindi fo come sopra (339. 6.°) I.^{a} $\omega=ny-ky_1$, valore che introdotto nella proposta dà $\frac{(n^2-l)y^2}{k}-2nyy_1+ky_1^2$ $=z^2=k_1y^2-2nyy_1+ky_1^2$. Da questa, moltiplicata per k_1, ho $k_1^2y^2-2nk_1yy_1=$ $k_1z^2-kk_1y_1^2$; compito il quadrato del primo membro, posto l in luogo di n^2-kk_1, e fatto II.^{a} $k_1y-ny_1=\omega_1$, ho in fine la trasformata $k_1z^2+ly_1^2=\omega_1^2$ simile alla proposta, ma nella quale si ha $k_1<\frac{1}{4}k$. Se questa è in qualunque modo solubile, avremo y_1, z, ω_1; e quindi y dalla II.^{a} ed ω dalla I.^{a}, o dalla proposta.

Diversamente ripeterò le medesime precise operazioni sulla trasformata, con che giungerò ad una seconda trasformata $k_2z^2+ly_2^2=\omega_2^2$, con $k_2<\frac{1}{4}k_1$, e per conseguenza minore di $\frac{1}{16}k$; e su questa di nuovo opererò finchè il successivo abbassamento di k non abbia reso questo coefficiente minore di l. Pervenuti a questo punto, e supposto il primitivo k ridotto a k_n, siccome non sempre sarebbe possibile di abbassare ulteriormente k_n cercando il solito numero k_{n+1} tra 0 e $\frac{1}{4}k_n$ (334. 2.°), abbasso l nel modo stesso che ho abbassato k, e così continuerò alternando gli abbassamenti or dell'uno, or dell'altro coefficiente, finchè uno dei due non giunga all'unità.

342. Supposto che ciò accada rapporto al coefficiente di y, e che allora il coefficiente di z sia permutato in λ, resterà da risolvere un'equazione della forma $\lambda z^2=\omega^2-y^2$. A tale effetto decomporrò λ in due fattori α, β, e porrò $z=pq$, essendo p, q due arbitrarie. Avremo dunque $\lambda z^2=\alpha\beta p^2q^2=(\omega+y)(\omega-y)$ e potremo fare $\omega+y=\alpha p^2$, $\omega-y=\beta q^2$, d'onde $\omega=\frac{\alpha p^2+\beta q^2}{2}$, $y=\frac{\alpha p^2-\beta q^2}{2}$, dalle quali espressioni e dalla presupposta $z=pq$, in forza della moltiplicità dei fattori α, β in cui potrebbe esser decomponibile λ, e molto più in forza delle arbitrarie p, q (che potranno stabilirsi in modo che ω, y vengano interi) risulteranno per le tre indeterminate finali y, z, ω infiniti valori, dai quali retrocedendo altrettanti se ne avranno per le indeterminate primitive. Si potrà ancora fare $y=1$ nell'ultima equazione $\lambda z^2=\omega^2-y^2$; con che si avrà $1=\omega^2-\lambda z^2$, che si sa sempre risolvere (120).

343. Si noti 1.° che se k fosse minor di l dovrebbe incominciarsi ad operare sopra l come si è operato sopra k.

2.° Che qualora non si trovasse il numero intero k_1 atto a risolvere l'equazione $kk_1+l=n^2$ (341), o a ridurre $\frac{n^2-l}{k}$ ad un intero k_1, il problema sarebbe insolubile. Infatti l'equazione $\frac{(n^2-l)y^2}{k}-2nyy_1+ky_1^2=z^2$ nata dalle due $kz^2+ly^2=$ ω^2, $\omega=ny-ky_1$, deve poter esser soddisfatta da tutti quanti i valori che soddisfanno a queste due. Ora la prima, che è la proposta, qualora sia solubile dà necessariamente luogo (340. 1.°) a valori interi di y, z ed ω; l'altra in cui y è primo a

k, con ω ed y interi presi dalla prima dà parimente luogo a valori interi di n ed y_1 (320). Ora immaginando sostituiti simultaneamente tutti questi valori interi nell'anzidetta equazione, è chiaro che non potrebbero mai soddisfarla se $\frac{n^2-l}{k}$ non fosse un intero k_1, che dovrà dunque sempre trovarsi quando la proposta sia solubile. Del rimanente se è possibile di rendere intero $\frac{n^2-l}{k}$, sarà in seguito sempre possibile di rendere intere tutte le altre espressioni consimili $\frac{n_1^2-l}{k_1}$, $\frac{n_2^2-l}{k_2}$, ec. che s'incontreranno operando sulle trasformate. Infatti se $\frac{n^2-l}{k}$ è un intero k_1, $\frac{n^2-l}{k_1}$ sarà un intero k, e quindi avremo valori interi anche da $\frac{n_1^2-l}{k_1}$ sol che si faccia $n_1=n+k_1m$ (331), tra i quali valori uno dovrà esservene $k_2<\frac{1}{4}k_1$ (333). Come del pari se $\frac{n_1^2-l}{k_1}$ è un intero k_2, $\frac{n_1^2-l}{k_2}$ sarà un intero k_1, e fatto $n_2=n_1+k_2m$, $\frac{n_2^2-l}{k_2}$ sarà un intero k_3, ec. E nella stessa guisa potrà dimostrarsi che anche gl'interi l_1, l_2, l_3, ec. quantità che vengono in campo per l'abbassamento di l, dovranno sempre trovarsi se la proposta è solubile. Infatti quanto ad l_2, l_3 ec. l'ultimo raziocinio non lascia alcun dubbio che debbano sempre aversi qualora si sia trovato l_1. Quanto poi ad l_1 se non fosse possibile ritrovarlo, l'equazione da cui si dà principio all'abbassamento di l, non sarebbe solubile; il che si renderà chiaro ripetendo rapporto ad esso il medesimo ragionamento che abbiamo fatto rapporto alla proposta per mostrare che $\frac{n^2-l}{k}$ doveva essere un intero k_1. Ora è evidente che non essendo solubile questa equazione, non lo sarebbe neppur la proposta. Che poi spingendo il calcolo quanto occorre debba incontrarsi l'unità per valor finale di k o di l, facilmente si vedrà riflettendo che per natura dell'operazione questi due coefficienti dovranno infine ridursi ad esser minori di 4. Un ulteriore abbassamento nel maggiore di essi darebbe un nuovo k o un nuovo l, che dovendo necessariamente aver luogo ed esser di più intero, positivo e minore della quarta parte del precedente, non potrebbe esser che zero; quindi l'equazione successiva prenderebbe la forma o di $ly^2=\omega^2$, o di $kz^2=\omega^2$, in ambedue i casi, insussistente qualora o l, nel primo caso, o k nel secondo non fossero eguali all'unità, giacchè non vi è quadrato alcuno che sia doppio o triplo d'un altro.

3.° Che se per k_1, k_2 ec. si trovino più valori respettivamente più piccoli di $\frac{1}{4}k$, $\frac{1}{4}k_1$, $\frac{1}{4}h_2$ ec. atti all'oggetto di cui si tratta, eseguita l'operazione con uno di essi, potrà partitamente riprendersi coi rimanenti. E se i coefficienti k_1, k_2, k_3 ec., l_1, l_2, l_3 ec. risultino multipli di quadrato, potremo spogliarneli (339. 8.°); con che più speditamente si perverrà al loro abbassamento finale.

4°. Se considerando z come eguale all' unità, alcuna delle trasformate cadesse nei casi contemplati di sopra, questa si scioglierà coi metodi corrispondenti, e da quel punto si comincerà a retrogradare verso l' equazione primitiva (342).

Esempio. Sia da risolversi $101+13x^2=Q$. Posto (341) $x=\frac{y}{z}$ e $Q=\omega^2$, avremo $101z^2+13y^2=\omega^2$, in cui $k=101$, $l=13$, e $k>l$. Calcolo $101k_1+13=n^2$ (342), cercando k_1 fra gl' interi minori di $\frac{101}{4}$, e trovo $k_1=12$, $n=\pm 35$, con che formo I^a. $\omega_1=12y\mp 35y_1$, e insieme la trasformata $12z^2+13y_1^2=\omega_1^2$. Quì osservo che $k_1+l=12+13=25$, quadrato. La trasformata è dunque sciolta (340.6°.) da $z=1$, $y_1=1$, $\omega_1=5$, valori che posti nella I^a. danno $y=\frac{10}{3}$, $=-\frac{5}{2}$, d' onde $x=\frac{y}{z}=\frac{10}{3}$, $=-\frac{5}{2}$. Infatti, ponendo nella proposta $x=\frac{10}{3}$, ho $101+\frac{1300}{9}=\frac{2209}{9}$, quadrato di $\frac{47}{3}$, e ponendo $x=-\frac{5}{2}$, ho $101+\frac{325}{4}=\frac{729}{4}$, quadrato di $\frac{27}{2}$.

Ma se per continuar l' applicazione del metodo, si vuol non attendere al caso osservato, noteremo che nella trasformata il quadrato 4 è summultiplo del 12, coefficiente di z^2. Lo tolgo (340.3°) ponendo $z=\frac{1}{2}\varphi$, con che la trasformata mi si riduce a $3\varphi^2+13y_1^2=\omega_1^2$; e quì omettendo di osservare che si ha $3+13=16$, quadrato, il che porterebbe a soluzioni le quali si troverebbero come sopra, rifletto che avendosi $l>k_1$, converrà abbassare l (343). Cerco dunque quel numero $l_1<\frac{l}{4}$, che rende $13l_1+3=n_1^2$, e trovo $l_1=1$, $n_1=\pm 4$, con che formo ω_2, avvertendo però di cambiar nella formula generale I^a.(342) y in φ, y_1 in φ_1, perchè quì il coefficiente che si tratta di abbassare appartiene non più a z, o a φ, che adesso tiene il luogo di z, ma ad y_1. Ho dunque II^a. $\omega_4=\varphi\mp 4\varphi_1$ e per nuova trasformata $y_1^2+3\varphi_1^2=\omega_2^2$; e come in questa il coefficiente di y_1^2 è l' unità, non ho dunque bisogno di procedere ad ulteriori abbassamenti; pongo quindi $\alpha\beta=3$, d' onde gli unici valori $\alpha=3$, $\beta=1$, e in conseguenza $\omega_2=\frac{1}{2}(3p^2+q^2)$, $y_1=\frac{1}{2}(3p^2-q^2)$. Fatto $p=1$, $q=1$, ho $\varphi_1=pq=1$, $\omega_2=2$, $y_1=1$; quindi dalla II^a. $\varphi=6$, $=-2$; e in seguito dalla prima trasformata ridotta, col primo valore di φ, $\omega_1=11$, col secondo, $\omega_1=5$. I due valori di φ danno inoltre $z=3$, $=-1$.

Frattanto con $\omega_1=11$ e con $y_1=1$, la I^a. mi dà $11=12y\mp 35$, d' onde $y=\frac{23}{6}$, $=-2$; e poichè con $\omega_1=11$, si ha insieme $z=3$, avremo dunque $x=\frac{y}{z}=\frac{23}{18}$ $=-\frac{2}{3}$, ambedue i quali valori sciolgono la proposta, dandomi il primo $101+13\times\frac{23^2}{18^2}=\frac{39601}{324}$ quadrato di $\frac{199}{18}$; e dandomi il secondo $101+\frac{13.4}{9}=\frac{961}{9}$ quadrato di $\frac{31}{3}$. Dal secondo valore di $\omega_1=5$, combinato col secondo di $z=-1$, si hanno le soluzioni già trovate di sopra.

Equazioni indeterminate solubili di gradi superiori al secondo

344. L'equazione $y=\sqrt{(b+cx+dx^2+ex^3)}$ si risolve assai facilmente se b sia un quadrato m^2: poichè fatto $m^2+cx+dx^2+ex^3=Q$, avremo $m^2+cx=Q-dx^2-ex^3$, e quindi $\left(m+\frac{cx}{2m}\right)^2=Q-dx^2-ex^3+\frac{c^2x^2}{4m^2}$; eguagliato Q al primo membro si otterrà $x=\frac{c^2-4m^2d}{4em^2}$. Chiamato h questo valore, si ponga $x=z+h$; il polinomio $b+cx+$ec., funzione di x, si cangerà in un altro del medesimo grado, che sarà funzione di z, e per coefficiente di z^0 avrà (276) $b+ch+dh^2+eh^3$, quadrato. Potremo dunque ottenere z da questo come x dal dato; il che darà un nuovo valore di x, come nel modo stesso altri infiniti se ne otterranno ripetendo quanto si vuole la medesima operazione.

345. Con facilità anche maggiore risolveremo la proposta se manchino b e cx, facendo $dx^2+ex^3=Q$, e dividendo il primo membro per x^2 (338). Con ciò avremo $x=\frac{Q-d}{e}=\frac{A^2-a^2d}{a^2e}$. Che se non rimanga che l'ultimo termine ex^3, porremo $ex^3=Q$, e dividendo per x^2, avremo $ex=Q$, ed $x=\frac{Q}{e}=\frac{A^2}{a^2e}$.

346. L'equazione $y=\sqrt[3]{(b+cx+dx^2+fx^3)}$ si risolve in egual modo nel caso di $b=m^3$; ponendo cioè $b+cx+dx^2+fx^3=C$, inteso per C un cubo qualunque, e quindi compiendo il cubo m^3+cx, il che dà $\left(m+\frac{cx}{3m^2}\right)^3=C-dx^2-fx^3+\frac{c^2x^2}{3m^3}+\frac{c^3x^3}{27m^6}$. Eguagliato C al primo membro, l'equazione si ridurrà con x al primo grado, e quindi razionale. Si risolve pure con $f=m^3$; poichè allora avremo $m^3x^3+dx^2=C-cx-b$, ossia, compito il cubo del primo membro, $\left(mx+\frac{d}{3m^2}\right)^3=C-cx-b+\frac{d^2x}{3m^3}+\frac{d^3}{27m^6}$, ed eguagliato come sopra C al primo membro, x rimarrà al primo grado. Ma se si abbia $y=\sqrt[3]{(dx^2+fx^3)}$, si farà $dx^2+fx^3=C$, e dividendo per x^3 il primo membro, il che non altera la qualità di cubo indeterminato che ha il membro secondo, avremo $\frac{d}{x}+f=C=\frac{A^3}{a^3}$, e di qui $x=\frac{a^3d}{A^3-a^3f}$. Infine se sia $y=\sqrt[3]{(b+cx)}$, porremo nel modo medesimo $b+cx=C=\frac{A^3}{a^3}$, ed avremo $x=\frac{A^3-a^3b}{a^3c}$.

Omettiamo per brevità di considerare altri casi, il piccol saggio che abbiamo dato bastar potendo per servire di sufficiente regola, anche trattandosi d'equazioni di gradi maggiori.

Ragioni e Proporzioni

347. Due quantità posson paragonarsi fra loro esaminando o di quanto l'una è maggiore o minore dell'altra, o quante volte l'una è contenuta nell'altra o la contiene. La differenza o il quoziente che risultano da questi confronti diconsi *ragione* o *rapporto* delle due quantità. La ragione è aritmetica se si prenda la *differenza*; è *geometrica* se si prenda il quoziente. Le due quantità poste in confronto si chiamano *termini* della ragione, che si distinguono il primo col nome d'*antecedente*, l'altro con quello di *conseguente*. Per accennare la ragione fra due quantità s'interpongono fra esse due punti. Così le ragioni di 4 a 12, di a a b, si accennano scrivendo $4:12$, $a:b$.

348. Veruna ragione aritmetica rimane alterata se si aumentino o si diminuiscano i suoi due termini di un'egual quantità. Così la ragione di $5:8$ equivale a quella di $7:10$, e di $1:4$; quella di $a:b$ equivale all'altra di $a \pm d : b \pm d$. Parimente veruna ragione geometrica rimane alterata se si moltiplichino o si dividano i suoi due termini per una medesima quantità. Così la ragione geometrica di $8:10$ equivale a quella di $16:20$ e a quella di $4:5$; e la ragione di $a:b$ equivale a quella di $ac:bc$, e a quella di $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}$; il tutto concordemente ai principj da noi già stabiliti (235).

349. Perchè due ragioni $m:n$, $p:q$ sieno assolutamente eguali è necessario 1°. che i loro termini dien luogo alla stessa differenza se sono aritmetiche, allo stesso quoziente se son geometriche; 2°. che l'antecedente sia in ambedue maggiore, o in ambedue minore del suo conseguente. Verificandosi queste due condizioni i quattro termini m, n, p, q diconsi essere in *ragion diretta* tra loro; avendo luogo la prima e non la seconda, si dicono essere *in ragione inversa* tra loro. Così il 3 e il 5, il 10 e il 12 sono tra loro in ragion diretta aritmetica; mentre il 5 e il 15, il 18 e il 6 sono in ragione inversa geometrica.

350. Una ragione si chiama *composta* se sia la somma o il prodotto di più ragioni: così le ragioni $a:b$, $f:g$, $h:k$ danno

la composta aritmetica $a+f+h : b+g+k$, o la composta geometrica $afh : bgk$. Che se le due, le tre, ec. componenti sieno eguali (349), la composta aritmetica sarà *dupla*, *tripla*, ec., e la composta geometrica sarà *duplicata*, *triplicata*, ec. d'una qualunque delle componenti : così le due aritmetiche eguali $a : a+d$, $b : b+d$ danno la dupla $a+b : a+b+2d$, la cui differenza $2d$ è doppia di d; e le due eguali geometriche $a : aq$, $b : bq$ danno la duplicata $ab : abq^2$, il cui quoziente q^2 è duplicato o quadrato di q. Perciò la ragion duplicata, triplicata, ec. dicesi anche la *ragion dei quadrati*, *dei cubi*, ec.

351. Due ragioni eguali e dirette (349) formano una *proporzione*, che è o *aritmetica* o *geometrica* se le ragioni sono aritmetiche o geometriche: l'una si contrassegna con tre, l'altra con quattro punti tra le due ragioni. Perciò $a : a\pm d \therefore b : b\pm d$ è la formula generale delle proporzioni aritmetiche, ed $a : aq :: b : bq$ delle geometriche. La prima si pronunzia : a *sta ad* a±d *come aritmeticamente* b *sta a* b±d; l'altra : a *sta ad* aq *come geometricamente* b *sta a* bq, o semplicemente *come* b *sta a* bq. Il primo e l' ultimo termine diconsi *estremi*, i due di mezzo *medj* o *intermedj*. Quando si nomina proporzione senz' altro aggiunto s'intende sempre parlare di proporzione geometrica.

352. Due ragioni inverse comecchè non assolutamente eguali (349) non formano proporzione: ma può sempre ricavarsi dalle medesime una proporzione, invertendo i termini di una di esse, cioè ponendo l'antecedente in luogo del conseguente e viceversa. Così dalle due inverse $5 : 15$, $21 : 7$, si ricava la proporzione $5 : 15 :: 7 : 21$, o l'altra $15 : 5 :: 21 : 7$. Infatti sì nell'una che nell' altra le due ragioni son eguali in tutto il rigore del termine (349). Che se si tratti soltanto di ragioni inverse geometriche, in luogo di rovesciare i termini di una di esse come abbiamo proposto, potranno anche scriversi nel loro ordine dato, ma ponendoli in forma di denominatore dell' unità. Così nell' esempio allegato avremo una proporzione scrivendo $5 : 15 :: \frac{1}{21} : \frac{1}{7}$. Il che, quando non fosse per se medesimo manifesto, potrebbe provarsi osservando che la ragione $\frac{1}{21} : \frac{1}{7}$ non è che quella di $7 : 21$ divisa in ciascun dei suoi termini per il prodotto

7×21. È dunque alla medesima equivalente (349), e sta per egual modo in proporzione col $5 : 15$. Preverremo intanto, che allorquando la proporzione è scritta nell' indicato ultimo modo, in luogo di 5 *sta a* 15 come $\frac{1}{21}$ *a* $\frac{1}{7}$, si preferisce talvolta dire 5 *sta a* 15 in *ragione inversa* di 21 *a* 7, oppure *inversamente come* 21. *a* 7. Se poi si abbia la proporzione $a : b :: \frac{m}{p} : \frac{n}{q}$, in più occasioni tornerà opportuno di leggere a sta a b in *ragion composta diretta* di m ad n, e *inversa* di p a q.

353. Se accada che i due termini medj di una proporzione sieno eguali, come in $3 : 15 :: 15 : 75$, la proporzione si chiama allora *continua*, il termine ripetuto si chiama *medio proporzionale*, l' ultimo dei due estremi *terzo proporzionale*. Nelle proporzioni non continue, che diconsi anche *discrete*, l'ultimo dei due estremi si chiama *quarto proporzionale*.

Le proporzioni sono di un uso estesissimo in tutte le Matematiche, e somma è l' importanza di conoscerne le proprietà, di cui le principali si riducono alle seguenti.

354. I^a. *Le somme dei medj e degli estremi in tutte le proporzioni aritmetiche, e i loro prodotti nelle geometriche si eguagliano.* Riprese infatti le due formule generali (351), è chiaro che dalla prima, o si sommino i medj o gli estremi, si ottien sempre $a \pm d + b$; e dalla seconda si ha lo stesso prodotto abq moltiplicando tra loro tanto gli uni che gli altri. Di qui l' importante conseguenza che *dati tre termini* a, b, c *di una proporzione, può sempre trovarsene il quarto mancante.* Poichè chiamandolo x, se la proporzione è aritmetica, e secondo che il termine ignoto sarà uno degli estremi o dei medj, avremo $a : b .\!\cdot.\, c : x$, ovvero $a : b .\!\cdot.\, x : c$, e quindi dalla prima $a + x = b + c$, ed $x = b + c - a$; e dalla seconda $b + x = a + c$, ed $x = a + c - b$. Se poi è geometrica, avremo $a : b :: c : x$, ovvero $a : b :: x : c$, e quindi $ax = bc$, ed $x = \frac{bc}{a}$ dall' una, e $bx = ac$, ed $x = \frac{ac}{b}$ dall' altra.

355. II^a. *In ogni proporzion continua se è aritmetica, la somma degli estremi eguaglia il doppio del medio, e se è geometrica il prodotto degli estremi eguaglia il quadrato*

del medio. Questa proposizione non è che una conseguenza della precedente. Infatti se $a : b \cdot\!\cdot\, b : c$, deve aversi $a+c=b+b=2b$; e se $a:b::b:c$, deve aversi $ac=bb=b^2$. Quindi se il medio proporzionale sia ignoto, potremo averlo dall' equazione $x=\frac{a+c}{2}$ nella proporzione aritmetica, e da $x=\sqrt{ac}$ nella geometrica. E se sia ignoto il terzo proporzionale, verrà dato da $x=2b-a$ nel primo caso, e da $x=\frac{b^2}{a}$ nel secondo.

356. III. *Ogni proporzione aritmetica o geometrica dà un' equazione*, il che è evidente (354.355.); *ed ogni equazione dà una proporzione aritmetica o geometrica*. Così da $m+n=2a+b$, nasce la proporzione aritmetica $m:2a \cdot\!\cdot\, b:n$, o l' altra $m:a \cdot\!\cdot\, a+b:n$; da $a^2-x^2=b^2-y^2$ nasce la proporzione geometrica $a-x:b-y::b+y:a+x$; e da $x=ab$, nasce $a:1::x:b$, oppure $a:\sqrt{x}::\sqrt{x}:b$.

357. Quindi non solo i cangiamenti che non alterano le ragioni (347), ma neppur quelli che non alterano l' eguaglianza fra le somme dei medj e degli estremi nelle proporzioni aritmetiche, o fra i prodotti di essi nelle geometriche, non altereranno la proporzione. Perciò 1°. potremo nell' una e nell' altra porre un estremo o un medio in luogo dell' altro estremo o dell' altro medio *alternando*, i due estremi in luogo dei due medj, e i due medj in luogo dei due estremi *invertendo*. 2°. Nell' aritmetica potremo aumentare o diminuire di un numero qualunque m un estremo ed un medio; moltiplicare o divider per m ciascun termine della proporzione; e se si abbiano due o più proporzioni potremo o sommare o sottrar gli uni dagli altri tutti i termini corrispondenti. Così se sia $a:b \cdot\!\cdot\, c:d$, sarà parimente $a:c \cdot\!\cdot\, b:d$; $b:a \cdot\!\cdot\, d:c$; $a+m:b+m \cdot\!\cdot\, c:d$; $am:bm \cdot\!\cdot\, cm:dm$; $\frac{a}{m}:\frac{b}{m} \cdot\!\cdot\, \frac{c}{m}:\frac{d}{m}$; e se abbiasi l'altra proporzione $p:q \cdot\!\cdot\, r:s$, avremo pure $a\pm p:b\pm q \cdot\!\cdot\, c\pm r:d\pm s$. Infatti nei cinque primi casi si scende sempre all' equazione $a+d=b+c$ come dalla data, e nell'ultimo si ha $a\pm p+d\pm s=b\pm q+c\pm r$; ma in virtù della seconda $p+s=q+r$, dunque $a+d=b+c$, come sopra. 3°. Nella geometrica potremo moltiplicare o dividere un medio ed un estre-

mo per qualunque numero m; divider l'uno per l'altro un medio ed un estremo; alzar tutti i termini ad una stessa potenza m o $\frac{m}{n}$; stabilire una proporzione fra i termini primo e secondo, e la somma o differenza del primo e terzo, e quella del secondo e quarto, o fra le somme e differenze dei primi e degli ultimi due; infine moltiplicare o dividere gli uni per gli altri i termini corrispondenti di due o più diverse proporzioni. Così data $a:b::c:d$, oltre $a:c::b:d$, e $b:a::d:c$, potremo formare $am:bm::c:d$; $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::c:d$; $a:b::1:\frac{d}{c}$; $a:b::\frac{1}{d}:\frac{1}{c}$; $a:\frac{1}{d}::c:\frac{1}{b}$; $a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}::c^{\frac{m}{n}}:d^{\frac{m}{n}}$; $a:b::a\pm c:b\pm d$; $a\pm b:a\mp b::c\pm d:c\mp d$, o ancora $a\pm c:a\mp c::b\pm d:b\mp d$; e data $p:q::r:s$, sarà $ap:bq::cr:ds$, ed anche $\frac{a}{p}:\frac{b}{q}::\frac{c}{r}:\frac{d}{s}$; infatti da ciascuna delle prime si giunge ad $ad=bc$, e l'ultime, in cui per l'una $adps=cbqr$, e per l'altra $\frac{ad}{ps}=\frac{bc}{qr}$, danno esse pure $ad=bc$ in forza dell'essere $ps=qr$ per la proporzione seconda. Infine se si abbia $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::c:d$, oppure $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{p}:\frac{d}{q}$ potremo per analoghe ragioni trar dalla prima $a:b::cm:dn$, ovvero $an:bm::c:d$, e viceversa dalla 2ª. $ap:bq::cm:dn$, oppure $an:bm::cq:dp$, e reciprocamente.

358. IV. *In una serie di ragioni geometriche eguali la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti, come uno o più antecedenti ai loro conseguenti.* Infatti $a:aq::b:bq::c:cq::f:fq$ ec. ci danno $a+b+c+f+$ec.$:(a+b+c+f+$ec.$)q::$ (357.3°) $1:q::a:aq::a+b:(a+b)q$, ec.

Progressioni

359. Si dà il nome di *progressione* ad una serie di numeri collegati fra loro in maniera, che il primo stia al secondo come il secondo al terzo, come il terzo al quarto, ec. Se il rapporto costante di un numero all'altro è aritmetico, la progressione è aritmetica; se geometrico, la progressione è geometrica. Così i numeri 1, 3, 5, 7, 9, ec., ciascun dei quali differisce co-

stantemente di due unità dal suo antecedente, formano una progressione aritmetica; mentre i numeri 1, 3, 9, 27, 81, ec., ciascun dei quali è triplo di quello che lo precede, formano una progressione geometrica. La prima si accenna scrivendo $\div$ 1 : 3 : 5 : 7 : 9, ec., la seconda scrivendo semplicemente 1 : 3 : 9 : 27 : 81, ec. La ragione o rapporto costante si chiama *differenza* nelle progressioni aritmetiche, *quoziente* nelle geometriche; e di qui l' uso modernamente introdotto di chiamar le prime *progressioni per differenze*, le seconde *progressioni per quozienti*.

360. Le progressioni son crescenti o decrescenti, secondochè i loro termini dal primo all' ultimo vanno o crescendo o diminuendo di valore. Nelle crescenti aritmetiche ciascun termine si forma aggiungendo al suo precedente la differenza, nelle decrescenti toglieudola. Nelle geometriche ogni termine si ha moltiplicando quello che lo precede per il quoziente se son crescenti, dividendolo se decrescenti. Tutto questo è evidente; supposto perciò a il primo termine, d la differenza, q il quoziente ed n il numero dei termini di ciascuna di queste specie di progressioni, avremo le quattro seguenti formule generali:

Iª. $\div\, a : a+d : a+2d : a+3d \,..: a+(n-1)d$	IIª. $a : aq : aq^2 : aq^3 \,..: aq^{n-1}$
IIIª. $\div\, a : a-d : a-2d : a-3d \,..: a-(n-1)d$	IVª. $a : \frac{a}{q} : \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q^3} \,...: \frac{a}{q^{n-1}}$

Che anzi, poichè la IIIª. e IVª. che servono per le decrescenti non sono in sostanza che la Iª. e IIª., cangiato per l' una il d in $-d$, per l' altra il q in $\frac{1}{q}$, omesse affatto quelle, potremo soltanto ritener queste, avvertendo d' introdurvi i suddetti respettivi cangiamenti qualora in luogo di progressioni crescenti si tratti di progressioni decrescenti.

361. Ciò premesso, si tratti di trovar la somma s dei primi n termini di una progressione. Se questa è geometrica, avremo $s = a + aq + aq^2 + aq^3 +$ ec. ... $+ aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + q^3 +$ ec. . . . $+ q^{n-1}) = (261)\, \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$. Se è aritmetica, osserveremo che chiamandone ω l' ultimo termine, ed invertendola, si cangia nell' identica decrescente $\div\, \omega : \omega - d : \omega - 2d : \omega - 3d \ldots : \omega - (n-1)d$. Frattanto dalla diretta si ha evidentemente $s = an + d(1 + 2 + 3 +$ ec. . . . $+ (n-1))$, e dall' inversa $s = \omega n -$

$d\Big(1+2+3+\text{ec.}\ldots+(n-1)\Big)$: sommando quindi le due espressioni avremo $2s=an+\omega n$, e quindi $s=\frac{n}{2}(a+\omega)$.

362. Poichè insieme con $s=\frac{n}{2}(a+\omega)$ si ha nelle progressioni aritmetiche $\omega=a+(n-1)d$; e insieme con $s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ si ha nelle geometriche $\omega=aq^{n-1}$, combinando respettivamente fra loro queste doppie formule, potran dedursene le quaranta seguenti, per cui date tre delle cinque quantità a, d, n, s, ω nelle progressioni aritmetiche, a, q, n, s, ω nelle geometriche, si ha qualunque delle altre due, purchè per alcune delle geometriche, e precisamente per quelle che danno n, si conosca la teoria dei logaritmi.

Per le Progressioni aritmetiche

363. $a=\omega-d(n-1),=\frac{s}{n}-\frac{d(n-1)}{2},=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{\Big((\omega+\frac{d}{2})^2-2ds\Big)},=\frac{2s}{n}-\omega$

364. $d=\frac{\omega-a}{n-1},=\frac{2(s-an)}{n(n-1)},=\frac{\omega^2-a^2}{2s-a-\omega},=\frac{2(\omega n-s)}{n(n-1)}$

365. $n=1+\frac{\omega-a}{d},=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\pm\sqrt{\Big(\frac{2s}{d}+(\frac{a}{d}-\frac{1}{2})^2\Big)},=\frac{2s}{a+\omega},=\ldots\ldots$
$\frac{1}{2}+\frac{\omega}{d}\pm\sqrt{\Big((\frac{\omega}{d}+\frac{1}{2})^2-\frac{2s}{d}\Big)}$.

366. $\omega=a+d(n-1),=\frac{2s}{n}-a,=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{\Big(2ds+(a-\frac{d}{2})^2\Big)},=\frac{s}{n}+\frac{d(n-1)}{2}$

367. $s=\frac{n}{2}(a+\omega),=n\Big(a+d(\frac{n-1}{2})\Big),=(\frac{\omega+a}{2})(1+\frac{\omega-a}{d}),=n\Big((\omega-d(\frac{n-1}{2})\Big)$

Per le Progressioni geometriche

368. $a=\frac{\omega}{q^{n-1}}$; $a=s\Big(\frac{q-1}{q^n-1}\Big)$; $a=q(\omega-s)+s$; $a(s-a)^{n-1}=\omega(s-\omega)^{n-1}$

369. $q=\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$; $q^n-\frac{s}{a}q+\frac{s}{a}-1=0$; $q=\frac{s-a}{s-\omega}$; $q^n-\frac{s}{s-\omega}q^{n-1}+\frac{\omega}{s-\omega}=0$

370. $n=1+\frac{L\omega-La}{Lq},=1+\frac{L\omega-La}{L(s-a)-L(s-\omega)},=\frac{L(a+s(q-1))-La}{Lq},=\ldots$
$1+\frac{L\omega-L(\omega q-s(q-1))}{Lq}$

371. $\omega=aq^{n-1}$; $\omega(s-\omega)^{n-1}=a(s-a)^{n-1}$; $\omega=s-\frac{(s-a)}{q},=sq^{n-1}\Big(\frac{q-1}{q^n-1}\Big)$

372. $s=\frac{\sqrt[n-1]{\omega^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{\omega}-\sqrt[n-1]{a}},=a\frac{(q^n-1)}{q-1},=\frac{\omega q-a}{q-1},=\frac{\omega}{q^{n-1}}\Big(\frac{q^n-1}{q-1}\Big)$

373. Applicazioni. I. Si sa dopo *Galileo* che cadendo un corpo per solo impulso di gravità, scorre nel primo minuto secondo di sua caduta 15 piedi in circa, 45 nel secondo, e così successivamente sempre aumentando di egual differenza. Si cerca quanto spazio s avrà percorso alla fine di sei secondi, e quanto nell' ultimo. Quì si ha una progressione aritmetica in cui son dati $a=15$, $d=30$, $n=6$, sarà dunque (367) $s=6(15+\frac{5\times30}{2})=540$, ed $\omega=15+5\times30=165$.

II. Tra l'istante in cui lasciai cadere un piccol grave in una voragine, e quello in cui mi giunse all'orecchio il suono della percossa, scorsero 6 minuti secondi. Supposta la stessa legge che sopra, e di più che il suono percorra uniformemente 163 tese per ogni secondo, cerco la profondità s della voragine.

Quì il tempo impiegato dal grave in discendere è ignoto: lo chiamo x; sarà dunque $n=x$, e (367) $s=15x^2$. D'altronde poichè il suono ha percorso lo stesso spazio s in $6-x$ secondi facendo 163 tese, ossia 978 piedi in ogni secondo, avremo $s=978\times(6-x)$. Di quì l'equazione $15x^2=978(6-x)$, d'onde si ha $x=5,5308$ ed $s=458,8776$.

III. Suppongasi che un seme di grano seminato in un terreno di media feracità non ne riproduca che sei, e che la raccolta d'ogni anno s'impieghi totalmente in nuova sementa, la quale si riproduca costantemente e senza alcuna perdita nella medesima proporzione; si domanda qual diverrà dopo 10 anni. Abbiamo una progressione geometrica in cui $a=1$, $q=6$, $n=10$ e si cerca ω. Sarà dunque (371) $\omega=aq^{n-1}=6^9=10077696$. Onde posto il sacco di 150 libbre, ed un seme corrispondente in peso ad un grano (122), si troveranno sacca 9,72.

IV. Due vascelli partono nel tempo stesso da due luoghi 100 leghe fra loro lontani per incontrarsi: e il primo raddoppiando, l'altro rinterzando giornalmente il viaggio, che nel primo giorno fu eguale per ambedue, si trovano dopo quattro giorni. Cerco il viaggio di ciascheduno, e quanto fecero nel primo e nell'ultimo giorno. Quì abbiamo due progressioni geometriche, di cui non è noto che il numero $n=4$ dei termini e il quo-

ziente, che nella prima è $q=2$, nell' altra $q_1=3$. Sappiamo però che chiamati s, s_1 i viaggi cercati, a, a_1 quelli del primo giorno, si ha $s_1=100-s$ ed $a=a_1$. Avremo dunque le due equazioni (372) $s=15a$, $s_1=40a=100-s$. Di qui $s=27,27273$, $s_1=72,72727$, $a=1,81818$, $\omega=14,54545$, ed $\omega_1=49,09091$.

V. Un giocatore aggiunge sempre 2 alla sua posta, ed un altro sempre la raddoppia; la prima volta giocaron 3, e perderono dieci volte: cerco le perdite. La progressione per il primo è aritmetica, per il secondo geometrica, ed abbiamo $a=3$, $d=q=2$, $n=10$; dunque il primo perdè $s=120$ (367), il secondo $s=3069$ (372).

VI. Tra due termini a, ω inserire m termini in progressione. Basterà dunque trovar d o q; e poichè abbiamo a, ω ed $n=m+2$, verrà $d=\frac{\omega-a}{m+1}$ (364), $q=\sqrt[m+1]{\frac{\omega}{a}}$ (369). Così se $m=4$, sarà $d=\frac{\omega-a}{5}$, $q=\sqrt[5]{\frac{\omega}{a}}$, e $\div a:\frac{4a+\omega}{5}:\frac{3a+2\omega}{5}:\frac{2a+3\omega}{5}:\frac{a+4\omega}{5}:\omega$; del pari $a:\sqrt[5]{a^4\omega}:\sqrt[5]{a^3\omega^2}:\sqrt[5]{a^2\omega^3}:\sqrt[5]{a\omega^4}:\omega$.

VII. Vogliasi la somma della progressione geometrica decrescente ed infinita $a:\frac{a}{q}:\frac{a}{q^2}:\frac{a}{q^3}$, ec. Per un numero finito n di termini, fatti nelle formule i debiti cangiamenti (360), si avrebbe $s=\frac{a\left(\frac{1}{q^n}-1\right)}{\frac{1}{q}-1}$, e sarebbe in oltre $\omega=\frac{a}{q^{n-1}}$ il termine n^{simo}, e quindi $\frac{a}{q^n}$ il suo susseguente $(n+1)^{simo}$. Ma se la progressione si prenda fino all'infinito, e quindi sotto il numero n si comprendano tutti quanti mai sono i suoi termini fino al più piccolo possibile, il termine $(n+1)^{simo}$ dovrà esser nullo, d' onde $\frac{a}{q^n}=0$, e perciò $\frac{1}{q^n}=0$. Avremo dunque per la somma cercata $s=\frac{a}{1-\frac{1}{q}}$. Così per la progressione $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{2^2}:\frac{1}{2^3}$, ec. in infinito, ove $a=1$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, sarà $s=2$. Questa somma si deve riguardare non altrimenti che come il *limite* a cui continuamente si acco-

sta la data progressione a misura che va aumentando il numero dei suoi termini, senza poterlo per altro raggiunger giammai.

374. Da ciò si ha il modo di sommare, e ridurre alla forma di rotto comune un rotto decimale interamente o no periodico (90). Sia m il numero delle cifre componenti il periodo; e b il valore di quello che rappresentano. Se il rotto è interamente periodico, il 1°. periodo equivarrà a $\frac{b}{10^m}$, il 2°. a $\frac{b}{10^{2m}}$, il 3°. a $\frac{b}{10^{3m}}$ ec., e il rotto tutto a $\frac{b}{10^m}+\frac{b}{10^{2m}}+\frac{b}{10^{3m}}+$ec., progressione decrescente infinita, in cui $a=\frac{b}{10^m}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{10^m}$; sarà dunque (373.VII) $s=\frac{b}{10^m-1}$. Così per il rotto o, 363636 ec., avendosi $b=36$, $m=2$, sarà $s=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$. Qualora poi il primo periodo cominci dopo n cifre, il suo valore sarà non più $\frac{b}{10^m}$, ma $\frac{b}{10^{m+n}}$, e quello dei periodi seguenti $\frac{b}{10^{2m+n}}$, $\frac{b}{10^{3m+n}}$, ec. e quindi pel valore della parte periodica avremo $s=\frac{b}{10^n(10^m-1)}$, che sommata con la parte fuori di periodo, darà il valore totale del rotto proposto. Abbiasi, per esempio, o,3522 ec. Avremo $n=2$, $m=1$, $b=2$, e per la parte periodica $s=\frac{2}{900}$, che con $\frac{35}{100}$ dà $\frac{317}{900}$.

375. Come nelle progressioni aritmetiche può esser negativa la differenza, così nelle geometriche può esser negativo il quoziente. La progressione generale $a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots : aq^{n-1}$ (360) diviene in tal caso (184) $a : -aq : aq^2 : -aq^3 \ldots : \pm aq^{n-1}$, preso il segno di sotto nell'ultimo termine quando n è pari; e per questa come per quella valgono le stesse formule cangiato soltanto il q in $-q$. Così mentre per la somma della prima si ha I^a. $s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ (372), per la somma dell'altra, osservate le regole per le potenze dei numeri negativi (184), troveremo II^a. $s=-\frac{a(q^n-1)}{q+1}$ con n pari, e III^a. $s=\frac{a(q^n+1)}{q+1}$ con n impari. Sia frattanto $a=1$; dalla prima in tal caso si avrà $q^n-1=s(q-1)$, dal-

la seconda, con n pari, $q^n-1=-s(q+1)$, e dalla terza con n impari $q^n+1=s(q+1)$; perciò 1°. *qualunque potenza q^n diminuita di un' unità è multipla della sua radice diminuita parimente di un' unità*, il che già anche altrove osservammo (261); 2°. *qualunque potenza pari diminuita di un' unità è altresì multipla della sua radice accresciuta di un' unità*; 3°. *qualunque potenza impari accresciuta di un' unità, è multipla della sua radice accresciuta di un' unità*. Quindi, poichè $q^{mn}=(q^m)^n$ (183), sarà altresì $q^{mn}-1$ multiplo di q^m-1, e se n è pari, anche di q^m+1; come $q^{mn}+1$ sarà multiplo di q^m+1 se n è impari.

376. Ma sia a qualunque, e $q=10$; dal primo valore di s avremo $\frac{10^n a}{9}=s+\frac{a}{9}$, d'onde si raccoglie che qualunque potenza n del 10 moltiplicata per a e divisa per 9 dà di quozionte $s=a(1+10+10^2+\text{ec.}\ .\ .\ +10^{n-1})$ e di resto a, se a è cifra semplice, o lo stesso resto che darebbe a, se a è numero composto. Così i numeri $6=10^0\times6$; $70=10^1\times7$; $500=10^2\times5$; $4000=10^3\times4$; $20000=10^4\times2$ danno in ordine i quozienti zero; 7×1; 5×11; 4×111; 2×1111; ed i resti 6, 7, 5, 4, 2. Ora si chiami N la somma totale dei suddetti numeri, S quella dei loro quozienti; S_1 quella dei resti. Sarà $N=24576$, ed S_1 equivarrà visibilmente alla somma delle cifre componenti il numero N. Frattanto avremo $\frac{N}{9}=S+\frac{S_1}{9}$, alla quale espressione è chiaro che si sarebbe in egual modo pervenuti qualunque e comunque diversi fossero stati i numeri primitivi presi in esempio. Or poichè da questa apparisce che dal divider N per 9 non può aversi altro resto che quello che può dare il rotto $\frac{S_1}{9}$, può concludersi in generale che dividendo per 9 un numero qualunque N, si ha lo stesso resto che dal divider per 9 la somma S delle sue cifre, proprietà rimarchevole di cui daremo altrove una più rigorosa dimostrazione (12).

377. Siamo adesso in grado di dimostrare, come di già promettemmo, la regola della riprova del 9 (27). Sieno F, F_1 i due fattori, P il loro prodotto, r, r_1, R, R_1 i quattro resti che si

ottengono operando secondo la regola sopra i due fattori, sul loro prodotto, e sul prodotto rr_1, ed infine q, q_1, q_2 i quozienti interi che risulterebbero facendo effettivamente la divisione per 9 di F, F_1, rr_1. Avremo (31.1°) $F=9q+r, F_1=9q_1+r_1$, $rr_1=9q_2+R_1$, ed $FF_1=(9q+r)(9q_1+r_1)$, cioè, sviluppando e introducendo il valore di rr_1, $FF_1=9(9qq_1+rq_1+r_1q+q_2)+R_1$, espressione che divisa per 9 dà visibilmente il resto R_1. Ma da P si ha in ipotesi il resto R; converrà dunque che sia $R_1=R$, se $FF_1=P$, cioè se l'operazione è ben fatta.

378. Sono osservabili le seguenti particolarità: 1ª. la somma di qualunque numero n di termini della progressione aritmetica 1, 3, 5, ec. dà sempre un quadrato. Infatti avendosi $a=1$, $d=2$, sarà (367) $s=n\left(a+\frac{d(n-1)}{2}\right)=n^2$. 2ª. La somma della progressione aritmetica 1, 2, 3, ec. dando $s=\frac{n(n+1)}{2}$, si avrà $8s=4n\times(n+1)=(2n+1)^2-1$; *e di quì ogni quadrato impari diminuito di un' unità è multiplo d'*8. 3ª. Poichè per la progressione $1:q:q^2:\ldots q^{n-1}$ si ha $s=\frac{q^n-1}{q-1}$ (372), quantità che, con q intero, è minore di q^n; perciò ogni *potenza* n^{sima} *di qualunque intero* q *supera la somma di tutte le sue precedenti*. 4ª. *I termini d'una progressione aritmetica o geometrica sommati ad* m *ad* m, *danno una nuova progressione aritmetica o geometrica, la cui differenza* d_1 *eguaglia* dm^2, *e il quoziente* q_1 *eguaglia* q^m. Infatti la somma dei primi m termini sarà (367) $m\left(a+\frac{d(m-1)}{2}\right)$, o (372) $\frac{a(q^m-1)}{q-1}$; per quella dei secondi, il primo dei quali è $a+md$ o aq^m, si troverà $m\left(a+md+\frac{d(m-1)}{2}\right)$, o $\frac{aq^m(q^m-1)}{q-1}$; per quella dei terzi, il primo dei quali è $a+2md$, o aq^{2m}, si troverà $m\left(a+2md+\frac{d(m-1)}{2}\right)$, ovvero $\frac{aq^{2m}(q^m-1)}{q-1}$, ec. ed è evidente che queste somme formano due progressioni, l'una delle quali ha dm^2 per differenza, l'altra q^m per quoziente.

379. All'incontro *i termini d'una progressione aritmetica o geometrica che ha* d_1 *per differenza, o* q_1 *per quoziente, possono riguardarsi come somme di* m *termini di un' altra ignota aritmetica o geometrica*, in cui la somma s di m termini è a_1, il numero n è m, e la differenza o il quoziente sono $\frac{d_1}{m^2}$, o $q_1^{\frac{1}{m}}$: onde il primo termine dell' ignota aritmetica viene $a=\frac{m(2a_1-d_1)+d_1}{2m^2}$ (363), della geometrica $a=\frac{a_1(q_1^{\frac{1}{m}}-1)}{q_1-1}$ (368). Così data la progressione aritmetica 15, 33, 51, ec.

ove $a_1=15$, $d_1=18$, se sia $m=3$, verrà $\frac{d_1}{m^2}=2$, $a=3$ e la progressione ignota sarà 3, 5, 7, ec. E data la progressione geometrica 6, 24, 96, ec., se sia $m=2$, verrà $q_1^{\frac{1}{m}}=4^{\frac{1}{2}}=2$, $a=2$ e la progressione ignota 2, 4, 8, ec.; ed è chiaro che i primi e i secondi tre termini nel primo esempio, e i primi e i secondi due nel secondo, sommati eguagliano il primo e secondo delle date.

380. Con ciò può aversi una progressione di n termini quando $n=g+\frac{h}{m}$; poichè basta in tal caso risolvere in m termini ognuno dei $g+1$ termini della data (379), e prender dell'ultimo le parti h.

PRIME NOZIONI SULLE SERIE

381. Dicesi *Serie* un aggregato di termini, che crescono o scemano con una certa legge, come appunto sarebbero le progressioni; è *finita* o *infinita* quando ha un numero finito o infinito di termini: è *divergente* o *convergente* secondo che i suoi termini crescono o scemano di valore; e diverge o converge tanto più rapidamente, quanto più il valor di ciascun termine cresce o scema riguardo al precedente.

382. Diconsi *prime differenze* d'una serie le differenze tra i suoi termini contigui, *seconde, terze*, ec. le differenze tra i contigui termini delle prime, delle seconde ec., nel modo che vedonsi nella di contro serie, che è quella dei cubi.

1,	8,	27,	64,	125,	216, ec.	Dif.
7,	19,	37,	61,	91,	ec.	1ᵉ.
12,	18,	24,	30,	ec.		2ᵉ.
6,	6,	6,	ec.			3ᵉ.
0,	0,	ec.				4ᵉ.

Serie Numeriche

383. Prendiamo qui unicamente a parlare di quelle serie *numeriche*, le quali hanno costante o uniforme un ordine qualunque di differenze, e le distingueremo col nome di serie del prim' ordine, del secondo, del terzo, dell'm^{simo}, secondo che queste differenze costanti saranno le prime, le seconde, le terze, l'm^{sime}. Quella che sopra abbiamo arrecata in esempio è dunque del terz' ordine, perchè le differenze costanti sono appunto le terze.

384. Le principali e più ovvie tra le serie numeriche sono quelle dei numeri *figurati*, dei *poligoni* e delle *potenze*. Si

hanno l'ultime elevando a qualunque potenza m^{sima} i numeri naturali 1, 2, 3, ec., e ciascuna è sempre dell'ordine corrispondente al grado della potenza. Così abbiamo veduto di sopra (382) essere appunto del terz'ordine quella dei cubi. Ecco quelle dei figurati e dei poligoni, con le loro particolari denominazioni.

Numeri figurati	Numeri poligoni
1, 2, 3, 4, 5, ec. Naturali	1, 3, 6, 10, 15, ec. Triangolari
1, 3, 6, 10, 15, ec. Triangolari	1, 4, 9, 16, 25, ec. Quadrati
1, 4, 10, 20, 35, ec. Piramidali	1, 5, 12, 22, 35, ec. Pentagoni
ec. ec. ec.	ec. ec. ec.

Quelle dei figurati cominciando dal prim'ordine passano per tutti i seguenti, e ciascun loro termine n^{simo} è la somma dei primi n termini della serie superiore. Quelle dei poligoni son tutte del second'ordine, e ciascun loro termine n^{simo} è la somma di n termini delle progressioni aritmetiche 1, 2, 3, ec.; 1, 3, 5, 7, ec.; 1, 4, 7, 10, ec., che cominciano tutte dall'unità, ed hanno per respettive differenze 1, 2, 3, ec.

385. Le principali operazioni da farsi sopra una serie son quelle di trovarne i termini *Generale* e *Sommatorio*. Il primo, che chiameremo T, dà l'espressione generale di qualunque termine n^{simo}; e l'altro, che chiameremo S, dà la somma di n termini, quando se ne conoscono alcuni dei primi. Così il termine generale della serie di second'ordine 1, 6, 21, 52, 105, ec. è $T=n^3-n^2+n$, perchè infatti posto $n=1, =2, =3, =4, =5$, ec. si hanno i termini 1°., 2°., 3°., 4°., 5°., ec. della serie. Egualmente $S=n\left(a+d\frac{(n-1)}{2}\right)$ è il termine sommatorio d'ogni progressione aritmetica (367).

386. Cominciando frattanto dalla ricerca del termine generale, si supponga a, a_1, a_2, a_3, ec. la serie data; saranno

a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, a_5-a_4, ec. le 1^e. differenze
a_2-2a_1+a, $a_3-2a_2+a_1$, $a_4-2a_3+a_2$, $a_5-2a_4+a_3$, ec. le 2^e.
$a_3-3a_2+3a_1-a$, $a_4-3a_3+3a_2-a_1$, $a_5-3a_4+3a_3-a_2$, ec. le 3^e.
$a_4-4a_3+6a_2-4a_1+a$, $a_5-4a_4+6a_3-4a_2+a_1$, ec. le 4^e.
$a_5-5a_4+10a_3-10a_2+5a_1-a$, ec. le 5^e.

e chiamate d_1, d_2, d_3, d_4, ec. le prime fra le differenze pri-

me, seconde, terze, quarte, ec. avremo

$$d_1 = a_1 - a$$
$$d_2 = a_2 - 2a_1 + a$$
$$d_3 = a_3 - 3a_2 + 3a_1 - a$$
$$d_4 = a_4 - 4a_3 + 6a_2 - 4a_1 + a$$
$$d_5 = a_5 - 5a_4 + 10a_3 - 10a_2 + 5a_1 - a$$

ec. ec. ec.

valori che potranno continuarsi quanto si vorrà.

387. In generale $d_m = a_m - ma_{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3.} \times a_{m-3} +$ ec; onde se la serie data sia quella delle potenze 0^m, 1^m, 2^m, 3^m, ec., e perciò $a_m = m^m$, $a_{m-1} = (m-1)^m$, $a_{m-2} = (m-2)^m$, ec., sarà $d_m = m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{2}(m-2)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}(m-3)^m +$ ec. E poichè nei casi particolari di $m=1$, $=2$, $=3$, ec. si ha $d_1 = 1$, $d_2 = 1.2$, $d_3 = 1.2.3$, $d_4 = 1.2.3.4$, ec. e perciò $d_m = 1.2.3.4....m$, avremo dunque eguagliando le due espressioni $m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{2}(m-2)^m -$ ec. $= 1.2.3.4....m$.

388. Ora sia m pari, e si sottragga dalla precedente l'equazione $1 - m + \ldots \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} +$ ec. $+ 1 = 0$ (220); si avrà trasponendo l'ultimo termine, $1.\ 2.\ 3 \ldots m + 1 = m^m - 1 - m\left((m-1)^m - 1\right) + \frac{m(m-1)}{2}\left((m-2)^m - 1\right) - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\left((m-3)^m - 1\right) +$ ec. E se posto p numero primo sia $m = \ldots p-1$, avremo $1.2.3..(p-1) + 1 = 1 \times \left((p-1)^{p-1} - 1\right) - (p-1)\left((p-2)^{p-1} - 1\right) + \frac{(p-1)(p-2)}{2}\left((p-3)^{p-1} - 1\right) -$ ec.; e poichè ciascun termine del secondo membro ha un fattore multiplo di p (42); dunque se p è *numero primo l'espressione* $1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots (p-1) + 1$ *sarà multipla di* p, Teorema assai noto di *Wilson*. Ed ha egualmente luogo la proposizione inversa: poichè se p non è numero primo dovrà aver dei fattori fra i numeri che precedono $p-1$; quindi il prodotto $1.2.3 \ldots \times (p-1)$ dovrà esser tutto divisibile per p; dunque non lo potrà essere quando gli venga aggiunta l'unità. Perciò *se il prodotto* $1.2.3 \ldots (p-1)$ *è divisibile per* p, p *non sarà primo*. Queste due conclusioni porterebbero a far direttamente conoscere se un dato numero sia primo o no, qualora i calcoli a cui sottopongono non fossero, diremo così, interminabili. Del resto, per avvertirlo quì di passaggio, non esiste nè può esistere alcuna formula la quale rappresenti esclusivamente i numeri primi. Se ne conoscono alcune per altro che molti ne danno, gli uni successivamente agli altri. La più celebre è $x^2 + x + 41$, dalla quale si hanno costantemente numeri di questo genere ponendo $x = 0$, $= 1$, $= 2$, ec. fino ad $x = 41$.

389. I valori di d_1, d_2, d_3, ec. danno frattanto

per il 2°. term^e. $a_1=a+d_1$

per il 3°. $a_2=a+2d_1+d_2$

per il 4°. $a_3=a+3d_1+3d_2+d_3$

per il 5°. $a_4=a+4d_1+6d_2+4d_3+d_4$

per il 6°. $a_5=a+5d_1+10d_2+10d_3+5d_4+d_5$

espressioni nelle quali l'andamento della parte letterale è manifesto; e quanto ai coefficienti numerici ben si vede che procedono secondo quelli delle successive potenze del binomio $a+b$ (214), in modo che nel valore del 2°. termine si riscontrano i coefficienti della 1^a. potenza, in quelli del 3°. i coefficienti della 2^a, in quelli del 4°., 5°., 6°., ec. i coefficienti della 3^a., 4^a., 5^a., ec. Dunque nel valor cercato del termine n^{simo} o generale, si avranno i coefficienti della potenza $n-1$, e perciò sarà $T=a+(n-1)\,d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}d_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}\;d_3+$ec.

390. Sia per esempio la serie 1, 6, 21, 52, 105, ec. Costruite le differenze, si troveranno $d_1=5$, $d_2=10$, $d_3=6$, $d_4=0=d_5=d_6$ ec. Quindi poichè $a=1$, sarà $T=1+5(n-1)+5(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)(n-3)=n^3-n^2+n$; e se $n=10$, avremo per decimo termine 910.

391. Si riprendano adesso i valori di a, a_1, a_2, a_3, ec. (389), e si sommino partitamente i primi due, i primi tre, i primi quattro. Troveremo per la somma

dei primi due $2a+d_1$

dei primi tre $3a+3d_1+d_2$

dei primi quattro $4a+6d_1+4d_2+d_3$

dei primi cinque $5a+10d_1+10d_2+5d_3+d_4$

d'onde con un raziocinio analogo a quello adoprato nello stabilire il termine Generale T, concluderemo per il termine Sommatorio S, ossia per la somma di n termini della serie proposta, $S=an+\frac{n(n-1)}{2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}d_3+$ ec. Così per la serie dei numeri Naturali, ove $a=1$, $d_1=1$, $d_2=0=d_3=$ec. sarà $S=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$. Per quella dei Triangolari, ove $a=1$, $d_1=2$, $d_2=1$, $d_3=0$, avremo $S=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)=(261)\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$ e se $n=10$, avremo $S=220$.

392. Le differenze prime, seconde, ec. di una serie dell'ordine m, sono esse pure altrettante serie dell'ordine $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec.; onde una serie qualunque può sempre riguardarsi come composta o delle differenze di un'altra serie d' un ordine immediatamente superiore, o delle somme successive dei termini d'una serie d'ordine immediatamente inferiore, aumentate di una quantità costante, cioè del termine iniziale della serie proposta. Così la serie 15, 65, 175, 369, 671, ec. del 3°. ordine, nasce dalle differenze dell'altra del 4°. 1, 16, 81, 256, 625, ec.; come questa nasce all'opposto dalle somme dei successivi termini della prima, tutte aumentate del termine iniziale 1. Ciò somministra dei nuovi mezzi per ottener l' espressione già trovata (391) del termine Sommatorio. Sia infatti a, a_1, a_2, a_3, una data serie, che per comodo chiameremo B, formata dalle differenze di un' altra serie, che chiameremo A. Sia di più f il primo termine della serie A. È manifesto: 1°. che dovendo questa aver per differenze prime a, a_1, a_2, ec., gli altri suoi termini dovranno essere $f+a$, $f+a+a_1$, $f+a+a_1+a_2$, ec.; 2°. che perciò il di lei termine $n+1$ equivarrà visibilmente alla cercata somma di n termini della proposta B aumentata di f; 3°. che per avere il termine $n+1$ della serie A basta sostituire f, a, d_1, d_2, ec. in luogo di a, d_1, d_2, d_3, ec. nel termino Generale della proposta B. Fatte dunque queste sostituzioni, e tolto f, avremo per la somma cercata $S=an+\frac{n(n-1)}{2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}d_2+$ec. precisamente come già trovammo per altra via.

393. Se i valori di T ed S si ordinino per n, assumeranno le forme l'uno di $T=An^m+Bn^{m-1}+Cn^{m-2}+$ec., l'altro di $S=A_1n^{m+1}+B_1n^m+C_1n^{m-1}+$ec., e dovran prendersi $m+1$ termini tanto in T quanto in S, m corrispondendo come sopra all'ordine della serie. Potremo anche far uso di quest'espressioni indipendentemente dalle precedenti; ma allora converrà determinare i coefficienti A, B, C, ec; A_1, B_1, C_1, ec; il che riguardo ai primi si otterrà ponendo successivamente $n=1$, $=2$, $=3$, ec. in T, e respettivamente eguagliando i nuovi risultamenti al termine primo, secondo, terzo, ec. della serie proposta; con che avremo tante equazioni di primo grado, quanti sono i coefficienti da determinarsi. E riguardo ai secondi fatto dal pari $n=1$, $=2$, $=3$, ec. in S dovremo eguagliare il primo risultamento al primo termine della serie, il secondo alla somma dei primi due, il terzo a quella dei primi tre, ec. Del rimanente le nuove espressioni di S e T, o si ottengano in un modo o in un altro, servono evidentemente a risolver pure quei quesiti nei quali T ed S son dati, e si cerca o il termine n che ha il dato valore T, o il numero n dei termini necessarj a produrre la somma S. E qui pure, quando n risulti frazionario, avrà luogo l'osservazione già fatta al num°. 380.

Combinazioni, Permutazioni, e principj del calcolo delle Probabilità

394. Sieno a, b, c, ec. un numero m di quantità di cui si vogliano le *combinazioni* a due a due. Se $m=2$ non avrà luogo che la combinazione unica ab. Se $m=3$ oltre la precedente avranno luogo di più le due altre ac, bc. Se $m=4$ si avranno di più le tre ad, bd, cd. Se $m=5$ si avranno di più le quattro ae, be, ce, de. Onde in generale qualunque siasi m, il numero totale delle combinazioni sarà la somma di $m-1$ termini della serie dei numeri naturali (391) 1, 2, 3, 4, ec. Poichè dunque $n=m-1$, sarà $S=\frac{m(m-1)}{2}$.

395. Delle stesse quantità si cerchino le combinazioni a 3, a 3. Se $m=3$ avrà luogo la combinazione unica abc; se $m=4$ avranno luogo in oltre le tre abd, acd, bcd; se $m=5$ avremo di più le sei $abe, ace, ade, bce, bde, cde$; se $m=6$ avremo di più le dieci $abf, acf, adf, aef, bcf, bdf, bef, cdf, cef, def$. Così altre 15 si troveranno aver luogo se $m=7$; onde in generale per qualunque valore di m il numero delle cercate combinazioni corrisponderà alla somma di $m-2$ termini della serie dei triangolari (391) 1, 3, 6, 10, 15, ec. Poichè dunque $n=m-2$, avremo $S=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$.

396. Nel modo stesso per le combinazioni a 4 a 4, con $m=4$ si avrebbe una combinazione, 4 più con $m=5$, 10 più con $m=6$, 20 più con $m=7$, ed altre 35 con $m=8$. Quindi il numero totale sarà la somma di $m-3$ termini della serie 1, 4, 10, 20, 35, ec. Avendosi dunque $a=1$, $d_1=3$, $d_2=3$, $d_3=1$, $d_4=0$, ed $n=m-4$, troveremo $S=\frac{(m-3)(m^3-3m^2+2m)}{2.3.4}=$ (261) $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$. In generale per le combinazioni di m quantità o lettere ad n ad n avremo $S=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}$.

397. Per applicar queste formule a qualche esempio, si cer-

chi il numero degli *ambi*, dei *terni*, delle *quaderne*, e delle *quintine* nel giuoco del *Lotto*. Sarà $m=90$, e quindi per gli ambi avremo $S=\frac{90.89}{2}=4005$, per i terni $S=\frac{90.89.88}{2.3}=117480$, per le quaderne $S=\frac{90.89.88.87}{2.3.4}=2555190$, per le quintine $S=\frac{90.89.88.87.86}{2.3.4.5}=43949268$.

398. Il valor generale di S, nel modo col quale lo abbiamo stabilito, non suppone che combinazioni di quantità o lettere tutte fra loro diverse. Se vogliamo dar campo anche alle combinazioni *con replica*, nelle quali cioè entrar possa ripetutamente e in tutti i possibili modi una quantità o lettera stessa, converrà calcolarne il numero ed aggiungerlo a quello dell'altre. A tal effetto osserveremo che con $n=2$, le nuove combinazioni non potranno essere che della forma *aa*, *bb*, ec., e in conseguenza nè più nè meno di m. Con $n=3$, le nuove combinazioni saranno in parte della forma *aaa* cioè con tre lettere identiche, e in parte della forma *aab* cioè con due lettere identiche ed una differente. Da ogni lettera ne avremo visibilmente una della prima specie, ed $m-1$, cioè quante le rimanenti lettere, della specie seconda; dunque m in tutte, e quindi m^2 da tutte le m lettere insieme. Con $n=4$ si avranno combinazioni della forma *aaaa* cioè di quattro lettere identiche, della forma *aaab* cioè di tre lettere identiche ed una differente, della forma *aabb* cioè di due lettere identiche e di due parimente identiche ma diverse dalle due prime, e infine della forma *aabc* cioè di due lettere identiche e di due differenti. Ogni lettera ne darà manifestamente una della prima specie, $m-1$ della seconda, altrettante della terza, ed $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ della quarta, essendo chiaro rapporto a quelle di quest'ultima specie, che debbono esser tante di numero, quante esser possono le combinazioni binarie delle $m-1$ lettere rimanenti; riuniti dunque insieme tutti questi valori, troveremo $\frac{m}{2}(m+1)$, numero delle nuove combinazioni a cui dà dunque parzialmente luogo ciascuna delle m lettere con $n=4$. Tutte insieme ne darebbero dunque $\frac{m^2}{2}(m+1)$, se non accadesse che quelle della specie *aabb*, venisser date due volte, una cioè dalla prima delle due lettere, un'altra dalla seconda. Vi è dunque nel supposto numero totale un eccesso di $\frac{m}{2}(m-1)$, equivalente alla metà delle combinazioni della specie di cui parliamo, e che detratto lo riduce al suo vero valore $\frac{m}{2}(m^2+1)$. Ora si chiami S_1 ciò che divien S con l'aggiunta delle nuove combinazioni. Se $n=2$, avremo $S_1=\frac{m(m-1)}{2}+m=...$

$\frac{m(m+1)}{2}$; se $n=3$, avremo $S_1=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}+m^2=\frac{m(m+1)(m+2)}{2.\ 3}$; se $n=4$, avremo $S_1=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3.\ 4}+\frac{m}{2}(m^2+1)=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2.\ 3.\ 4}$, onde in generale $S_1=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n-1)}{2.\ 3.\ 4\ \ldots\ n}$.

399. Ritornando al primo valor di S, si supponga m diviso nelle due parti p, q in modo che sia $m=p+q$, e per maggior chiarezza di ciò che siamo per dire, si rappresentino con $C_{m,p}$ le combinazioni delle m lettere a p a p, e con $C_{m,q}$ quelle a q a q. Avremo $C_{m,p}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ p}$, e $C_{m,q}=\ldots\ldots$ $\frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ q}$. Divisi l'un per l'altro questi valori, e quindi posto $m-q$ in luogo di p, e $m-p$ in luogo di q, avremo assai agevolmente .... $\frac{C_{m,p}}{C_{m,q}}=\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots(m-p)(m-p+1)(m-p+2)\ldots(m-2)(m-1)m}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots(m-q)(m-q+1)(m-q+2)\ldots(m-2)(m-1)m}$, ove è facile accorgersi che tanto il numeratore, quanto il denominatore del secondo membro rappresentano i prodotti di tutti i numeri interi dall'unità fino ad m senza interruzione. Questi due termini son dunque eguali tra loro, onde $C_{m,p}=C_{m,q}=C_{m,m-p}$: e perciò le combinazioni di m lettere a p a p equivalgono in numero a quelle delle stesse m lettere ad $m-p$ ad $m-p$. Così se $m=10$, poichè $10=8+2$, $=6+4$, $=7+3$, ec., le combinazioni a 8 a 8 son le stesse in numero che quelle a 2 a 2; quelle a 6 a 6 son le stesse che quelle a 4 a 4, ec.

400. Ciò la strada a determinare in quanti modi un numero m di oggetti, per esempio di carte da gioco, posson distribuirsi tra più persone in maniera che la prima ne abbia n_1, la seconda n_2, la terza n_3, ec.; l'ultima in fine tutte le rimanenti. Supposte in principio due sole persone, le n_1 carte da darsi alla prima potranno variare in tanti modi quante sono le combinazioni possibili a cui dan luogo m cose prese ad n_1 ad n_1; avremo perciò $C_{m,n_1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n_1+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ n_1}$. Ed altrettante diverse variazioni avremo per la seconda, poichè qui siamo nel caso contemplato di sopra di $m=n_1+n_2$.

Se le persone son tre, resterà fermo per la prima il numero di combinazioni C_{m,n_1}; per la seconda e terza avremo .... $C_{m,n_2}=\frac{(m-n_1)(m-n_1-1)(m-n_1-2)\ldots\ldots(m-n_1-n_2+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ n_2}$, poichè date n_1 carte alla prima, non ne restano che $m-n_1$ per le altre due. Frattanto è chiaro che per ogni diversa combinazione di carte, che ha luogo per la prima persona, nasce una variazione nella qualità delle carte $m-n_1$ che restano per le altre due. Per aver dunque tutte quante le possibili combinazioni cercate, dovremo moltiplicare fra loro C_{m,n_1} e C_{m,n_2}; e quindi il loro numero sarà dato da ....

$\frac{m(m-1)\ldots(m-n_1+1)\times(m-n_1)(m-n_1-1)\ldots(m-n_1-n_2+1)}{1.2.3\ldots n_1\times 1.2.3\ldots\ldots n_2}$, e più semplicemente da $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n_1-n_2+1)}{1.2.3\ldots n_1\times 1.2.3\ldots n_2}$. Con lo stesso ragionamento si troverà per il caso di quattro persone $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n_1-n_2-n_3+1)}{1.2.3\ldots n_1\times 1.2.3\ldots n_2\times 1.2.3\ldots n_3}$, ec. Così nel gioco dei *quadrigliati*, in cui 40 carte son distribuite a 10 a 10 a ciascuno dei quattro giocatori, avremo $m=40$, $n_1=n_2=n_3=10$, ed il numero cercato sarà ..... $\frac{40.\ 39.\ 38\ \ldots\ 11}{(1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 10)^3}$. E in quello delle *minchiate*, in cui le carte sono 97, e se ne distribuiscono 21 a tre giocatori, e 34 al quarto, le cercate combinazioni saranno ... $\frac{97.96.95\ldots35}{(1.2.3\ldots21)^3}$, numero così enorme, che si perderà forse affatto l'idea stessa e forse ancor la memoria del gioco, prima che sia interamente esaurito.

401. Col metodo adoprato per le combinazioni si perverrebbe egualmente a determinare il numero di tutte le *permutazioni* o modi diversi, in cui posson disporsi le predette m quantità a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ec. Ma vi si giungerà più ancor prontamente riflettendo, che ogni combinazione binaria della forma ab non può permutarsi che in ba; onde le permutazioni binarie saranno doppie delle semplici combinazioni, e perciò eguali ad $m(m-1)$; che ogni combinazione ternaria della forma abc dà luogo alle 6 permutazioni abc, bac, bca, acb, cab, cba, onde il numero di queste permutazioni sarà 6 volte maggiore di quello delle corrispondenti combinazioni, cioè $m(m-1)(m-2)$. Così ogni combinazione della forma $abcd$ dà luogo a 24 permutazioni; il cui numero totale sarà dunque $m(m-1)(m-2)(m-3)$. D'onde si deduce che essendo m le quantità, ed n il numero di quelle che debbono aver luogo in ogni combinazione, le permutazioni saranno .... $m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)$.

402. Si può scendere a questa formula in una maniera ancor più diretta. Si rappresenti con $P_{m,n}$ il numero totale delle permutazioni che posson formarsi con m lettere prese ad n ad n. È chiaro che fra queste ve ne sarà un numero ... $P_{m-1,n-1}$ con l'iniziale a, tante cioè quante se ne posson formare con le rimanenti $m-1$ lettere collocandone in ciascuno $n-1$. Altrettante ve ne saranno con l'iniziale b, altrettante con l'iniziale c, ec., di modo che le lettere essendo in tutte m, il numero totale dei termini rappresentati da $P_{m,n}$ potrà anche venire espresso da

$mP_{m-1,n-1}$. Sarà dunque del pari $P_{m-1,n-1}=(m-1)P_{m-2,n-2}$; $P_{m-2,n-2}$ $=(m-2)\ P_{m-3,n-3}$, ec., ed in fine $P_{m-n+1,1}=m-n+1$, essendo manifesto quanto all'ultima equazione che $m-n+1$ lettere collocate isolatamente non dan luogo che ad $m-n+1$ disposizioni. Or se si sostituiscano gli uni negli altri questi valori, oppure se si moltiplichino insieme membro per membro tutte queste equazioni, e quindi si tolgano i fattori comuni, troveremo $P_{m,n}=m(m-1)(m-2)$ $(m-3)$ .... $(m-n+1)$, precisamente come sopra.

403. Si avverta 1°. che in questi computi si è supposto $n<m$. Che se fosse $n>m$ varrebbero le stesse formule, cangiato m in n, ed n in m. È in fatti chiaro che tanto è, per esempio, cercare in quanti modi posson collocarsi 8 persone in 20 differenti posti, come il cercare in quanti modi 20 posti possono assegnarsi a 8 persone. Onde se non si voglia introdur cangiamento nella formula, basterà chiamare n il minore dei due numeri del quesito, m il maggiore.

2°. Se voglian considerarsi anche le permutazioni con replica, ragionando come si è fatto per le combinazioni (398), troveremo che con $n=2$, il valor precedente di $P_{m,n}$ deve aumentarsi soltanto di m. Con $n=3$, ognuna delle m lettere porterà l'aggiunta di un termine in forza della combinazione aaa (*ivi*), e di $3(m-1)$ termini in forza delle $m-1$ combinazioni della forma aab, ciascuna delle quali dà luogo alle tre permutazioni della forma aab, aba, baa; in tutto dunque con $n=3$ ogni lettera introdurrà $3m-2$ termini, e tutte insieme le m lettere ne introdurranno $m(3m-2)$. Con $n=4$, ogni combinazione della forma $aaaa$ darà luogo all'aggiunta di un termine per ciascuna lettera; le $m-1$ combinazioni della forma $aaab$, ciascuna delle quali si permuta nelle quattro maniere $aaab, aaba, abaa, baaa$, aggiungeranno $4(m-1)$ termini per ogni lettera; le $m-1$ combinazioni della forma $aabb$, ciascuna delle quali dà luogo alle sei permutazioni $aabb$, $bbaa$, $abab$, $baba$, $baab$, $abba$, porteranno l'aggiunta di $6(m-1)$ permutazioni per ogni due lettere a, b, che posson dunque computarsi $3(m-1)$ per ciascuna delle due; infine le combinazioni $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ della forma $aabc$, ciascuna delle quali si permuta in 12 diversi modi, daran luogo all'aggiunta di $6(m-1)(m-2)$ termini; in tutto dunque, con $n=4$, ogni lettera aggiungerà $1+(m-1)(6m-5)$ termini, e prese insieme ne aggiungeranno $m(1+(m-1)(6m-5))$. Computate perciò le permutazioni con replica, avremo $P_{m,2}=m(m-1)+m=m^2$; $P_{m,3}=m(m-1)(m-2)+m(3m-2)=m^3$; $P_{m,4}=m(m-1)(m-2)(m-3)+m(1+(m-1)(6m-5))=m^4$; onde in generale $P_{m,n}=m^n$.

404. Se si rifletta al modo con cui per via di moltiplicazione si giunge ad ottenere la potenza n^{sima} del polinomio $a+a^2+a^3+$ ec. $+a^m$, si rileverà facilmente 1°. che gli esponenti di ciascun termine del risultamento finale provengono da somme degli esponenti di ciascun termine del polinomio dato, presi a due a due se $n=2$, a tre a tre se $n=3$ ec., comprese le repliche e tutte le possibili permutazioni;

2°. che i coefficienti numerici indicando di lor natura la riunione di termini simili, mostrano nel caso nostro quante volte le somme dei suddetti esponenti primitivi, fatte in tutti gl' indicati possibili modi, son risultate identiche. Così il trinomio $a+a^2+a^3$ elevato a quadrato, dando $a^2+2a^3+3a^4+2a^5+a^6$, fa vedere che se, formate tutte le 9 permutazioni binarie con replica dei tre numeri 1, 2, 3 (403.2°), si sommino tra loro i numeri componenti ciascuna coppia, avremo cinque sole differenti somme, cioè 2, 3, 4, 5, 6, la prima e l'ultima delle quali risulteranno una sola volta, la seconda e quarta risulteranno due volte, cioè verran date da due coppie differenti, e tre volte risulterà la terza. Infatti il 2 e il 6 si hanno sommando con se stessi l' 1 e il 3; il 3 sommando l' 1 col 2, il 2 coll' 1; il 5 sommando il 3 col 2, il 2 col 3; e il 4, sommando il 2 con se stesso, il 3 con l' 1, l' 1 col 3.

405. Giova quest' osservazione a risolvere tutti i quesiti relativi alle diverse combinazioni di punti che posson farsi con due o più dadi, e un' infinità d' altri di consimil natura che facilmente possono in quelli tradursi. Cerchisi in quanti differenti modi può risultare ciascuno degli undici punti che posson farsi gettando due dadi. Si eleverà a quadrato il sestinomio $a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$, e dietro gli esposti principj troveremo che il 2 e il 12 risultano in un sol modo, il 3 e l' 11 in due, il 4 e il 10 in tre, il 5 e il 9 in quattro, il 6 e l' 8 in cinque, il 7 in 6; onde il 7 esser dovrebbe il tiro il più frequente, supposta esatta la costruzione del dado, e la materia omogenea, in modo che il peso non preponderi più da una parte che dall' altra, nè porti a scuoprir più l' una che l' altra faccia. Quanto poi al numero totale delle diverse maniere con cui i punti di un dado posson combinarsi con quelli di un altro sarà (403.2°) $6^2=36$. Si suppongan tre dadi e si risolva lo stesso quesito. Eleveremo a cubo il sestinomio che sopra; con che troveremo poter farsi il 3 e il 18 in un sol modo, il 4 e il 17 in tre, il 5 e il 16 in sei, il 6 e il 15 in dieci, il 7 e il 14 in quindici, l' 8 e il 13 in ventuno, il 9 e il 12 in venticinque, il 10 e l' 11 in 27; e per totale delle permutazioni avremo $6^3=216$.

406. Abbiasi $P=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ec.$=(433)1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+$ ec. In questo prodotto gli esponenti di ciascuna potenza, che si estendono a tutti i numeri interi, son termini o somme di termini spettanti alla progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, ec., e di più niun termine ha altro coefficiente che l' unità; d' onde l' importante conseguenza, che qualunque numero intero può formarsi per via d' addizione con i diversi termini della progressione 1, 2, 4, 8, 16, ec., e ciò in una sola maniera. In tal modo coi pesi d' 1, 2, 4, 8, 16, ec. libbre opportunamente combinati, si giunge a contrappesare un numero qualunque di libbre.

407. La maggior parte di queste ricerche servon di base al calcolo delle *probabilità*, di cui daremo qui i primi principj e le più semplici applicazioni, riserbandoci a tornare in più opportuno luogo sullo stesso argomento. Si chiama *probabile* un futuro avvenimento, allorchè non possiamo giudicarlo nè assolutamente certo nè assolutamente impossibile. Ciò accade ogni qualvolta tra un dato nume-

ro di casi possibili altri si conoscono come favorevoli, altri come contrarj all' avvenimento in questione, senza che niente dall' altro canto ci assicuri se questi prevarranno su quelli, o quelli su questi. Si concepisce per altro assai bene che quanto in un dato numero di casi possibili sarà maggiore il numero dei favorevoli, tanto più la probabilità del presunto avvenimento anderà crescendo in valore, e tanto più si accosterà alla certezza, con la quale infine verrebbe totalmente a confondersi qualora il numero dei casi favorevoli eguagliasse quello dei casi possibili. La probabilità e la certezza hanno dunque fra loro lo stesso rapporto che il numero dei casi favorevoli ha con quello dei possibili; e la certezza è il limite superiore della probabilità, come il numero dei casi possibili è il limite dei favorevoli. Presa dunque la certezza come unità di misura, e chiamata π la probabilità, F il numero dei casi favorevoli, P quello dei possibili, avremo $\pi : 1 :: F : P$, e quindi $\pi = \frac{F}{P}$; cioè, *si ottiene il valore della probabilità di un avvenimento, dividendo per il numero di tutti i casi possibili quello dei favorevoli.* Determinato perciò con alcuno dei metodi precedenti l'un numero e l'altro, saremo in grado di conoscere qual lusinga può esservi che lo sperato avvenimento sia o no per accadere. Così volendo sapere qual probabilità vi sia di vincere un ambo con cinque numeri giuocati al lotto, si porrà $m=5$ nella formula delle combinazioni binarie (394), onde avere il numero degli ambi che possono ottenersi con cinque numeri, e che troveremo esser dieci, ciascun dei quali, se estratto venisse, darebbe luogo alla vincita. Poichè dunque il numero totale degli ambi è 4005 (397), la probabilità della vincita sarà dunque $\frac{10}{4005}$, cioè un poco meno di $\frac{1}{400}$ della certezza. Nel modo stesso per le probabilità di far pariglia in un sol tiro di dadi troveremo $\frac{6}{36}$ ovvero $\frac{1}{6}$, perchè le pariglie son 6, e i tiri di due dadi posson permutarsi in 36 maniere (405); per quella di far quattro punti al primo tiro, troveremo $\frac{3}{36}$ ossia $\frac{1}{12}$, perchè in tre soli modi avviene di poter far quattro con due dadi (*ivi*).

408. Insieme con la probabilità π favorevole all' avvenimento, ha sempre luogo la probabilità contraria, che rappresenteremo con π_1; e poichè a questa son manifestamente favorevoli i casi contrarj all' altra, così come per quella si ebbe $\pi = \frac{F}{P}$, si avrà per questa $\pi_1 = \frac{C}{P}$, inteso per C il numero dei casi contrarj; d'onde 1°. $\pi : \pi_1 :: F : C$; 2°. $\pi + \pi_1 = \frac{F+C}{P} = 1$, essendo chiaro che i casi favorevoli ed i contrarj formano nell' ipotesi nostra tutti i casi possibili; 3° $\pi = 1 - \pi_1$, e $\pi_1 = 1 - \pi$, cioè l'una delle due probabilità è ciò che manca all' altra per giungere alla certezza; 4°. se $F = C$ sarà $\pi = \pi_1 = \frac{1}{2}$, cioè eguagliandosi il numero dei casi favorevoli e dei contrarj, le due probabilità equivalgono alla metà della certezza, e costituiscono il *dubbio*, punto di mezzo tra la certezza e l' impossibilità.

409. Le due probabilità π, π_1 son quelle che regolar debbono la *speranza* e il *timore* dei due giocatori i quali scommettono l'uno in favore, l'altro contro l'evento. Perchè la scommessa sia equa conviene che le somme stipulate dall'una parte e dall'altra sieno nella ragione di $\pi : \pi_1$ e per conseguenza di $F : C$ (408); e soltanto nel caso di egual probabilità, o di $\pi = \frac{1}{2}$, potranno essere eguali.

410. Frequentemente addiviene che la scommessa cada sopra due o più avvenimenti, uno almeno dei quali debba per patto aver luogo. In tal caso la probabilità totale corrisponde alla somma delle probabilità parziali che favoriscono ciascuno degli avvenimenti. Così se alcuno si proponga di fare o quattro o sette al primo colpo di dadi, avrà $\frac{3}{36}$ ossia $\frac{1}{12}$ di probabilità per il primo numero, $\frac{6}{36}$ ovvero $\frac{1}{6}$ per il secondo (405), in tutto $\frac{3}{12}$ ovvero $\frac{1}{4}$; la probabilità contraria sarà dunque $\frac{3}{4}$ (408), e quindi la perdita tre volte più probabile della vincita.

411. La probabilità di cui abbiamo fin quì parlato si chiama *semplice* ed anche *assoluta*, in quanto che suppone che debba necessariamente accadere o l'evento sperato o il suo contrario. Spesso però l'espettativa sia dell'uno che dell'altro è soltanto probabile, e non solo siamo incerti se accaderà l'uno piuttosto che l'altro, ma neppure può sapersi se uno qualunque dei due sia infallibilmente per accadere. La probabilità di ottenere l'intento, e ottenerlo in favore, prende allora il nome di probabilità *composta* o *secondaria*; ed è poi chiaro che tanto più cresce o scema di valore, quanto maggiori o minori sono le due distinte probabilità, che cioè l'evento succeda, e che succeda in favore: sta dunque in ragion composta di queste due parziali probabilità, e quindi equivale al prodotto dell'una per l'altra. Infatti se l'avvenimento certo 1 da luogo alla probabilità π, l'avvenimento probabile π_1 darà $x = \pi\pi_1$. Per darne un semplicissimo esempio, voglia calcolarsi la probabilità d'estrarre da un mazzo ordinario e coperto di 40 carte una delle tre figure di fiori. È in primo luogo necessario che la carta da estrarsi sia una figura, per il quale evento milita manifestamente una probabilità del valore di $\frac{12}{40}$, ossia di $\frac{3}{10}$; occorre di più che tra le dodici figure quella da estrarsi sia una delle tre del seme assegnato, evento che ha $\frac{3}{12}$ ossia $\frac{1}{4}$ di probabilità. La cercata probabilità sarà dunque del valore di $\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}$ ossia di $\frac{3}{40}$. Si osservi che lo stesso quesito poteva pure risolversi coi principj della probabilità assoluta, considerando le tre figure di fiori, non precisamente come figure, ma come tre carte determinate, una qualunque delle quali si tratta di estrarre di mezzo a tutte le quaranta: nel qual caso è visibile che la probabilità corrisponde in valore a $\frac{3}{40}$ (407), come sopra.

412. Ammesso frattanto come evidente l' esposto principio, si supponga che resti convenuto per patto di ripetere il numero delle prove; come nel caso che alcuno prenda a fare un determinato punto con due o più dadi in n colpi. È chiaro che la probabilità anderà crescendo a misura che crescerà il numero delle prove pattuite. Per valutarla si suppongano in primo luogo due prove soltanto. La probabilità richiesta si compone qui manifestamente di due parti, o di due parziali e distinte probabilità, quella cioè di vincere alla prima prova, e quella di vincere alla seconda. La prima è assoluta, ed espressa al solito da $\frac{F}{P}$; l' altra diviene assoluta dopo il primo tiro, e vale allora come la prima $\frac{F}{P}$; ma precedentemente è *secondaria*, perchè dipende dal caso che vi è di perdita al primo tiro, per il quale evento sussiste la probabilità $\frac{C}{P}$ (408). Dunque in principio di gioco non vale che $\frac{F}{P}\times\frac{C}{P}$, e unita alla prima forma la probabilità totale cercata $\pi=\frac{F}{P}+\frac{F}{P}\times\frac{C}{P}=\frac{F(P+C)}{P^2}$, ossia per essere $F=P-C$, $\pi=\frac{P^2-C^2}{P^2}$. Si suppongan tre prove. Alle due probabilità precedenti si unirà quella di vincere al terzo tiro, la quale dopo il secondo varrebbe al solito $\frac{F}{P}$; ma in principio di gioco, dipendendo dai due casi di perdita e al primo e al secondo tiro, non può valutarsi che $\frac{F}{P}\times\frac{C}{P}\times\frac{C}{P}$, e in tale stato unita alle due prime darà per la probabilità totale cercata al principio del gioco $\pi=\frac{P^2-C^2}{P^2}+\frac{FC^2}{P^3}=\frac{P^3-C^2P+C^2(P-C)}{P^3}=\frac{P^3-C^3}{P^3}$. Così, supposte quattro prove, si troverebbe $\pi=\frac{P^4-C^4}{P^4}$, e in generale supposte n prove $\pi=\frac{P^n-C^n}{P^n}$

Vogliasi per esempio la probabilità di far 6 con due dadi in tre tiri. Avremo (407) $P=36$, e poichè 6 può farsi con due dadi in soli cinque modi (405), e perciò dei 36 casi possibili, 31 son contrarj a questo tiro, sarà $C=31$, e quindi $\pi=\frac{36^3-31^3}{36^3}=\frac{16865}{46656}$, frazione che i noti metodi (410) riducono al valore di circa $\frac{4}{11}$, o più prossimamente a $\frac{13}{36}$, cioè poco più d' $\frac{1}{3}$.

413. Da questa formula abbiamo il modo di determinare il numero n dei tiri da pattuirsi, perchè l' una e l' altra parte interessata possa equamente scommettere somma eguale. La probabilità delle due parti dovendo in quest' ipotesi essere $\frac{1}{2}$ (409), avremo $\frac{P^n-C^n}{P^n}=\frac{1}{2}$, d' onde $P^n=2C^n$, ed applicati i logaritmi $n=\frac{L2}{LP-LC}$. Così se per esempio si tratti di far pariglia con due dadi, avremo $P=36$, $C=30$, e quindi $n=\frac{0,3010300}{0,0791812}=3,8$ circa; d'onde apparisce che il nume-

ro dei tiri deve portarsi a non più di quattro, nè a meno di tre. Nel primo caso ha un piccolissimo vantaggio il giocatore, nel secondo ne ha uno alquanto più grande l'avversario. Se poi si trattasse di dover fare una qualche pariglia determinata, come sarebbe una quintina o una sena, si avrebbe allora $C=35$, e si troverebbe $n=24,6$; dovrebber dunque stipularsi non meno di 24 tiri, nè più di 25, conclusione che fu in altri tempi soggetto di grave contesa sostenuta da *Pascal* contro *Méré*.

414. Voglia adesso conoscersi la probabilità di fare n volte di seguito lo stesso tiro. È chiaro 1°. che tanto per il primo gettar di dadi, quanto per ciascuno dei seguenti si ha costantemente in favore del tiro la probabilità assoluta $\frac{F}{P}$; 2°. che il tiro non può aver luogo una seconda volta, se non abbia già avuto luogo la prima; quindi la probabilità di conseguirlo due volte di seguito sarà (412) $\frac{F}{P}\times\frac{F}{P}=\frac{F^2}{P^2}$. Egualmente non può aver luogo una terza volta, se non abbia già avuto luogo nelle due precedenti; la probabilità dunque di ottenerlo tre volte di seguito sarà $\frac{F^2}{P^2}\times\frac{F}{P}=\frac{F^3}{P^3}$, e in generale sarà $\pi=\frac{F^n}{P^n}$ la cercata probabilità per n volte successive. Così per far pariglia tre volte avremo la probabilità $\pi=\left(\frac{6}{36}\right)^3=\frac{1}{216}$.

415. Analoghi al precedente quesito, e quindi in egual modo solubili sono i due seguenti. 1°. Supposte in un'urna m palle bianche, ed m_1 d'altri comunque diversi colori, determinar la probabilità d'estrarre n palle bianche prima d'alcuna di qualunque altro colore; 2°. da un mazzo di carte estrarre n volte di seguito una figura, con l'espressa condizione sì nell'un caso che nell'altro che la palla o la carta estratta debba ogni volta riporsi quella nell'urna, questa nel mazzo. Traducendo la formula trovata, avremo per il primo quesito $\pi=\left(\frac{m}{m+m_1}\right)^n$, e per il secondo $\pi=\left(\frac{12}{40}\right)^n=0,3^n$. Così posto nel primo $m=10$, $m_1=90$, e in ambedue $n=3$, la probabilità d'estrarre tre volte di seguito la palla bianca dall'urna sarà $\pi=0,001$, e quella di estrarre tre volte figura dal mazzo sarà $\pi=0,027$.

416. Ma queste due probabilità scemerebbero alquanto, e la formula stessa verrebbe notabilmente a variare, se nè le palle estratte si riponessero nell'urna, nè le carte nel mazzo. Supposto in generale P il numero delle palle, o delle carte, F il numero di quelle della specie da estrarsi, ed n il numero convenuto d'estrazioni successive, la probabilità per la prima estrazione resterebbe come innanzi $\frac{F}{P}$; ma quelle in favore della seconda, della terza, dell'n^{sima} diverrebbero manifestamente $\frac{F-1}{P-1}, \frac{F-2}{P-2}, \ldots \frac{F-n+1}{P-n+1}$. Quindi il valor precedente di π si cangereb-

be in $\pi = \frac{F(F-1)(F-2)\ldots(F-n+1)}{P(P-1)(P-2)\ldots(P-n+1)}$, e nei due proposti casi particolari si avrebbe $\pi = \frac{10.9.8}{100.99.98} = \frac{2}{2695}$ per il 1°. quesito, e $\pi = \frac{12.11.10}{40.39.38} = \frac{11}{494}$ per il 2°.

417. Che se il gioco fosse limitato alla condizione di cavare una sola palla bianca dall'urna, o una sola figura dal mazzo in n estrazioni, il che coinciderebbe col cavar tutte insieme dall'urna n palle, tra le quali dovesse per patto esservene una bianca, o n carte dal mazzo tra le quali dovesse essere una figura, la via più spedita sarà di calcolar la probabilità contraria, quella cioè di non estrarre per n volte nè palla bianca dall'urna, nè figura dal mazzo, e quindi concluder la probabilità favorevole mediante l'equazione $\pi = 1 - \pi_1$ (408). Ora il metodo precedente dà $\pi_1 = \frac{C(C-1)(C-2)\ldots(C-n+1)}{P(P-1)(P-2)\ldots(P-n+1)}$; sarà dunque $\pi = 1 - \frac{C(C-1)(C-2)\ldots(C-n+1)}{P(P-1)(P-2)\ldots(P-n+1)}$. Nel primo quesito si ha $P=100$, $C=90$; nel secondo $P=40$, $C=28$; se dunque $n=3$, avremo per quello $\pi = 1 - \frac{90\,.\,89\,.\,88}{100\,.\,99\,.\,98} = \frac{67}{245}$, e per l'altro $\pi = 1 - \ldots\ldots \frac{28\,.\,27\,.\,26}{40\,.\,39\,.\,38} = \frac{127}{190}$.

Serie Algebriche. Metodo dei Coefficienti indeterminati

418. Data una frazione qualunque $\frac{P}{Q}$, in cui o Q soltanto, o P e Q insieme sieno funzioni polinomie di x (145), se si effettui la divisione di P per Q (169), o se una qualunque funzione polinomia $\varphi(x)$ di x ordinata per x si alzi a potenza intera o frazionaria, si otterranno sempre delle espressioni in forma di serie, cui daremo il nome di *serie algebriche*, come chiameremo *funzioni derivatrici* quelle, dalle quali le serie son provenute. Queste serie sono finite e infinite, convergenti e divergenti nei casi che già notammo (381), e sono in oltre ascendenti o discendenti, secondo che le potenze dell'x per cui le supponiamo ordinate vanno o tutte crescendo o tutte diminuendo. Le principali operazioni che le riguardano sono 1ª. avuta una funzione derivatrice svolgerla in serie; 2ª. data la serie sommarla, o tutta o in parte; 3ª. trovarne il termine generale. Qui non ci occuperemo specialmente che della prima, la quale insieme è di tutte la più importante.

419. Le regole date per la divisione, e l'applicazione della regola del binomio bastar potrebbero nei più dei casi a svolgere in serie algebrica una data funzione. Ma per ogni riguardo si troverà quasi sempre preferibile il seguente *metodo dei coefficienti indeterminati*, sia per la sua generalità, sia per la prontezza con cui nei casi anche più complicati conduce all'intento, sia infine pel rigore dei suoi principj, la formula stessa del binomio abbisognandone, siccome vedremo, per essere pienamente dimostrata.

420. Oggetto generale di questo metodo è di cangiare una data espressione algebrica in un'altra equivalente, ma di forma diversa ed assegnata, purchè non ripugnante alla natura dell'espressione proposta. Nei più dei casi la forma di cui parliamo è appunto quella di una serie, i cui termini procedono ordinati secondo le potenze successive o saltuarie, positive o negative di una delle quantità dominanti nell'espressione. Il metodo vi giunge per diverse vie, secondo le differenti qualità dell'espressione data; ma il principio d'onde si parte, e lo spirito che mantiene è in ogni caso lo stesso. Pochi esempj bastano per darne una chiara idea, e renderne familiare l'applicazione e il maneggio.

421. Sia il rotto $\frac{\varphi}{p+x}$, e voglia ridursi in serie ordinata per le successive potenze di x. Ciò ben facilmente si otterrebbe come abbiamo detto, con la semplice divisione (169), la quale dà $\frac{\varphi}{p+x}=\frac{\varphi}{p}-\frac{\varphi x}{p^2}+\frac{\varphi x^2}{p^3}-$ec.: ma per far uso del nuovo metodo si supponga $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ec. la serie cercata. Sarà dunque $\frac{\varphi}{p+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ec. e tutto si ridurrà a stabilire i valori dovuti alle indeterminate A, B, C, D, ec. Ora è importante osservare 1°. che essendo A, B, C, ec. le vere e sole incognite della supposta equazione, la sussistenza di questa non dipenderà che dal valore opportuno da darsi a quelle (228), e niente dal valore di x, che non essendo qui vincolato da condizione veruna, dee potersi supporre qualunque: 2°. che le predette indeterminate facendo la parte di semplici coefficienti, dovranno riguardarsi come affatto distinte da x, nè que-

sta quantità potrà in alcun modo supporsi implicata nei loro valori; diversamente la serie non sarebbe ben ordinata per x, contro il supposto. 3°. E perciò qualunque cangiamento si faccia subire ad x nell' un membro e nell' altro dell' equazione, quei coefficienti si manterranno invariabili, non potendo risentir l' effetto della variazione di una quantità, che non è in alcun di loro compresa. Così se x si cangi in nx, o in y, o in $y-z$, avremo $\frac{\varphi}{p+nx}=A+nBx+n^2Cx^2+n^3Dx^3+$ec., $\frac{\varphi}{p+y}=A+By+Cy^2+Dy^3+$ec. $\frac{\varphi}{p+y-z}=A+B(y-z)+C(y-z)^2+$ec., e i coefficienti A, B, C, D, ec. saranno in tutte quante queste equazioni gli stessi.

422. Ciò premesso, e ripresa la supposta equazione, se ne moltiplichi il secondo membro per il denominatore del primo, e quindi vi si trasporti il numeratore; avremo

$$\begin{aligned}0=&Ap+Bpx+Cpx^2+Dpx^3+Epx^4+\text{ec.}\\ &-\varphi\;+Ax\;+Bx^2\;+Cx^3\;+Dx^4\;+\text{ec.}\end{aligned}$$

equazione che dovendo sussistere indipendentemente da qualunque valore di x, dovrà dunque aver luogo anche con $x=0$. Ma allora dà $0=Ap-\varphi$, dunque nel caso di $x=0$, e perciò costantemente ed in ogni altro caso, la prima colonna è zero, o si annulla da se medesima. Potremo dunque toglierla impunemente dall' equazione, la quale allora divien tutta divisibile per x, e si cangia nell' altra

$$\begin{aligned}0=&Bp+Cpx+Dpx^2+Epx^3+\text{ec.}\\ &+A\;+Bx\;+Cx^2\;+Dx^3+\text{ec.}\end{aligned}$$

e questa pure comecchè in tutto identica alla precedente dovrà in egual modo che quella aver luogo anche nel caso di $x=0$; e come allora si ha $0=Bp+A$, dunque anche la seconda colonna si annulla da se medesima. Così troveremo che da se stesse si annullano tutte le susseguenti. Avremo perciò l' equazioni 1ª. $Ap-\varphi=0$, 2ª. $Bp+A=0$, 3ª. $Cp+B=0$, 4ª. $Dp+C=0$, ec. che saranno tante di numero quante le colonne, cioè quanti sono i coefficienti indeterminati, i quali potranno per tal via tutti determinarsi. Infatti la 1ª. dà $A=\frac{\varphi}{p}$; la 2ª. $B=-$

$\frac{A}{p}=-\frac{\varphi}{p^2}$; la 3ª. $C=-\frac{B}{p}=\frac{\varphi}{p^3}$; la 4ª. $D=-\frac{C}{p}=-\frac{\varphi}{p^4}$, ec., valori che sostituiti nell'equazione primitiva danno $\frac{\varphi}{p+x}=\frac{\varphi}{p}-\frac{\varphi x}{p^2}+\frac{\varphi x^2}{p^3}-\frac{\varphi x^3}{p^4}+$ ec., precisamente come avremmo ottenuto col mezzo della divisione. Ecco un nuovo esempio.

423. Sia da ridursi in serie ordinata per le potenze di x il rotto $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$. Porrò $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$ ec.; e operando come nel precedente esempio avrò

$$\begin{aligned}0=&Aa^2+Ba^2x+Ca^2x^2+Da^2x^3+Ea^2x^4+\text{ec.}\\ &-a^2\ +2Aax+2Bax^2+2Cax^3+2Dax^4+\text{ec.}\\ &\qquad\quad -Ax^2\ -Bx^3\ -Cx^4\ -\text{ec.}\end{aligned}$$

e quindi l'equazioni $A-1=0$, $Ba+2A=0$, $Ca^2+2Ba-A=0$, $Da^2+2Ca-B=0$, $Ea^2+2Da-C=0$, ec. d'onde i valori $A=1$, $B=-\frac{2}{a}$, $C=\frac{5}{a^2}$, $D=-\frac{12}{a^3}$, $E=\frac{29}{a^4}$, ec. e perciò $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=1-\frac{2x}{a}+\frac{5x^2}{a^2}-\frac{12x^3}{a^3}+\frac{29x^4}{a^4}-$ ec.

424. Le due serie che abbiamo ottenute, e generalmente tutte quelle che nascono dalle frazioni razionali si chiamano *ricorrenti*, perchè determinati i primi coefficienti, gli altri si hanno con un calcolo uniformemente ripetuto, e *ricorrendo* a quelli dai quali son preceduti. Così nel secondo esempio i due primi A, B si determinano coll'equazioni $a^2A-a^2=0$, $a^2B+2aA=0$: riguardo agli altri C, D, E, ec. si ha $C=\frac{-2B}{a}+\frac{A}{a^2}$, $D=\frac{-2C}{a}+\frac{B}{a^2}$, $E=\frac{-2D}{a}+\frac{C}{a^2}$, ec. Ora le quantità costanti $\frac{-2}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, dal cui prodotto nei respettivi coefficienti B, A, ovvero C, B, ovvero D, C, ec. che precedono nasce ciascun coefficiente C, D, E, ec., si chiamano *scala di relazione*: ed è facile osservare 1°. che la scala di relazione è formata dai coefficienti che ha x nel denominatore ordinato del rotto proposto o *genitore*, presi con segni contrarj e divisi per il termine costante o con x a zero; 2°. che per avere il coefficiente di un nuovo termine della serie bisogna moltiplicar l'ultimo già trovato per il primo termine della scala di relazione, il penultimo per il secondo ec. e far la somma di tutto. Così il rotto $\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$, nel cui denominatore mancano z^2, z^3, dà per la scala di relazione $1, +0, +0, +1, -1$: e poichè il metodo dà per i primi cinque coefficienti $1, 2, 3, 3, 4$, il sesto sarà $1\times4+0\times3+0\times3+1\times2-1\times1=5$, il settimo $1\times5+0\times4+0\times3+1\times3-1\times2=6$, ec., d'ondo la serie $1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+$ec.

425. Ma se si trattasse soltanto di conoscere un termine qualunque n^{simo} della serie, ed n fosse assai grande, in tal caso converrebbe piuttosto procurarsi l'espressione del termine generale T. A quest'effetto si decomponga il rotto proposto nei rotti parziali dalla cui somma risulta (179), il che, per esser in ipotesi $\frac{P}{Q}$ razionale (421), potrà sempre farsi, meno che non possa risolversi Q in fattori semplici di primo grado. È chiaro che il termine n^{simo} della serie in cui si svolge $\frac{P}{Q}$ deve equivalere alla somma dei termini n^{simi} di ciascuna delle serie in cui respettivamente si svolge ognuno dei detti rotti. Or niente di più facile che la ricerca del valore di questi termini; essendo manifesto 1°. che ciascuno dei rotti parziali non può risultare che della forma $\frac{a}{(b+cx)^m}$; 2°. che questa forma può sempre tradursi nell' altra $\frac{p}{(1-qx)^m}$; 3°. che $\frac{p}{(1-qx)^m}=p(1-qx)^{-m}=p+mpqx+\frac{m(m+1)}{2}pq^2x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{2\,.\,3}pq^3x^3+$ec., serie il cui termine generale è $T=\frac{m(m+1)(m+2)\,....\,(m+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,n}pq^nx^n$. Così dato il rotto $\frac{1}{1-x-x^2+x^3}$, lo decomporremo nei tre rotti parziali $\frac{1}{4(1+x)}$, $\frac{1}{2(1-x)^2}$, $\frac{1}{4(1-x)}$. Il primo in cui $m=1$, $p=\frac{1}{4}$, $q=-1$, ha per termine generale $\pm\frac{1}{4}x^n$, preso il segno di sotto quando n è impari. Il secondo in cui $m=2, p=\frac{1}{2}$, $q=1$, ha $\frac{1}{2}(n+1)x^n$; ed il terzo in cui $m=1, p=\frac{1}{4}$, $q=1$, ha $\frac{1}{4}x^n$. Dunque il termine generale cercato sarà $T=\frac{1}{4}\times(2n+3\pm1)x^n$, avendo luogo il segno di sotto con n impari.

426. Quando la frazione derivatrice è conosciuta, può facilmente aversi la somma S di un numero qualunque di termini della serie nel modo che segue. Sia ... $\frac{a}{b+cx}$ la frazione derivatrice, e si rappresenti con $A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+$ec.. $+A_nx^n$. La scala $-\frac{c}{b}$ darà l'equazioni $bA_1+cA=0$, $bA_2+cA_1=0$, $bA_3+cA_2=0$, ec.$\because$.... $.bA_n+cA_{n-1}=0$. Se la 1ª. si moltiplichi per x, la 2ª. per x^2, la 3ª. per x^3, ec. l'ultima per x^n e quindi tutte si sommino troveremo $b(S-A)+cx(S-A_nx^n)=0$ d'onde $S=\frac{bA+cA_nx^{n+1}}{b+cx}$, somma dei primi $n+1$ termini della serie. Che se in luogo di A, A_n vogliansi introdurre i loro effettivi valori, osserveremo che trasformando la frazione $\frac{a}{b+cx}$ in $\frac{a:b}{1+cx:b}$, e ponendo $p=\frac{a}{b}$, $q=-\frac{c}{b}$, $m=1$, l'espressione del termine generale trovata di sopra dà $A_n=$...

$\pm\frac{ac^n}{b^{n+1}}$, avendo luogo il segno — per n impari; e di quì pure fatto $n=0$, si ottiene $A=\frac{a}{b}$, valori che sostituiti daranno $S=\frac{a}{(c+bx)b^{n+1}}\left(b^{n+1}\pm c^{n+1}x^{n+1}\right)$.

427. Medesimamente se la frazione generatrice fosse $\frac{a+bx}{c+dx+ex^2}$, ed avesser quindi luogo l'equazioni $cA_2+dA_1+eA=0$, $cA_3+dA_2+eA_1=0$, . . . $cA_n+dA_{n-1}+eA_{n-2}=0$; moltiplicata la prima per x^2, la seconda per x^3, ec., l'ultima per x^n, e tutte sommandole, si troverebbe facilmente $c(S-A-A_1x)+dx\,(S-A-A_nx^n)+ex^2(S-A_{n-1}x^{n-1}-A_nx^n)=0$; d'onde S. Questo stesso metodo potrà facilmente estendersi agli altri casi.

428. Se la frazione generatrice è ignota, e solo si conosca la scala di relazione, questa, come è chiaro, ce ne farà scuoprir subito il denominatore. Supponendo che risulti di m termini, in luogo del numeratore ignoto si porrà $A+Bx+Cx^2$ +ec. . . $+\Omega x^{m-1}$, e si otterranno i coefficienti A, B, C, ec. eguagliando il rotto così composto alla serie data, ed operando al solito in tutto il resto.

429. Debba ora svolgersi in serie il radicale $\sqrt{(a^2-x^2)}$. Porremo $\sqrt{(a^2-x^2)}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+$ . . Gx^6+ec. e quindi quadrando e trasportando si avrà

$$\begin{array}{llllllll}
0=A^2 & +2ABx & +2ACx^2 & +2ADx^3 & +2AEx^4 & +2AFx^5 & +2AGx^6 & +\text{ec.}\\
-a^2 & & +B^2x^2 & +2BCx^3 & +2BDx^4 & +2BEx^5 & +2BFx^6 & +\text{ec.}\\
 & & +x^2 & & +C^2x^4 & +2CDx^5 & +2CEx^6 & +\text{ec.}\\
 & & & & & & +D^2x^6 & +\text{ec.}
\end{array}$$

d'onde, eguagliata a zero ogni colonna, avremo $A=a$, $B=0$, $C=-\frac{1}{2a}$, $D=0$, $E=-\frac{1}{8a^3}$, $F=0$, $G=-\frac{1}{16a^5}$, ec. e quindi $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}$ — ec. come si sapeva (216).

430. Ma debba ridursi in serie l'espressione più generale $(1+x)^m$. Fatto $(1+x)^m=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$+ec. si cangi x in $x(2+x)$: avremo (421.3°.) $(1+x(2+x))^m=A+Bx(2+x)+Cx^2(2+x)^2+Dx^3(2+x)^3+Ex^4(2+x)^4$+ec. Ma $(1+x(2+x))^m=(1+2x+x^2)^m=(202.183)(1+x)^{2m}=$ . . . $((1+x)^m)^2=(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)^2$; sviluppato dunque questo quadrato, eguagliati fra loro i due valori di $(1+$.. $x(2+x))^m$, e mandata la nuova equazione a zero, avremo

$$\begin{array}{llllll}
0=A^2+2ABx & +2ACx^2 & +2ADx^3 & +2AEx^4 & +\text{ec.} \\
-A\ -2Bx & +B^2x^2 & +2BCx^3 & +2BDx^4 & +\text{ec.} \\
 & -Bx^2 & -4Cx^3 & +C^2x^4 & +\text{ec.} \\
 & -4Cx^2 & -8Dx^3 & -Cx^4 & -\text{ec.} \\
 & & & -12Dx^4 & -\text{ec.} \\
 & & & -16Ex^4 & -\text{ec.}
\end{array}$$

e la prima colonna darà $A=1$, la 2ª. $B=B$, la 3ª. $C=B\times\frac{(B-1)}{2}$, la 4ª. $D=\frac{B(B-1)(B-2)}{2.3}$, la 5ª. $E=\frac{B(B-1)(B-2)(B-3)}{2.3.4}$, ec. valori che non includendo in modo esplicito m, compariranno sotto la stessa precisa forma qualunque siasi m, cioè con m positivo o negativo, intero o frazionario, reale o immaginario. Per trovar B si ponga nella data $x=z-1$, e trasportato nel 1°. membro il valore di $A=1$, si divida l'equazione per $z-1$: supposto m intero e positivo sarà $\frac{z^m-1}{z-1}=B+C(z-1)+D(z-1)^2+\ldots$, $E(z-1)^3+\text{ec.}=(261)\ z^{m-1}+z^{m-2}+z^{m-3}+\text{ec.}\ldots+z^0$. Or poichè quest' ultima espressione ha visibilmente m termini, e tutta intera l'equazione deve al solito sussistere per qualunque valore di z (421.1°), posto dunque $z=1$, sarà in questo caso, e quindi in tutti gli altri, $B=1+1+1+1+\text{ec.}+1=m$. Perciò $C=\frac{m(m-1)}{2}$, $D=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$, ec., ed $(1+x)^m=1+mx+\ldots\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3+$ ec. com'ebbesi per induzione (215).

431. Ma se m sia negativo, l'espressione $\frac{z^m-1}{z-1}$ si cangerà in $\frac{z^{-m}-1}{z-1}=(164)\frac{1-z^m}{z^m(z-1)}=-\frac{1}{z^m}\left(\frac{z^m-1}{z-1}\right)$, e diverrà $-m$ nel caso di $z=1$. Avremo dunque $B=-m$, e quindi $C=-\frac{m(-m-1)}{2}$, .. $D=\frac{-m(-m-1)(-m-2)}{2.3}$, ec. cioè la forma dei coefficienti sarà la stessa che sopra, cangiato m in $-m$.

432. E se per ultimo m sia frazionario e divenga $\frac{m}{n}$, pongasi $(1+x)^{\frac{m}{n}}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ ec.: e poichè $A=1$, alzato tutto alla potenza n, avremo $(1+x)^m=(1+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.})^n$, cioè $1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\text{ec.}=1+n(Bx+$

$Cx^2+Dx^3+\text{ec.})+\frac{n(n-1)}{2}(Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.})^2+\text{ec.}$, d' onde, operando al solito, $B=\frac{m}{n}$: perciò lo sviluppo avrà anche in questo caso la consueta forma, cangiato m in $\frac{m}{n}$.

433. Vogliasi infine sviluppare il prodotto $P=(1+x)\times(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\text{ec.}$ i cui fattori sono infiniti di numero, e gli esponenti dell' x procedono nella progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, ec. Pongo $P=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ ec., e chiamo P_1 ciò che diviene P se vi si cangi x in x^2. Avremo le due equazioni 1ª. $P_1=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\text{ec.}=\frac{P}{1+x}$; 2ª. $P_1=1+Ax^2+Bx^4+Cx^6+Dx^8+\text{ec.}$, che moltiplicate per $1+x$ danno 3ª. $P_1(1+x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\times(1+x^8)\text{ec.}=P=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ec.}$; 4ª. $P_1(1+x)=(1+x)(1+Ax^2+Bx^4+Cx^6+\text{ec.})$. Eguagliati i due valori di $P_1(1+x)$, effettuata la moltiplicazione del secondo, ed operando sul resto al solito, troveremo $P=1+x+x^2+x^3+x^4+\text{ec.}$

434. La forma $A+Bx+Cx^2+\text{ec.}$ che abbiamo data alle serie precedenti può talvolta non convenire allo sviluppo di una data funzione. Ciò si riconoscerà dai risultamenti o insignificanti o anche assurdi a cui saremo condotti dal calcolo. Per darne un esempio, il valore trovato di $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\text{ec.}$ (429) è assurdo quando si supponga $x>a$, poichè il secondo membro è tutto reale, mentre il primo è immaginario. Si ripara all' inconveniente riducendo in serie ordinata per le potenze di a il radicale $\sqrt{(x^2-a^2)}$, e moltiplicando in ultimo ciascun termine della medesima per $\sqrt{-1}$. Infatti poichè $a^2-x^2=(x^2-a^2)\times-1$, sarà $\sqrt{(a^2-x^2)}=\sqrt{(x^2-a^2)\times-1}=(192)\sqrt{(x^2-a^2)}\sqrt{-1}$, e la serie corrispondente a $\sqrt{(a^2-x^2)}$ equivarrà all' altra di $\sqrt{(x^2-a^2)}$ moltiplicata per $\sqrt{-1}$. Parimente se si avesse $\sqrt{(x-x^2)}$, e si ponesse $\sqrt{(x-x^2)}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}$, si troverebbe $A=0$, $B=0$, $C=0$, ec.; ed è infatti visibile che essendo $\sqrt{(x-x^2)}=\sqrt{x}\sqrt{(1-x)}$, tutti i termini della serie dovranno contenere il fattore $\sqrt{x}$, onde non

avranno luogo potenze intere, e quindi i coefficienti di queste potenze dovranno tutti esser nulli. Si toglie quì pure l'inconveniente riducendo in serie $\sqrt{(1-x)}$, e tutto moltiplicando in seguito per $\sqrt{x}$. In pari assurdi si caderebbe ponendo eguali ad $A+Bx+$ec. le frazioni $\frac{1}{x^2-x}$, $\frac{1}{x-1}$, ec., che si eviterebbero svolgendo in serie i rotti $\frac{1}{x-x^2}$, $\frac{1}{1-x}$ e cambiando in ultimo il segno ad ogni termine.

435. Risulta di quì che il metodo non deve applicarsi senza molta cautela. Gioverà bene spesso l' aver conosciuto per qualche mezzo preventivo l'indole dell'andamento di cui è suscettiva la serie richiesta, ed esser sicuri che quest' andamento sarà costante; il che non sempre succede. Sarà anche ben fatto esaminare se nei casi particolari, in cui la funzione data acquista un valor noto, la serie supposta vi corrisponda esattamente. Avremo frequentemente luogo nel seguito di assuefarci all'uso di queste cautele.

436. Intanto, riguardo alle funzioni algebriche di cui quì si tratta, daremo queste avvertenze generali: 1°. se una qualunque potenza x^n della quantità x, per cui vuole ordinarsi la serie, moltiplica o divide la funzione tutta intera, dovrà togliersi dalla funzione, applicare il metodo alla parte che resta, e quindi a operazione finita moltiplicare o dividere ciascun termine della serie per la potenza soppressa. 2°. Se la funzione data non contiene che potenze pari di x, potremo impostar la serie con le sole potenze pari: ponendovi anche le impari il calcolo ne farebbe trovar nulli tutti i coefficienti come è accaduto di sopra (429). 3°. Il primo termine di uno sviluppo qualunque corrisponde sempre al valore che prende la funzione quando vi si fa $x=0$. Questa riflessione contribuisce infinitamente a semplificizzare i calcoli.

437. Abbiasi adesso $x=ay+by^2+cy^3+dy^4+$ec. e vogliasi il valor di y dato per x. Il metodo che insegna a trovarlo si chiama *metodo inverso* o *ritorno delle serie*, che presso a poco è il seguente. Pongo $y=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ec. e quindi ho

$$
\begin{array}{l}
ay = aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 + aEx^5 + \text{ec.} \\
by^2 = \begin{cases} bA^2x^2 + 2bABx^3 + 2bACx^4 + 2bADx^5 + \text{ec.} \\ \qquad + bB^2x^4 + 2bBCx^5 + \text{ec.} \end{cases} \\
cy^3 = \begin{cases} cA^3x^3 + 3cA^2Bx^4 + 3cA^2Cx^5 + \text{ec.} \\ \qquad + 3cAB^2x^5 + \text{ec.} \end{cases} \\
dy^4 = dA^4x^4 + 4dA^3Bx^5 + \text{ec.} \\
ey^5 = \quad + eA^5x^5 + \text{ec.}
\end{array}
$$

Sommate quest'equazioni, trasportato il 1.° membro della somma, che in forza della proposta è eguale ad x, e determinati al solito e sostituiti nel valor supposto di y i valori di A, B, C, ec. troveremo $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4 + \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}x^5 + \text{ec.}$ Così se $x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \text{ec.}$, si avrà $y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}$; e se $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \text{ec}$, si troverà $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{ec}$. Che se fosse $x = a + by + cy^2 + dy^3 + \text{ec.}$, si farà $x - a = z$, e si avrà y dato per le potenze di z. Si avverta però che il dato metodo generale non è sempre applicabile, e spesso fa d'uopo aver prima conosciuta l'indole della serie inversa.

Idea dell' Analisi derivata, e sua equazione fondamentale.

438. Abbiansi le quantità y, y_1, y_2, y_3 ec. legate fra loro in modo che l'una risulti dall'altra per effetto d'una medesima operazione. Tali sarebbero i termini d'una progressione aritmetica, ciascuno dei quali si ottiene aggiungendo al suo precedente la differenza comune; tali quelli di una progressione geometrica, ciascuno dei quali si ha moltiplicando quello che lo precede per il quoziente della progressione. In tal caso alla prima y si dà il nome di *derivatrice*, e alle seguenti, giusta il loro ordine, quello di *derivata prima*, *seconda*, ec. La derivata prima di y si accenna con dy, ove d è sempre simbolo e non quantità; la seconda, la quale in sostanza non è che una prima derivata della derivata prima, si accenna con $d(dy)$, o anche ddy, o meglio con d^2y, ove il due è indice e non esponente. Così la terza, la quarta, l'n^{sima} si accennano con d^3y, $d^4y \ldots d^ny$. Si noti 1.° che date due quantità qualunque a, b, l'una può sempre riguardarsi come derivata dell'altra, niente vietando di operare su questa in modo che resulti quella. Così a si cangia in b moltiplicandola per $\frac{b}{u}$. 2.° Se a si cangi in ma, potrà supporsi $b = dma$; e qualora nel derivar b da ma non si sia operato sul coefficiente m onde questo sia passato intatto e costante nella derivata, potrà farsi ancora $b = mda$; essendo chiaro che resa m^{pla} la derivatrice deve divenirlo ancora la derivata.

439. Ciò premesso e data una funzione φx, si supponga x cangiata in $x+\omega$, essendo ω un'indeterminata qualunque indipendente da x, e si tratti di ridurre in serie, ordinata per le potenze di ω, la nuova funzione $\varphi(x+\omega)$. Fatto $\varphi(x+\omega)=A+B\omega+C\omega^2+D\omega^3+$ec. avremo (436. 3.ª) $A=\varphi x$, e i coefficienti B, C, D, ec. funzioni della sola x. Si chiamino secondo il loro ordine $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \varphi_3 x$, ec., sarà dunque

I.ª $\varphi(x+\omega)=\varphi x+\omega\varphi_1 x+\omega^2\varphi_2 x+\omega^3\varphi_3 x+$ec.

Per determinare queste funzioni si cangi nel primo membro $x+\omega$ in $x+2\omega$: il relativo cambiamento del secondo potrà aversi cangiando o ω in 2ω, o x in $x+\omega$. Avremo dunque

II.ª $\varphi(x+2\omega)=\varphi x+2\omega\varphi_1 x+4\omega^2\varphi_2 x+8\omega^3\varphi_3 x+$ec.

III.ª $\varphi(x+2\omega)=\varphi(x+\omega)+\omega\varphi_1(x+\omega)+\omega^2\varphi_2(x+\omega)+\omega^3\varphi_3(x+\omega)+$ec.

oppure

IV.ª $\varphi(x+2\omega)=\varphi(x+\omega)+\omega\Phi(x+\omega)+\omega^2\psi(x+\omega)+\omega^3 f(x+\omega)+\omega^4 F(x+\omega)+$ec.

cangiate per comodo del calcolo che segue le sigle $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ec., respettivamente in Φ, ψ, f, F, ec. Ora nel modo che abbiamo posto

$$\varphi(x+\omega)=\varphi x+\omega\varphi_1 x+\omega^2\varphi_2 x+\omega^3\varphi_3 x+\text{ec.}$$

potremo porre altresì

$$\Phi(x+\omega)=\Phi x+\omega\Phi_1 x+\omega^2\Phi_2 x+\text{ec.}$$
$$\psi(x+\omega)=\psi x+\omega\psi_1 x+\omega^2\psi_2 x+\text{ec.}$$
$$f(x+\omega)=fx+\omega f_1 x+\omega^2 f_2 x+\text{ec.}$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

Sostituiti questi valori nella IV.ª sviluppati i prodotti per ω, ω^2, ω^3 ec. avvertendo di porre in colonna tutti i termini affetti dalle stesse potenze di ω, eguagliando il valore di $\varphi(x+2\omega)$ così ottenuto a quello dato dalla II.ª, mandato tutto a zero e rammentandoci che Φ, ψ, f, F, ec. stanno in luogo di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, ec. e perciò $\Phi x=\varphi_1 x$, $\psi x=\varphi_2 x$, $fx=\varphi_3 x$, $Fx=\varphi_4 x$, ec. troveremo

$$\begin{aligned}
0=\varphi x&+\omega\varphi_1 x+\omega^2\varphi_2 x+\omega^3\varphi_3 x+\omega^4\varphi_4 x+\text{ec.}\\
-\varphi x&+\omega\varphi_1 x+\omega^2\Phi_1 x+\omega^3\Phi_2 x+\omega^4\Phi_3 x+\text{ec.}\\
&-2\omega\varphi_1 x+\omega^2\varphi_2 x+\omega^3\psi_1 x+\omega^4\psi_2 x+\text{ec.}\\
&\qquad -4\omega^2\varphi_2 x+\omega^3\varphi_3 x+\omega^4 f_1 x+\text{ec.}\\
&\qquad\qquad -8\omega^3\varphi_3 x+\omega^4\varphi_4 x+\text{ec.}\\
&\qquad\qquad\qquad -16\omega^4\varphi_4 x+\text{ec.}
\end{aligned}$$

Dalla prima colonna si ha $\varphi x=\varphi x$, dalla seconda $\varphi_1 x=\varphi_1 x$, equazioni che niente dicono: dalle seguenti si hanno le tre

1.ª $\Phi_1 x=2\varphi_2 x$, 2.ª $\Phi_2 x+\psi_1 x=6\varphi_3 x$, 3.ª $\Phi_3 x+\psi_2 x+f_1 x=14\varphi_4 x$.

Ora si ponga, siccome è lecito (438), $\varphi_1 x=d\varphi x$, e nel medesimo modo $\Phi_1 x=d\Phi x=d\varphi_1 x=dd\varphi x=d^2\varphi x$ (*ivi*), $\psi_1 x=d\psi x=d\varphi_2 x$, $f_1 x=dfx=d\varphi_3 x$ ec.; le equazioni 1.ª 2.ª e 3.ª diverranno

4.ª $d^2\varphi x=2\varphi_2 x$, 5.ª $\Phi_2 x+d\varphi_2 x=6\varphi_3 x$, 6.ª $\Phi_3 x+\psi_2 x+d\varphi_3 x=14\varphi_4 x$.

La quarta dà immediatamente $\varphi_2 x=\frac{1}{2}d^2\varphi x$: e come tra $\Phi_2 x$ e Φx, $\psi_2 x$ e ψx deve manifestamente esistere la stessa relazione che tra $\varphi_2 x$ e φx, sarà dunque de

pari $\Phi_2 x = \frac{1}{2} d^2 \Phi x = \frac{1}{2} d^2 \varphi_1 x = \frac{1}{2} d^3 \varphi x$, $\psi_2 x = \frac{1}{2} d^2 \psi x = \frac{1}{2} d^2 \varphi_2 x = (438.\ 2.^\circ) \frac{1}{4} d^4 \varphi x$, con che la 5.ª e 6.ª si cangeranno nelle due

$$7.^a\ d^3\varphi x = 6\varphi_3 x,\quad 8.^a\ \Phi_3 x + \tfrac{1}{4} d^4\varphi x + d\varphi_3 x = 14\varphi_4 x.$$

Dalla 7.ª si ha $\varphi_3 x = \frac{1}{6} d^3 \varphi x$; quindi anche $\Phi_3 x = \frac{1}{6} d^3 \Phi x = \frac{1}{6} d^3 \varphi_1 x = \frac{1}{6} d^4 \varphi x$. E poichè $d\varphi_3 x = d(\frac{1}{6} d^3 \varphi x) = (438.\ 2.^\circ)\ \frac{1}{6} d^4 \varphi x$, la 8.ª darà dunque $\varphi_4 x = \frac{1}{2.3.4} d^4 \varphi x$. Sostituiti frattanto i valori trovati di $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$, $\varphi_4 x$, ec. nel supposto sviluppo di $\varphi(x+\omega)$, avremo $\varphi(x+\omega) = \varphi x + \omega d\varphi x + \frac{\omega^2}{2} d^2\varphi x + \frac{\omega^3}{2.3} d^3 \varphi x + \frac{\omega^4}{2.3.4} d^4 \varphi x +$ ec. Questa formula è una delle principali e più interessanti nella così detta *Analisi derivata*, e mostra come conosciuta per qualunque mezzo la derivata prima di φx, o il secondo termine dello sviluppo, possono aversi tutti i seguenti formando le une dalle altre le derivate $d^2\varphi x$, $d^3\varphi x$, ec. nel modo che si sarà veduto poter derivarsi la prima già nota dalla funzione derivatrice φx.

440. Per farne qualche applicazione, sia $\varphi x = x^m$, e si tratti di sviluppare in serie il binomio $(x+\omega)^m$. Avremo dunque per primo termine x^m, e per secondo, come si sa (213), mx^{m-1}, valore della derivata prima $d\varphi x$ che si forma dal 1.° termine moltiplicandolo per l'esponente m e quindi diminuendone l'esponente di un'unità. Dunque altresì $d^2\varphi x = m(m-1)x^{m-2}$, $d^3\varphi x = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$, ec. valori che sostituiti daranno $(x+\omega)^m = x^m + m\omega x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\omega^2 x^{m-2} + \ldots \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\omega^3 x^{m-3} +$ ec.

441. Del resto quanto a $\varphi_1 x$ è ben facile persuadersi che in tutto e per tutto corrisponde al coefficiente differenziale A di δx nello sviluppo di $\varphi(x+\delta x)$ (1220): quindi le regole pratiche che nel calcolo differenziale si son date per trovare quel coefficiente, serviranno a darci anche $\varphi_1 x$.

LOGARITMI.

442. Se a, m, b sieno tre numeri tali che abbiasi $a^m = b$, m prende in tal caso il nome di *logaritmo* di b, il che si esprime scrivendo $m = lb$; b prende quello di *numero corrispondente* del logaritmo m, il che si esprime scrivendo $lb = m$; e finalmente la radice a della potenza a^m si chiama *base* del logaritmo.

443. Se la base è costante è chiaro che ciascun numero avrà un differente logaritmo, come ciascun logaritmo avrà un diverso numero corrispondente. Se poi la base varia, potrà uno stesso numero aver differenti logaritmi, e ad uno stesso logaritmo potranno corrispondere numeri differenti, essendo chiaro che può aversi nel tempo stesso $b = a^m = c^p = d^q =$ ec., come pure $a^m = b$, $g^m = h$, $r^m = k$ ec.

444. Qualunque siasi la base ben si vede 1.° che l'unità ha sempre zero per logaritmo; 2.° che la base ha per logaritmo l'unità: infatti $a^0=1$ (164. 5.°), $a^1=a$; 3.° che $a^{lb}=b$; 4.° che supposta $a>1$ i logaritmi dei numeri interi e dei rotti improprj son positivi: ma quelli dei rotti proprj son negativi. Infatti da $a^m=b$ avendosi $\frac{1}{a^m}=(164)\, a^{-m}=\frac{1}{b}$ sarà $l\frac{1}{b}=-m$; 5.° che crescendo b cresce m: onde a numeri maggiori corrispondono logaritmi maggiori, e viceversa; quindi se b è infinito sarà infinito anche il suo logaritmo; e poichè con b infinito, cioè con b giunto al limite del suo ingrandimento, il rotto $\frac{1}{b}$ giunge al limite del suo impiccolimento, cioè a zero (50); da $-m=l\frac{1}{b}$ avremo in tal caso $l0=-\infty$, onde *il logaritmo di zero è l'infinito negativo*; 6.° che supposta a positiva lo saranno pure a^m e b, onde in quest'ipotesi *i logaritmi dei numeri negativi sono immaginarj*.

445. Il più comodo fra tutti i sistemi è quello in cui $a=10$, e questa base viene appunto adottata nelle Tavole logaritmiche di maggior uso. Or poichè $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, ec. perciò in questo sistema $l1=0$, $l10=1$, $l100=2$, $l1000=3$, $l10000=4$, ec. Dunque i logaritmi dei numeri compresi fra 1 e 10, dovranno esser maggiori di zero e minori di 1, cioè rotti proprj, e la cifra iniziale del valor loro, ridotto in forma decimale, sarà zero. Quelli dei numeri compresi fra 10 e 100 saranno >1, e <2, cioè eguali all'unità congiunta ad una frazione. Egualmente quelli dei numeri fra 100 e 1000 saranno >2 e <3, cioè saranno eguali a 2 più una frazione, ec. Perciò eccettuati i numeri della serie 1, 10, 100, 1000, ec. i logaritmi di tutti gli altri saranno composti di due parti, l'una esprimente interi e che si chiama *caratteristica* del logaritmo, l'altra frazionaria, chiamata, ma non molto comunemente, *giunta o mantissa*.

446. La caratteristica è sempre di un'unità minore del numero delle cifre degl'interi del numero dato. Così nel logaritmo di 384 la caratteristica è 2, in quello di 10248 è 4, in quello di 4,253 è 0. Infatti i numeri fra 0, e 10 son di una

sola cifra, e come si è veduto hanno zero per caratteristica; quelli tra 10 e 100 son di due cifre, ed hanno 1 per caratteristica; quelli tra 100 e 1000 son di tre cifre ed han 2 per caratteristica ec. Dato dunque un numero può sempre sapersi qual sia la caratteristica, o a quanto ascenda la parte intera del suo logaritmo: come all' opposto, dato il logaritmo può dalla caratteristica sapersi quante cifre d'interi son contenute nel numero che gli corrisponde. Quanto alla parte decimale vedremo in seguito quali vie si son tenute per calcolarla. Per ora basti prevenire che tutti i logaritmi, a riserva di quelli spettanti alla serie summentovata, sono come vedremo (458), quantità insommabili: quindi la parte decimale non può essere esatta, e contiene un errore nell' ultima cifra, che può ascendere fino alla metà del valore spettante alla classe, cui quella cifra appartiene (81).

447. Le Tavole logaritmiche più sparse e più conosciute fra noi son quelle di *Gardiner*, delle quali si hanno quattro copiose e assai corrette edizioni eseguite sotto i nostri occhi in Firenze. Noi le supponiamo già fra le mani dei nostri lettori. I logaritmi vi son disposti con particolare artifizio, di cui si rende ampio conto nei preliminari, ove diffusamente s'insegna l'una e l'altra di queste due pratiche, cioè: *dato un numero qualunque intero o rotto, cercarne il logaritmo; dato un logaritmo cercare il numero a cui corrisponde.* Conviene essersi ben addestrati in ambedue, prima di passare a conoscere le proprietà dei logaritmi e l'uso vantaggiosissimo che può farsene, sia per compendiare e facilitare i calcoli numerici, specialmente ove occorrano divisioni ed estrazioni di radici, sia per risolver non pochi quesiti, per i quali l'algebra comune è affatto insufficiente.

Proprietà ed usi dei Logaritmi in generale

448. Si abbiano le due equazioni I^a. $a^m=b$, II^a. $a^n=c$, che danno III^a. $m=lb$, IV^a. $n=lc$. Poichè moltiplicando le prime due si ha $a^{m+n}=bc$, dividendole si ha $a^{m-n}=\frac{b}{c}$, sarà altresì

$m+n=lbc$, $m-n=l\frac{b}{c}$: ma dalla III^a. e IV^a. si ha $m+n=lb+lc$, $m-n=lb-lc$, dunque 1°. $lbc=lb+lc$, cioè il *logaritmo di un prodotto eguaglia la somma dei logaritmi dei suoi fattori*; 2°. $l\frac{b}{c}=lb-lc$, cioè *il logaritmo di un quoziente eguaglia la differenza fra i logaritmi del dividendo e del divisore.*

449. Elevando la I^a. alla potenza p, avremo $a^{mp}=b^p$; all'opposto estraendone la radice p, avremo (187)$a^{\frac{m}{p}}=\sqrt[p]{b}$; quindi $mp=lb^p$, ed $\frac{m}{p}=l\sqrt[p]{b}$. Ma dalla III^a. si ha $mp=plb$, $\frac{m}{p}=\ldots\frac{1}{p}lb$, dunque 3°. $lb^p=plb$, cioè *il logaritmo di una potenza* b^p *eguaglia il prodotto dell'esponente* p *nel logaritmo della radice*; 4°. $l\sqrt[p]{b}=\frac{1}{p}lb$, cioè *il logaritmo della radice* p^{sima} *di* b *eguaglia il logaritmo di* b *diviso per* p.

450. Con questi principj si ottengono i prodotti per via di semplici somme, i quozienti per via di sottrazioni, le potenze per via di moltiplicazioni, le radici per via di semplici divisioni. Infatti volendo per esempio moltiplicare o divider l'uno per l'altro i due numeri a, b, non dovremo che cercarne i logaritmi e quindi sommargli o sottrargli: il numero corrispondente alla somma o alla differenza sarà il prodotto o il quoziente cercato. Come pure se dato il numero a, vogliasene la potenza o la radice m^{sima}, non dovremo che cercarne il logaritmo e moltiplicarlo o dividerlo per m: ed il numero corrispondente al prodotto o al quoziente, sarà la potenza o la radice cercata. Non alleghiamo esempj numerici, dei quali i preliminari citati (447) sono a sufficienza provvisti. Solo avvertiremo che come le ordinarie tavole logaritmiche non hanno che una limitata estensione, così i numeri corrispondenti non risultano esatti che fino alla 6^a. o al più alla 7^a. cifra: quindi l'uso dei logaritmi cessa d'essere vantaggioso, qualora il rigore del risultamento esiga un più esteso numero di cifre. Questo caso è per altro molto infrequente. Intanto poniamo qui alcuni esempj, dai

quali meglio si apprenderà ad applicare alle formule algebriche i logaritmi, secondo i già esposti principj.

$$Labcd\ \text{ec.} = La + Lb + Lc + Ld + \text{ec.};\quad L(a^2 - x^2) = L(a+x) + L(a-x).$$

$$L\frac{abc}{de} = La + Lb + Lc - Ld - Le;\quad L\frac{ab+bc}{m+n} = Lb + L(a+c) - L(m+n).$$

$$L\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = L(a+x) - L(a-x);\quad L\sqrt{(a^2-x^2)} = \tfrac{1}{2}L(a+x) + \tfrac{1}{2}L(a-x).$$

$$La^m = mLa;\quad La^{-m} = -mLa;\quad La^m p^b c^q = mLa + bLp + qLc.$$

$$La^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}La;\quad La^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n}La;\quad L\frac{ax^n}{r^m} = La + nLx - mLr$$

$$L\sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = (261)\ \frac{m}{n}L(a-x) + \frac{m}{n}L(a^2+ax+x^2).$$

$$L\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{(a+x)^2} = \tfrac{1}{2}L(a-x) + \tfrac{1}{2}L(a+x) - 2L(a+x) = \tfrac{1}{2}L(a-x) - \tfrac{3}{2}L(a+x).$$

$$L\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = L1 - \frac{1}{2}L(1+x^2) = -\tfrac{1}{2}L(1+x^2).$$

$$L3a^2 + La^4 + 5L3 = L3 + 2La + 4La + 5L3 = 6L3 + 6La = 6L3a = L(3a)^6.$$

Calcolo dei Logaritmi per mezzo delle Serie

451. Sia y un numero qualunque, e voglia trovarsi l'espressione algebrica del suo logaritmo. Dovrà questa esser tale che si riduca da se medesima a zero quando $y=1$ e che divenga eguale all'infinito negativo quando $y=0$ (444. 5°), al che non soddisfà la supposizione di $\text{Log.}y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{ec.}$ Porremo $\text{Log.}y = A(y-1) + B(y-1)^2 + C(y-1)^3 + \text{ec.}$; ovvero, fatto per maggior semplicità $y = 1+x$, $\text{Log.}(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ec.}$ Per determinare i coefficienti cangio x in $x(2+x)$ ed ho $L(1+x(2+x)) = Ax(2+x) + Bx^2(2+x)^2 + Cx^3(2+x)^3 + Dx^4(2+x)^4 + \text{ec.}$ Ma altresì $L(1+x(2+x)) = L(1+x)^2 = (449.\ 3°)\ 2L(1+x) = 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \text{ec.}$; dunque eguagliando le due espressioni, e tutto mandando a zero, avremo

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \text{ec.} \\ & -2Ax - Ax^2 - 4Bx^3 - Bx^4 - \text{ec.} \\ & \qquad\quad - 4Bx^2 - 8Cx^3 - 12Cx^4 - \text{ec.} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad - 16Dx^4 - \text{ec.} \end{aligned}$$

e di quì (422) $A=A$, $B=-\tfrac{1}{2}A$, $C=\tfrac{1}{3}A$, $D=-\tfrac{1}{4}A$, ec. onde $L(1+x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ec.}\right)$.

452. Per avere il valor di A, supposta a la base, si ponga $y=\frac{1}{a}$; sarà $x=\frac{1-a}{a}=-\frac{a-1}{a}$ e quindi $l(1+x)=la^{-1}=-1$ (444.4°)$=-A\left(\frac{a-1}{a}+\frac{(a-1)^2}{2a^2}+\frac{(a-1)^3}{3a^3}+\frac{(a-1)^4}{4a^4}+\text{ec.}\right)$, d'onde $A=1:\left(\frac{a-1}{a}+\frac{(a-1)^2}{2a^2}+\frac{(a-1)^3}{3a^3}+\text{ec.}\right)$. Così se $a=10$, avremo . . $A=1:\left(\frac{9}{10}+\frac{9^2}{2.10^2}+\frac{9^3}{3.10^3}+\text{ec.}\right)$, e calcolando troveremo $A=\frac{1}{2{,}302585092994045684\text{ec.}}=0{,}43429448190325182765\,11\text{ec.}$

453. Questo numero o valore di A chiamasi *modulo*: varia con la base, da cui dipende, ed è per conseguenza diverso in ogni sistema di logaritmi. Chiamati A, A_1 i moduli in due diversi sistemi, e supposti l, l_1 i logaritmi che nell'uno e nell'altro appartengono ad uno stesso numero, avremo evidentemente $A:A_1::l:l_1$, e quindi $l_1=\frac{A_1 l}{A}$; cioè *i logaritmi dell'un sistema si ridurranno a quelli dell'altro moltiplicandoli per il rapporto* $\frac{A_1}{A}$ *dei respettivi due moduli.*

454. *Nepero* gentiluomo scozzese, a cui è principalmente dovuta la felice invenzione dei logaritmi, in luogo di supporre ad arbitrio una base, preferì di determinare il modulo, che pose eguale all'unità. I logaritmi così calcolati si dissero *Neperiani*, e anche *naturali* o *iperbolici*, per ragioni che in appresso daremo. Son dunque rappresentati dalla serie $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-$ ec. e si riducono a logaritmi *ordinarj*, cioè con la base 10, moltiplicandoli per $A=\frac{1}{2{,}30258509299\text{ec.}}=0{,}4342944819\text{ec.}$ Godono di rimarchevoli proprietà che svilupperemo a suo luogo.

455. Ripresa adesso l'equazione $L(1+x)=$ . . . . . . $A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ec.}\right)$, si cangi x in $-x$ ed avremo . . $L(1-x)=-A\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3}+\text{ec.}\right)$, e di qui $L(1+x)-L(1-x)=L\frac{1+x}{1-x}$(448.2°)$=2A\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\text{ec.}\right)$. Fatto frattanto $\frac{1+x}{1-x}=\sqrt[m]{n}$, onde $x=\frac{\sqrt[m]{n}-1}{\sqrt[m]{n}+1}$ avremo sostituendo, $L\sqrt[m]{n}$

$=(452)\frac{1}{m}Ln=2A\left(\frac{\sqrt[m]{n}-1}{\sqrt[m]{n}+1}+\frac{(\sqrt[m]{n}-1)^3}{3(\sqrt[m]{n}+1)^3}+\text{ec.}\right)$, serie che nel caso di $n>1$ può rendersi quanto si voglia convergente, potendo sempre darsi ad m un valor tanto grande che $\sqrt[m]{n}$ differisca quanto si voglia poco dall'unità.

456. Allorchè si tratta di trovare isolatamente un logaritmo non vi è serie più atta della precedente: ma se si trattasse o di formare o di estendere un corpo di tavole, allora sarà più opportuno di fare $\frac{1+x}{1-x}=\frac{m^2}{m^2-1}$, oppure $=\frac{(m-1)^2(m+2)}{(m+1)^2(m-2)}$, oppure $=\frac{(m^2-9)(m^2-16)}{m^2(m^2-25)}$, dal che si avrebbe nel primo caso $x=\frac{1}{2m^2-1}$, nel secondo $x=\frac{2}{m^3-3m}$, nel terzo $x=\frac{72}{m^4-25m^2+72}$, valori che sostituiti in quello di $L\frac{1+x}{1-x}$, danno le tre formule seguenti:

$$2Lm-L(m+1)-L(m-1)=2A\left(\frac{1}{2m^2-1}+\frac{1}{3(2m^2-1)^3}+\text{ec.}\right)$$

$$2L(m-1)+L(m+2)-2L(m+1)-L(m-2)=2A\left(\frac{2}{m^3-3m}+\frac{2^3}{3(m^3-3m)^3}+\text{ec.}\right)$$

$$L(m+3)+L(m-3)+L(m+4)+L(m-4)-2Lm-L(m+5)-L(m-5)=2A\times\left(\frac{72}{m^4-25m^2+72}+\text{ec.}\right).$$

457. Arrestandoci alla prima, osserveremo che posto successivamente $m=4$, $=5$, $=9$, e riflettendo che $L5=L\frac{10}{2}=1-L2$, si hanno le tre equazioni

$$\text{I}^a.\ 5L2-L3-1=2A\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{3.31^3}+\frac{1}{5.31^5}\right)$$

$$\text{II}^a.\ -5L2-L3+2=2A\left(\frac{1}{49}+\frac{1}{3.49^3}+\frac{1}{5.49^5}+\text{ec.}\right)$$

$$\text{III}^a.\ -3L2+4L3-1=2A\left(\frac{1}{161}+\frac{1}{3.161^3}+\text{ec.}\right)$$

Dalle prime due si ottiene

$$L3=\frac{1}{2}-A\left(\frac{1}{31}+\text{ec.}\right)-A\left(\frac{1}{49}+\text{ec.}\right)$$

$$L2=\frac{3}{10}+\frac{A}{5}\left(\frac{1}{31}+\text{ec.}\right)-\frac{A}{5}\left(\frac{1}{49}+\text{ec.}\right)$$

valori che sostituiti nella terza, danno per il modulo $A=1:46\left(\frac{1}{31}+\text{ec.}\right)+\ldots 34\left(\frac{1}{49}+\text{ec.}\right)+20\left(\frac{1}{161}+\text{ec.}\right)$, espresso in modo assai più convergente dell'altro avuto di sopra, bastando soli sette termini della prima e seconda serie del denominatore, e 5 della terza per aver l'esattezza fino alla 20ma. decimale.

Avuto A, l'ultime due formule daranno i logaritmi di 2 e di 3, da cui dipendono quelli di 4, 5, 6, 8, 9. Quello di 7 si avrà ponendo $m=7$ nella prima delle tre formule generali, e quello di 11 ponendo $m=6$ nella terza, e così si avranno tutti quelli degli altri numeri primi, e per addizione quelli dei non primi.

458. Prima di lasciar questa materia si osserverà che avendosi trovato $L(1-x)= -A\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\text{ec.}\right)$, se si faccia $x=1$ e si rifletta che $L0=-\infty$ (444), si avrà $A\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{ec.}\right)=\infty$; il che mostra che la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ec. è insommabile, mentre con lo stesso ragionamento l'espressione del logaritmo di $1+x$ mostra che l'altra serie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+$ec. è sommabile, ed eguaglia il logaritmo di 2 diviso per il modulo A.

459. Bensì qualunque altra serie che decresca più rapidamente di quella di $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ec. sarà sempre sommabile, cioè equivalente ad una quantità finita. Infatti posto $1-x=\frac{1}{y}$, si avrà $L\frac{1}{y}=-A\left\{\frac{y-1}{y}+\frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{y}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y}\right)^3+\text{ec.}\right\}$; onde essendo $L\frac{1}{y}$ quantità finita finchè lo è y, la serie sarà pure sommabile, per quanto $\frac{y-1}{y}$ si avvicini all'unità.

460. *Dato un logaritmo* l *trovarne il numero corrispondente* n. Posto $n=1+x$, si avrà $l=Ln=L(1+x)=(451)A(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-$ ec.) e fatto $\frac{l}{A}=p$, il metodo inverso delle serie (437) darà $n=1+x=1+p+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2.3}p^3+\frac{1}{2.3.4}p^4+$ec.

461. Si noti 1°. che se l ha una caratteristica $m>0$, la serie divergerà: in tal caso in luogo di l sostituiremo $l_1=l-m=$ (446) $L\frac{n}{10^m}$; e la serie, allora convergente, darà dunque il numero $\frac{n}{10^m}$, d'onde n. 2°. Se il logaritmo é iperbolico, avremo $A=1$, $p=Ln$, ed $n=1+Ln+\frac{1}{2}L^2n+\frac{1}{2.3}L^3n+\frac{1}{2.3.4}L^4n+$ec. Di qui $n^m=1+Ln^m+\frac{1}{2}L^2n^m+$ec. $=1+mLn+\frac{1}{2}Ln^mLn^m+$ec. $=\ldots$ $1+mLn+\frac{1}{2}m^2L^2n+\frac{1}{2.3}m^3L^3n+$ ec.; e se sia $n=e$, intendendo per e la base dei logaritmi iperbolici (454), sarà $Ln=Le=1$ (444.2°), ed $e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+$ec. $=2,718281828459$. Sarà pure $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1}{2.3.4}x^4+$ec.

Applicazioni dell' Algebra alle regole superiori dell' Aritmetica

462. *Regola del tre.* Dati tre termini di una proporzione geometrica si può sempre trovare il quarto proporzionale, che è uno degli estremi, o uno dei medj (354). Il metodo che insegna a trovare questo quarto proporzionale si chiama *regola del tre.* Questo metodo fondato sui principj già stabiliti non offre altra difficoltà che quella di giungere a ben rilevare dal quesito quali sieno i termini estremi e quali i medj, ovvero qual sia l'ordine in cui debbono collocarsi per metterli in proporzione.

463. A tale effetto si rendono necessarie le tre seguenti osservazioni. 1ª. Dei tre termini dati, due sono sempre *omogenei* fra loro, cioè spettano a quantità relative ad uno stesso genere di cose; e il terzo, detto ancora *solitario*, è omogeneo al nuovo che si cerca. Così proponendosi: se 19 uomini hanno fatto un determinato lavoro in 15 giorni, 30 uomini in quanti giorni ne faranno altrettanto? in questo quesito sono visibilmente omogenei fra loro il 19 e il 30, l'uno e l'altro dei quali rappresentano quantità di uomini: mentre il solitario 15, egualmente che il numero che si cerca, indicano quantità di tempo o di giorni.

2ª. Dei due omogenei dati, l'uno è con interrogazione, l'altro è senza. Nell'esempio citato allorchè si dice che 19 uomini hanno fatto un lavoro in 15 giorni, niente si domanda, e solo si asserisce o si narra una cosa avvenuta, onde l'omogeneo dato 19 è quì senza interrogazione; ma quando poi si passa a cercare in quanto tempo compiranno il dato lavoro 30 uomini, si fa relativamente a questi 30 uomini una domanda, e il termine 30 è dunque l'omogeneo con interrogazione.

3ª. In fine la regola del tre è talora *diretta* e talora *inversa.* È diretta, qualora crescendo o scemando l'omogeneo con interrogazione, si prevede che dovrà proporzionatamente crescere o scemare con esso la quantità che si cerca; è inversa nel caso opposto (352). Così nell'esempio addotto la regola è inversa, essendo manifesto che quanto fossero in maggiore o minor

numero gli uomini che si vogliono impiegare, altrettanto sarebbe all'opposto minore o maggiore il numero dei giorni nei quali si troverebbe compito il lavoro. Ma se si proponesse: 50 braccia di panno son costate 80 lire, quanto costeranno 39 braccia? la regola sarebbe diretta, poichè è ben chiaro che quante più o meno braccia si staccheranno, tanto più o meno denaro converrà dare in pagamento.

464. Tutto questo premesso, ecco il metodo costante da tenersi per ben disporre i termini nella regola del tre. Rilevati dal quesito i due termini omogenei, *si collocherà in primo luogo l'omogeneo senza interrogazione, dipoi quello con interrogazione*. Quindi se la regola è diretta *si porrà in terzo luogo il solitario, e in ultimo l'incognita* x *che sta in luogo del termine ignoto* (354). Se poi la regola è inversa, *si porrà in terzo luogo l'incognita* x, *e in ultimo il solitario*. Così nel primo dei due esempj arrecati, nel quale l'omogeneo senza interrogazione è 19, l'altro 30, il solitario è 15, e la regola come abbiamo veduto è inversa, si scriverà $19 : 30 :: x : 15$; ed operando in seguito secondo i precetti già dati nelle proporzioni (*ivi*), avremo $30x = 15 \times 19$, ed $x = \frac{15 \times 19}{30} = 9\frac{1}{2}$ numero dei giorni cercati. E nel secondo esempio, nel quale l'omogeneo senza interrogazione è 50, l'altro 39, il solitario 80, e la regola è diretta, porremo $50 : 39 :: 80 : x$, e sarà $x = \frac{39 \times 80}{50} = 62\frac{2}{5}$, prezzo delle 39 braccia di panno.

465. Si osservi che prima di trovare il valore del termine incognito sarà bene di rendere più semplici, qualora si possa, i termini dati, il che ha luogo tutte le volte che un medio ed un estremo si posson dividere per un numero stesso (357).

466. Non sempre sono date tre quantità, e se ne cerca una quarta: alcune volte sono date cinque quantità, e se ne cerca una sesta; altre volte ne sono date sette, e se ne cerca un'ottava, ec. Il metodo col quale si determina questa sesta, ovvero ottava quantità dicesi regola del *tre composta*, ossia regola del *cinque*, del *sette*, ec. Di queste cinque o sette quantità date, due a due debbono essere omogenee fra loro, e la rimanente è solitaria,

ed a questa deve essere omogenea la quantità che si cerca e che si determina col metodo seguente.

Si prendano due qualunque delle quantità omogenee date, e si stabilisca tra loro e la solitaria una regola del tre inversa o diretta, secondo che la natura della questione ridotta a questi soli tre termini porterebbe. Quindi si prendano le altre due omogenee date, e si stabilisca una seconda regola del tre fra queste e il risultamento precedente; ciò che proviene da quest'ultima operazione sarà la quantità cercata, se cinque sole sono le quantità date. Che se sono sette, si prosegua instituendo una terza regola del tre fra le due quantità rimanenti e l' ultimo risultamento, e ciò che ne deriva equivarrà a ciò che si cerca. E così si continuerà, se le quantità date sieno nove, undici ec.

Es. I. Sono state fatte 132 canne di fossa da 30 uomini in giorni 18, quante ne farebbero 54 uomini in 28 giorni? Quì le quantità omogenee fra loro sono 30 uomini e 54 uomini; 18 giorni e 28 giorni; la quantità solitaria è le 132 canne, a cui è omogenea la quantità che si cerca; incomincio adunque dal fare la prima regola del tre dicendo: se 30 uomini fanno 132 canne, quante ne faranno 54? e come la regola è visibilmente diretta, trovo 237,6, lavoro di 54 uomini in 18 giorni. Passo alla seconda regola del tre e dico: se in 18 giorni si fanno canne 237,6, quante se ne faranno in 28? E quì pure la regola essendo diretta trovo canne 369,6, lavoro di 54 uomini in 28 giorni.

Es. II. Un mobile con la celerità c ha percorso lo spazio s nel tempo t; in qual tempo T avrebbe percorso lo spazio S con la celerità C? Diremo: se il mobile con la celerità c ha percorso lo spazio s nel tempo t, in qual tempo con la stessa celerità avrebbe percorso lo spazio S? caso di regola diretta, perchè un maggiore spazio richiede un maggior tempo per esser percorso. Porremo dunque $s : S :: t : x = \frac{tS}{s}$: quindi proseguendo diremo: se con la celerità c il mobile avrebbe percorso lo spazio S nel tempo $\frac{tS}{s}$, qual tempo T avrebbe impiegato con la celerità C? caso di regola inversa, perchè crescendo la velocità scema il tempo necessario a percorrere uno spazio as-

segnato: porremo dunque $c : C :: T : \frac{tS}{s}$, ovvero $C : c :: \frac{tS}{s} : T$, ed avremo $T = \frac{ctS}{Cs}$.

467. E quì giova osservare che se i valori c, s, t si prendano per unità di confronto o di misura, alla quale si riferiscano i corrispondenti valori di $C, S, T,$ avremo $c=1, s=1, t=1$; e quindi $T = \frac{S}{C}$, d'onde ancora $C = \frac{S}{T}$, $S = CT$, formule notissime tra i Meccanici, i quali sogliono annunziarle dicendo che *il tempo eguaglia lo spazio diviso per la celerità*; *la celerità eguaglia lo spazio diviso per il tempo*: *lo spazio eguaglia il tempo nella celerità*, modi di dire che debbon prendersi in senso relativo e non assoluto; cioè le celerità, gli spazj e i tempi non debbon considerarvisi per ciò che sono in natura, ma bensì per il rapporto numerico che ciascuna di queste quantità date trovasi avere con altre quantità della loro respettiva specie, le quali si assumono come eguali all' unità, o come unità di misura.

468. Se nell'esempio I°. (466) si chiami y il termine ignoto della prima proporzione, x quello della seconda, avremo 1ª. $30 : 54 :: 132 : y$; 2ª. $18 : 28 :: y : x$, e moltiplicando l'una per l'altra (357) $30 \times 18 : 54 \times 28 :: 132 y : xy$, ossia schisando per y l'ultima ragione, $30 \times 18 : 54 \times 28 :: 132 : x = \frac{132 \times 54 \times 28}{30 \times 18} = .. 369{,}6$. Nel modo stesso il II°. esempio darebbe 1ª. $s : S :: t : y$, 2ª. $c : C :: x : y$, e dividendo l'una per l'altra $\frac{s}{c} : \frac{S}{C} :: \frac{t}{x} : 1$, ossia $\frac{s}{c} : \frac{S}{C} :: t : x = T = \frac{ctS}{Cs}$. Da ciò si apprende che i quesiti di regola composta si posson risolvere ancora senza passare per più regole del tre semplici, instituendo immediatamente una proporzione col prodotto di tutti gli omogenei senza interrogazione per primo termine, con quello di tutti gli omogenei con interrogazione per secondo termine, col solitario al solito in terzo luogo, e in ultimo colla quantità che si cerca; e ciò nel caso che tutte le regole sieno dirette. Se poi vi sieno regole inverse, gli omogenei di queste, respettivamente moltiplicati fra loro, si daranno per divisori ai prodotti dei corrispondenti omogenei delle regole dirette.

E se due sole sieno le regole, diretta l'una, inversa l'altra, non si farà che dividere i due omogenei della prima per quelli della seconda.

469. La regola del tre è di grandissimo uso in tutte le parti delle Matematiche: ma quì non potremmo farne applicazioni più utili delle seguenti.

Regola di semplice falsa posizione. È così chiamata una regola, con la quale gli Aritmetici sciolgono non poca parte dei problemi di 1.° grado, indipendentemente da ogni metodo algebrico. In luogo dell'incognita x assumono qualunque numero arbitrario a, e sperimentando su questo le condizioni del Problema, se in luogo del vero risultamento q trovano il falso q_1 instituiscono la proporzione $q_1 : q :: a : x$, d'onde hanno $x=\frac{aq}{q_1}$. Così: voglio un numero tale che la metà, il quarto e il quinto di esso formino 456. Suppongo che sia 20; di cui 10 è la metà, 5 il quarto, 4 il quinto. Or queste parti sommate danno il falso risultamento 19 in luogo del vero 456. Dunque $19 : 456 :: 20 : x=480$, numero cercato.

470. Questo metodo non può peraltro estendersi che a quei soli Problemi, i quali o direttamente o per via di qualche facile industria, portano ad un'equazione della forma $px=q$. Allora la supposizione del numero arbitrario a in luogo di x, dà luogo all'equazione $ap=q_1$, per cui divisa l'altra $px=q$ si ha $\frac{x}{a}=\frac{q}{q_1}$, e quindi (356) $q_1 : q :: a : x$.

471. Che se l'equazione del Problema sia della forma più generale $px+r=qx+s$, allora, presi due numeri arbitrarj a_1, a_2, e sperimentate su di questi le condizioni, si supponga che si trovino gli errori e_1, e_2, cioè che il primo risultamento diversifichi dal vero di e_1, l'altro di e_2. Avremo dunque le due equazioni $a_1p+r=a_1q+s+e_1$, $a_2p+r=a_2q+s+e_2$. Da queste sottraendo la data $px+r=qx+s$ avremo $(p-q)(a_1-x)=e_1$, $(p-q)(a_2-x)=e_2$; e dividendo l'una per l'altra, $\frac{a_1-x}{a_2-x}=\frac{e_1}{e_2}$; d'onde $x=\frac{a_1e_2-a_2e_1}{e_2-e_1}$, che si cangia in $x=\frac{a_1e_2+a_2e_1}{e_2+e_1}$ nel caso che gli

errori e_1, e_2 supposti da noi di segno eguale, sieno di segno diverso. Di qui la seguente regola di *doppia falsa posizione*.

Supposti due numeri ad arbitrio, sperimento in essi le condizioni del problema; se l'uno o l'altro vi soddisfanno, il problema è sciolto: se no, scrivo i due errori positivi o negativi che ne risultano. Moltiplico quindi ciascuna posizione per l'error dell'altra, e secondo che gli errori son simili o dissimili (cioè con lo stesso o con diverso segno) divido la differenza o la somma dei prodotti per la differenza o somma degli errori: il quoziente è il numero cercato.

Esempio. Un Giocatore scommette 12 contro 8 ad ogni partita; ne fa 10 e tira 20: quante ne ha vinte? Suppongo 9, e dovrà aver 72; e poichè ne perde 1, dovrà dar 12: tirerebbe perciò 60, e dovea tirar 20; vi è dunque un errore di +40. Suppongo 8, e dovrà aver 64; e poichè ne perde 2, dovrà dar 24: tirerebbe perciò 40, e dovea tirar 20; vi è dunque un errore di +20. Dispongo come di fianco le posizioni e gli errori.

Pos. I. 9	Pos. II. 8
Er. + 40	Er. + 20

Moltiplico 9 per 20, e 8 per 40, e poichè gli errori son simili, divido la differenza 140 dei prodotti per la differenza 20 degli errori, ed ho 7 partite vinte. Se invece di 8 avessi supposto 3, la vincita sarebbe 24, la perdita 84, il dare 60, e perciò l'errore —80: moltiplicando 9 per 80, e 3 per 40, e dividendo la somma 840 dei prodotti per la somma 120 degli errori, che son dissimili, verrebbe 7 come prima.

472. Usando la regola in questo modo, il calcolo condurrà rettamente al valor dell'incognita. Ma si avverta 1°. di applicarla a problemi possibili, perchè in caso di x assurdo, lo sarà anche il risultamento: 2°. di prender negativi i risultamenti quando lo esiga l'indole del problema, poichè la regola li dà positivi, se tali furono le posizioni: 3°. di operar sulla seconda posizione con l'ordine che si osservò nella prima, altrimenti il risultamento non sarebbe proporzionale e la regola fallirebbe.

473. *Regola di alligazione.* Due materie M_1, M_2 costano p_1, p_2 la libbra. Mescolando m_1 libbre dell'una con m_2 dell'altra, qual sarà il prezzo p di m libbre della materia M

così composta? Se una libbra della prima materia costa p_1, m_1 libbre costeranno m_1p_1, come costeranno m_2p_2 le m_2 dell'altra. Sarà dunque $m_1p_1+m_2p_2$; il prezzo totale del composto: ma questo è di libbre m_1+m_2, avremo dunque $m_1+m_2 : m_1p_1+\ldots m_2p_2 :: m : p = \frac{m(m_1p_1+m_2p_2)}{m_1+m_2}$; che se $m=1$, sarà $p=\frac{m_1p_1+m_2p_2}{m_1+m_2}$, prezzo di una libbra della materia composta M.

474. Ma se all'opposto si cerchi in qual rapporto debban mescolarsi le due materie, affinchè ne risulti un composto di un determinato prezzo p, avremo dall'ultima equazione $m_1 : m_2 :: p_2-p : p-p_1$. Potremo dunque porre $m_1=a(p_2-p)$, $m_2=a(p-p_1)$, e dato ad a qualunque valore ad arbitrio, tutti i valori che risulteranno per m_1, m_2 risolveranno il quesito.

475. *Regola di società*. Tre Negozianti coi capitali c_1, c_2, c_3 han fatta società di commercio. Il guadagno comune è stato g; qual sarà il guadagno parziale di ciascheduno? Si chiamino x, y, z i tre guadagni: è chiaro che ciascun di questi dovrà stare al guadagno comune g, come al capitale comune $c_1+c_2+c_3$ stanno respettivamente i capitali parziali c_1, c_2, c_3. Avremo dunque per il primo $x : g :: c_1 : c_1+c_2+c_3$, e quindi $x=\frac{gc_1}{c_1+c_2+c_3}$, e nel modo stesso si troveranno y e z.

476. Due Negozianti hanno posti in società i capitali c_1, c_2 l'uno per il tempo t_1, l'altro per il tempo t_2: il guadagno comune è stato g: qual parte deve averne ciascuno? I guadagni parziali x, y debbono in questo caso esser proporzionali non solo al capitale impiegato, ma ancora alla durata dell'impiego, cioè debbono stare in ragion composta del capitale e del tempo, o come il prodotto di questo in quello (467). Avremo dunque $x : y :: c_1t_1 : c_2t_2$, e quindi (357) $x : x+y :: c_1t_1 : c_1t_1+c_2t_2$; ma in ipotesi $x+y=g$, dunque $x=\frac{gc_1t_1}{c_1t_1+c_2t_2}$.

477. Tre cagioni operando separatamente producono i tre effetti e_1, e_2, e_3 nei tempi t_1, t_2, t_3. Qual effetto e produrranno nel comun tempo t. Chiamati x, y, z gli effetti separati e corrispondenti al tempo t, avremo $t_1 : e_1 :: t : x=\frac{e_1t}{t_1}$, come e-

gualmente $y=\frac{e_2t}{t_2}$, $z=\frac{e_3t}{t_3}$. Quindi per l'effetto contemporaneo $e=t\left(\frac{e_1}{t_1}+\frac{e_2}{t_2}+\frac{e_3}{t_3}\right)$. Che se vogliamo il tempo in cui le tre cagioni riunite produrranno il dato effetto e, avremo $t=\ldots$ $e:\left(\frac{e_1}{t_1}+\frac{e_2}{t_2}+\frac{e_3}{t_3}\right)$.

478. *Regola d'interesse o frutto.* Così chiamasi la regola che determina il frutto annuo o d' un puro capitale o d'un capitale unito ai suoi frutti: nel primo caso l'interesse è *semplice*, nel secondo è *composto*. Ecco i due più comuni problemi dell' uno e dell' altro.

Frutto semplice. I. Diedi lire 15600 all' 8 per 100: che mi si deve per sorte e frutti dopo anni 5? Sia $t=5$ il tempo, $p=15600$ la sorte, r il frutto annuo d'una lira, che si ha dalla proporzione $100:8::1:r=0,08$: e poiché 1 lira in anni 1 frutta r, le lire p in anni t frutteranno prt (468): si avrà dunque tra sorte e frutti la somma $s=p(1+rt)=21840$ lir.

479. II. Riscossa oggi la mia pensione annua di lir. 1000 la lascio in seguito per anni 8 al 5 per 100: quanto mi si dovrà dopo quel tempo? Sia $t=8$, $p=1000$, r il frutto annuo d' una lira: e poichè la pensione si paga a fin d'anno, onde nel primo non frutta, il frutto del secondo sarà pr, del terzo $2pr$, e del t^{mo} sarà $(t-1)pr$, dunque i frutti sono $pr+2pr+3pr+\ldots\ldots+(t-1)pr=\frac{prt}{2}(t-1)$ (367), che con le pensioni pt, danno $s=\frac{1}{2}pt(2+r(t-1))=9400$ lir.

480. *Frutto composto*. I. Impiegai lir. 20000 al 5 per 100, formando ogni anno un nuovo capitale di esse e del loro frutto: che mi si deve in tutto dopo 6 anni? Si ha $t=6$, $p=20000$, $r=0,05$, $q=1+r=1,05$, capitale e frutto d'una lira: e poichè la sorte 1 produce q sorte e frutto nel prim'anno, la sorte q produrrà q^2 sorte e frutto nel secondo; così produrrà q^3 nel terzo, e q^t nel t^{mo}. Frattanto se la sorte 1 divien q^t, la sorte p diverrà $pq^t=s$ somma cercata, da cui tolto p si avrà di puri frutti $s_1=p(q^t-1)$. Per avere s in numeri applico i logaritmi, ed ho $Ls=Lpq^t=(448)Lp+Lq^t=(449)Lp+tLq$. Ora $Lp=\ldots$

$L20000=4,3010300$; $Lq=L1,05=0,0211893$; $tLq=6Lq=$ $0,1271358$; valori che sostituiti danno $Ls=4,4281658=\ldots$ $L26801,91$; onde $s=26801,91$.

481. II. Impiego annualmente al 4 per 100 una pensione $p=2400^l$, rilasciando i frutti in capitale: qual è il mio credito dopo anni $t=8$? Posto $r=0,04$ e $q=1,04$, poichè al fin del prim' anno il mio credito è p, del secondo $p(1+r)+p=p+pq$, del terzo $(p+pq)(1+r)+p=p+pq+pq^2$, ec. il totale al fin dell' anno t sarà $p+pq+pq^2\ldots+pq^{t-1}=\frac{p(q^t-1)}{r}(372)=s$. Per ridurre a numeri il valor di s instituisco il calcolo come di fianco, cercando prima a parte col mezzo dei logaritmi il valore di q^t; sottraendone quindi l'unità per aver quello di q^t-1; poi sommando il logaritmo del valor trovato di q^t-1 col logaritmo di p; togliendo infine dalla somma quello di r; il numero corrispondente al logaritmo residuo equivarrà al valor cercato di s. Infatti la formula dà $Ls=Lp+L(q^t-1)-Lr$.

$$
\begin{array}{lll}
Lq=L1,04= & 0,0470333 & \\
tLq=8L1,04= & 0,1362664 & =L1,368568 \\
 & & -1 \\
q^t-1= & & 0,368568 \\
L(q^t-1)= & 9,5665176 + & \\
Lp=L2400= & 3,3802112 + & \\
Log.\,somma= & 2,9467288 + & \\
Lr=L0,04= & 8,6020600 - & \\
Log.\,diff^a.= & 4,3446688 & =L22114,08 \\
s= & 22114,08 &
\end{array}
$$

482. Si noti che in tutti i casi d' interesse composto se t è frazionario, dovremo prima calcolare s per la sola parte intera di t, e quindi far uso delle formule del frutto semplice per determinare ciò che il valor trovato di s diverrà nella parte di t che rimane. Infatti non entra il frutto in capitale se non quando è realmente esigibile, cioè al termine completo dell' anno o del mese, secondo che si sarà convenuto. Nel tempo intermedio è unicamente il capitale che rende frutto, e questo è dunque allora semplice e non composto. Eccone un esempio.

Un capitale di lire $355\frac{1}{2}$ al frutto composto del $5\frac{3}{4}$ per 100, in anni $20\frac{1}{2}$ che renderà? Cercheremo prima di tutto quanto renderà in anni 20; e poichè abbiamo $p=355,5$, $q=1,0575$, $t=20$ ed (480) $s=pq^t$; sarà $Ls=Lp+tLq=2,5508396+\ldots\ldots$ $20\times0,0242804=3,0364476=L1087,546$. Quanto all'aumento dovuto per il mezz' anno che resta si avrà dalla formula del

frutto semplice (478) $s=p(1+rt)$, ponendo $p=1087,546,\ldots$ $r=0,0575$, $t=0,5$: onde $1+rt=1,02875$, e quindi $Ls=Lp+L(1+rt)=3,0364476+0,0123099=3,0487575=L1118,813$ rendita totale cercata.

483. Da tutte le trovate equazioni, date tre delle quattro quantità p, r (ovvero q), s, t, vien sempre la quarta. Nei casi però d'interesse composto il valor di t non potrà aversi che col mezzo della falsa posizione, o più speditamente coi logaritmi. Eccone un esempio nel quale si cerca t.

In qual tempo t un capitale $p=355\frac{1}{2}$ al frutto composto di $5\frac{3}{4}$ per 100 diverrà $s=1118,813$?

Dalla formula $s=pq^t$ si avrebbe, come sopra, $Ls=Lp+tLq$, e quindi $t=\frac{Ls-Lp}{Lq}=\frac{0,4979180}{0,0242804}$: dunque $Lt=L0,4979180-L0,0242804=1,3119019=L20,507$; valore però non del tutto esatto, per ciò che dicemmo (482), quanto alla parte frazionaria. Per rettificarlo si cercherà qual diverrebbe precisamente il capitale proposto in anni 20 completi : troveremo, come sopra, $s=1087,546$. Quindi col mezzo della formula $s=p(1+rt)$ si cercherà in qual tempo t questo nuovo capitale, impiegato al frutto semplice, diverrà 1118,813, ed avremo $t=\ldots\frac{s-p}{pr}$, $lt=l(s-p)-(lp+lr)=1,4950862-1,7961154=\ldots\ldots 9,6989708=L0,5$ come doveva essere (482).

484. *Regola di sconto.* A creditore di una somma s esigibile fra t anni, chiede oggi l'anticipazione del pagamento, accordando l'*abbono* o *sconto* di r per 1. Con qual somma p potremo saldarlo? È chiaro dover p corrispondere ad un capitale che in t anni tra sorte e frutti divenga s; perciò se lo sconto è semplice sarà (478) $p=\frac{s}{1+rt}$, se è composto (480) $p=\frac{s}{q^t}$.

485. Dovendo A pagare a B per t anni una rendita p, conviene di saldarlo oggi interamente, purchè gli venga abbonato lo sconto di r per 1. Con qual somma x potrà far questo saldo? Come nel caso precedente, x dovrà equivalere ad un tal capitale, che impiegato ad r per 1 salga in t anni a quel tanto, a cui monterebbero le rendite anno per anno riscosse da B, e immedia-

tamente da esso impiegate: cioè se lo sconto è semplice ad $s=\frac{1}{2}pt(2+r(t-1))$ (479), se è composto ad $s=\frac{p(q^t-1)}{r}$ (481). Sostituiti dunque questi valori in luogo di s nelle formule $p=\frac{s}{1+rt}$ nel primo caso, e $p=\frac{s}{q^t}$ nel secondo, avremo per la cercata somma, se si tratti di frutto semplice $x=\frac{pt(2+r(t-1))}{2(1+rt)}$, se di composto $x=\frac{p(q^t-1)}{r(1+r)^t}$.

486. *A* vende a *B* un appezzamento boschivo, dal quale ogni t anni, alla ricorrenza del taglio, si ritraggono scudi s. Supponendo scorsi anni t_1 dal taglio ultimo, si domanda il valore attuale dell'appezzamento, valutato lo sconto semplice di r per 1.

Il legname in essere è un capitale che diverrà s in capo al tempo $t-t_1$: dunque oggi vale (484) $p=\frac{s}{1+r(t-t_1)}$. Il suolo sarà dopo il taglio un capitale che in t anni renderà il frutto s, e che perciò a quell'epoca varrà $p_1=\frac{s}{rt}$: ma oggi non costa che un capitale p_2 tale da divenir p_1 tra sorte e frutti negli anni $t-t_1$ che mancano al taglio. Sarà dunque l'attual prezzo del suolo $p_2=\frac{p_1}{1+r(t-t_1)}$ (484) $=\frac{s}{rt(1+r(t-t_1))}$; onde per il valor totale dell'appezzamento avremo $p+p_2=\frac{s(1+rt)}{rt(1+r(t-t_1))}$. Che se lo sconto debba esser composto, come in questi casi è più naturale e più conforme all'uso, avremo allora $p=\frac{s}{q^{t-t_1}}$, $p_1=\frac{s}{q^t-1}$, $p_2=\frac{s}{q^{t-t_1}(q^t-1)}$, $p+p_2=\frac{sq^{t_1}}{q^t-1}$ (480).

487. *Annualità.* Data al frutto semplice di r per 1 una sorte p, risolvo di consumare in t anni e sorte e frutti, ritirando annualmente un'egual somma x. Cerco x. Al termine del 1°. anno il mio credito è (481) $p(1+r)$, da cui tolta x, resta fruttifera per il 2°. anno la sorte $p(1+r)-x$. Questa al termine del nuovo anno diviene (481) $s=(p(1+r)-x)(1+r)=p(1+r)^2-x(1+r)$, e tolta x resta fruttifera per tutto il 3°. anno la sorte $p(1+r)^2-x(1+r)-x$. Al termine di questo la nuova sorte

diviene $(p(1+r)^2-x(1+r)-x)(1+r)=p(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)$, e tolta x resta per il 4°. anno $p(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$. Così continuando si troverà per l'anno 5°. $p(1+r)^4-x(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$, per il 6°. $p(1+r)^5-x(1+r)^4-x(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$, e per l'anno $t+1$ in generale $p(1+r)^t-x(1+r)^{t-1}-x(1+r)^{t-2}$—ec. $-x$, ove tutti i termini negativi formano una progressione geometrica decrescente (360), in cui abbiamo $a=x(1+r)^{t-1}$, $\omega=\ldots x$, $q=\frac{1}{1+r}$. La somma di questi termini sarà dunque $s=\frac{x}{r}\times((1+r)^t-1)$, e quindi per la sorte residua al principiar dell'anno $t+1$, avremo $p(1+r)^t-\frac{x}{r}((1+r)^t-1)$, che dovendo per condizione essere zero, darà $x=\frac{pr(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$. E quì pure come in tutte le formule precedenti date tre delle quattro quantità p, r, t, x potrà aversi la quarta. Ecco un esempio in cui l'incognita è t.

Per qual tempo t deve cedersi una rendita a di scudi $262\frac{1}{3}$, onde estinguere un debito p di scudi $2693\frac{7}{8}$, valutato il frutto semplice a $5\frac{1}{3}$ per 100?

Avremo $x=a=\frac{787}{3}$, $p=\frac{21551}{8}$, $r=\frac{4}{75}$, $(1+r)^t=\frac{a}{a-pr}$, ... $tl(1+r)=la-l(a-pr)$, e $t=\frac{la-l(a-pr)}{l(1+r)}=\frac{0,3445491}{0,0225658}$. Dunque $t=l0,3445491-l0,0225658=1,1838004=l15,2686$, cioè $t=$ anni 15, mesi 3 e giorni 7.

488. Termineremo l'Algebra con alcuni Quesiti, che attesa la loro varia natura, dovranno sciogliersi dai Principianti parte nel primo e parte nel secondo anno dello studio.

I. Ho sottratti l'un dall'altro due numeri, ambedue con cifre eguali, ma differentemente disposte; e tolta una cifra dal resto la somma delle rimanenti è stata 15. Che cifra ho tolta? *Ris.* 3.

II. Presi 5 numeri consecutivi ho moltiplicati i due estremi, ho sommato il prodotto con 4, ho quadruplicata la somma, ho poi diviso due volte per il numero medio, ho raddoppiato l'ultimo quoziente, e infine ho tolta un'unità. Che mi è rimasto? *Ris.* 7.

III. Ho moltiplicato uno stesso numero per 2, poi per 3, e aggiunto 6 al primo prodotto, 8 al secondo, ho tutto sommato insieme e raddoppiato. Rigettate in se-

guito le prime cifre di ciò che ho avuto, e ritenuta l'ultima l'ho divisa per 4. Qual è stato il quoziente? *Ris.* 2.

IV. Decomporre in rotti parziali la frazione $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$. *Ris.* . . . $\frac{1}{6(1-z)^3}+\frac{1}{4(1-z)^2}+\frac{17}{72(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{z+2}{9(1+z+z^2)}$.

V. A chi mi domandò che ora fosse, risposi: tre quarti dell'ore battute son due terzi dell'ore che batteranno. Quali ore erano? *Ris.* 8.

VI. Uno avea 6^l quando ritirò il salario di 5 mesi: due mesi dopo avea già spesi $\frac{3}{4}$ del suo denaro; ma riscosso il salario, si trovò con 99^l. Quanto avea il mese? *Ris.* 30^l.

VII. Una Contadina porta dell'uova al mercato, e ad un primo avventore ne vende la metà più $\frac{1}{2}$; ad un secondo la metà delle rimanenti più $\frac{1}{2}$; ad un terzo la metà delle rimanenti più $\frac{1}{2}$: dopo di che non le ne restarono che 2. Quante ne aveva? *Ris.* 23.

VIII. Un ricco Signore proprietario di 140000 scudi lascia morendo la moglie incinta, e dispone che nascendo un maschio sia erede per i due terzi, e per l'altro terzo la madre; nascendo una femmina, abbia i due terzi la madre, il rimanente la figlia. Accade che nascono insieme un maschio ed una femmina. Come distribuirete l'eredità? *Ris.* Si daranno al maschio 80000 scudi, alla femmina 20000, alla madre 40000.

IX. Dando 3 soldi per uno a dei poveri, mi mancano 9 soldi; ma dandone 2, me ne avanzan 2. Quanti sono i soldi ed i poveri? *Ris.* I soldi son 24 e i poveri 11.

X. L'età a di uno è m^{pla} di quella di suo figlio; tra quanti anni sarà n^{pla}? *Ris.* Tra anni $\frac{a(m-n)}{m(n-1)}$.

XI. C Cacciatore promette a B una somma b per ogni scarica in vano, e B promette a C una somma a per ogni scarica in pieno. Dopo un numero n di scariche o C e B nulla si debbono, o C deve a B una quantità d, o B la deve a C. Trovare in generale le scariche x a vuoto. *Ris.* $x=\frac{an\pm d}{a+b}$.

XII. Diviso un numero x in m ed in $m+1$ parti eguali, i lor prodotti si eguagliano. Cerco x. *Ris.* $x=\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$.

XIII. Con a carte si fanno b monti d'egual numero c di punti, e la prima carta di ciascun monte val 10 se è figura, 1 se è asso, 2 se è due ec., ma l'altre carte del monte vaglion ciascuna un sol punto. Fatti i monti e rese le carte d avanzate, se ne avanzano, si chiede quanti punti x facciano le prime carte di tutti i monti. *Ris.* $x=d+b(c+1)-a$.

XIV. Uno lascia ai nipoti 120000^l, cioè 12000^l a ciascun maschio, e 9000 a

ciascuna femmina. Se avesse lasciate 9000^l ai maschi e 12000 alle femmine, sarebbero avanzate 9000^l. Quanti sono gli uni e l'altre? *Ris.* 7 maschi e 4 femmine.

XV. Con una divisione di Svizzeri, una di Sassoni, una di Fiamminghi, si vuole espugnare una Piazza; il che se riesce vengono promessi ai Soldati rusponi 901, dei quali dovranno averne uno a testa quelli della Compagnia che la prima penetrerà nella breccia, e il resto dovrà distribuirsi per egual porzione a tutti gli altri. Or si trova che se la breccia verrà superata dagli Svizzeri, gli altri avranno $\frac{1}{2}$ ruspone, se dai Sassoni $\frac{1}{3}$, se dai Fiamminghi $\frac{1}{4}$. A quanto ascendeva la truppa? *Ris.* A 1537 uomini.

XVI. I crediti di 7 persone sommati a 6 a 6 fanno 994, 1036, 840, 910, 896, 952, 882. Qual credito ha ciascuna? *Ris.* Il credito d'una è 91, e di quì gli altri.

XVII. A raddoppia coi suoi i danari di B e di C, quindi B li raddoppia ad A e a C, e poi C ad A e a B, ed in fine ciascuno ha 16^l. Quanto aveano in principio? *Ris.* Suppongo x, y, z; e trovo $z=8$, e di qui x, y.

XVIII. Qual è il numero x le cui potenze $m, m+2$ prese l'una p e l'altra g volte, si eguagliano? *Ris.* $x=\sqrt{p:g}$.

XIX. Son 20 tra uomini e donne in una Locanda, e gli uni e l'altre spendono 24^l; ma ogn'uomo spende 1^l più d'ogni donna. Quanti son gli uni e l'altre? *Ris.* Gli uomini sono 8.

XX. Due Contadine portano insieme 100 polli al mercato: e quantunque ognuna gli venda a differente prezzo, fanno per altro uno stesso guadagno. Se l'una avesse avuti quelli dell'altra, il guadagno della prima sarebbe stato di 15 tolleri, quello della seconda di tolleri 6 $\frac{2}{3}$. Quanti erano i polli? *Ris.* I polli della prima erano 40, quelli della seconda 60.

XXI. Le tre cifre d'un numero son tali che il loro prodotto è 54, la somma dell'estreme divisa per la media è 6, e sottratto 594 dal numero, si hanno le tre cifre stesse in ordine inverso. Che numero è? *Ris.* 923.

XXII. Il Comandante d'una Fortezza assediata scrive al Generale che tante sono le centinaia de'suoi Soldati, quante le unità nella radice positiva dell'equazione $x^4+7x^3-2x^2-18x=28$. Come spiegherete la cifra? *Ris.* I Soldati erano 200.

XXIII. Un vetturale trasportando un caratello di vino ne leva per tre volte dodici fiaschi, ed ogni volta lo riempie con l'acqua. Sospettatosi del furto, e decomposto il fluido vi si trovarono 55 fiaschi di vin puro. Quanti ne conteneva il caratello? *Ris.* $x=86,2228$.

XXIV. Risolver l'equazioni $x^4+6x^2-12x+6=0$, ed $x^4-18x^2+25x+6=0$. *Ris.* I divisori della 1^a. sono $x^2\pm x\sqrt{-6}+\sqrt{-6}$; della 2^a. sono x^2-5x+6 ed x^2+5x+1.

XXV. Trovar per approssimazione una delle tre radici reali dell'equazione $x^3-13x+5=0$. *Ris.* $x=-3,7813$.

XXVI. Con monete di 10 e di 5 paoli in quanti modi può farsi la somma di paoli 405? *Ris.* In 41 modi.

XXVII. Quali sono i numeri multipli di 7 che divisi per 4, 5 e 6, danno 1 di resto. *Ris.* 301, 721, 1141, ec.

XXVIII. È egli possibile di far 19ℓ con monete di 24*sol.*, di 12, e di 6? *Ris.* Impossibile.

XXIX. Correndo 9 di Ciclo Solare e Lunare e 3 d'Indizione, apparve in Cielo una grande e singolar Cometa. Che anno era? *Ris.* Il 1680.

XXX. Trovar due numeri x, y la cui somma sia il quadrato di x^2+y. *Ris.* $x=\frac{Aa}{(A-a)^2+a^2}$; di qui y.

XXXI. Trovar tre numeri interi x, y, z tali che moltiplicandoli a 2 a 2 e aggiungendo b a ciascun prodotto, si abbia sempre un quadrato. *Ris.* Fatto $xy+b=Q$, si troverà $xz+b=(x\mp\sqrt{Q})^2$, $yz+b=(y\mp\sqrt{Q})^2$.

XXXII. Un Viaggiatore osservando le rarità di una Casa illustre di Toscana, s' invaghì di varj Quadri di due diverse Scuole e soprattutto d'uno in Lavagna, opera antica ove è dipinta una Musa. Voleva acquistarli, e ne offeriva in prezzo una Cassetta di fondo quadro piena di zecchini dispostivi in 144 piani; onde essendo le pitture di ciascuna scuola tra 80 e 100, avrebbe dati per ogni pezzo tanti zecchini, quanti erano i pezzi della Scuola respettiva, e tanti per la Musa quanti erano i pezzi delle due Scuole moltiplicati insieme. Determinare quante erano e quanto sarebbero importate le pitture di ciascuna Scuola, quanto veniva a pagarsi la Musa, quanti zecchini erano in ciascun piano della Cassetta, e qual'era la loro somma totale. *Ris.* Chiamate x le pitture della prima Scuola, y quelle della seconda, si avrà $x=4A^2-4Aa-3a^2$, ed $y=8Aa$, e fatto $A=6$, $a=2$, sarà $x=84$, $y=96$, onde il prezzo delle pitture x è di 7056*z*, delle pitture y di 9219*z*, della Musa di 8064*z*, la somma degli zecchini 24336, gli zecchini di ciascun piano 169.

XXXIII. Due corrieri con le celerità m, n partono nel punto stesso, l'uno da Firenze per Livorno, l'altro da Livorno per Firenze, e la distanza tra questi due luoghi è a. Ove s'incontreranno? *Ris.* Sia x la distanza tra Firenze e il punto d'incontro; si avrà $x=\frac{am}{m+n}$.

XXXIV. Un orologio tra le 5 e le 6 ha la lancetta dei minuti su quella dell'ore. Che ora è? *Ris.* Ore 5, 27' $\frac{3}{11}$.

XXXV. Una lepre ha già fatti b passi quando un cane si muove per inseguirla. I passi del cane son più grandi di quelli della lepre nella ragione di $p:q$; ma mentre il cane ne fa m, la lepre ne fa $a+m$. Cerco se il cane raggiungerà la lepre e dopo quanti passi. *Ris.* Dopo passi $x=\frac{bmq}{mp-(a+m)q}$ purchè sia $mp>(a+m)q$. Se $mp=(a+m)q$ il cane e la lepre avranno una stessa velocità, nè potranno giammai raggiungersi in alcun modo. Se $mp<(a+m)q$ la lepre avrà maggior velocità del cane, nè potrà esser raggiunta finchè fugge davanti a lui: ma po-

trebbe all' opposto raggiungere il cane, qualora si ponesse a inseguirlo; di quì il valor negativo che prenderebbe in tal caso l' incognita del Problema.

XXXVI. Un mobile fa miglia 9 nel primo giorno, 8 nel secondo ec.; un altro ne fa nel primo giorno 27, nel secondo 18, ec., ambedue ritardando in progressìon geometrica decrescente. Qual viaggio verrebbero a fare se camminassero perpetuamente? *Ris*. Miglia 81.

XXXVII. Assegnare il numero di primiere che posson farsi coi quattro semi d' un mazzo di 40 carte. *Ris*. Diecimila.

XXXVIII. Svolgere in serie il rotto $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$ e trovarne il termine generale. *Ris*. La serie sarà $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+$ec.; e il termine generale $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})^{n+1}z^n+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})^{n+1}z^n$.

XXXIX. Col mezzo dei logaritmi risolver l'equazioni 1ª. $a^x=b$; 2ª. $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}}=c$;

Ris. 1ª. $x=\frac{Lb}{La}$, 2ª. $x=\frac{Lc-Lb}{mLa-nLb}$.

XL. *A* pose in società il doppio di *B* e di più 5$^{sc.}$: *A* ebbe di guadagno 660$^{sc.}$ e *B* 300. Cerco i capitali e il frutto. *Ris*. Il capitale di *B* è 25$^{sc.}$; il frutto è di 12 per 1.

XLI. *A* Pastore prese un pascolo per lire 400: vi tenne in proprio pecore 40 per mesi 6, inoltre vi ammise *B* con pecore 50 per mesi 4, *C* con pecore 60 per mesi 3; ed infine ne ritrasse di soprappiù lire 100 di fieno. Domando quanto dovrà pagare ciascuno di sua porzione. *Ris*. *A* lire 116,129; *B* lire 96,7742; *C* lire 87,0968.

XLII. A qual frutto m dovrà impiegarsi un capitale qualunque p perchè nell' ipotesi d'interesse composto in anni 10 divenga $2p$. *Ris*. al 7 $\frac{1}{5}$ per 100.

XLIII. Due cannelle empiono separatamente una vasca nei tempi t_1 t_2, e due altre la vuotano nei tempi T_1, T_2. Supponendole tutte contemporaneamente in azione in qual tempo T sarà ripiena la vasca? *Ris*. $T=1:\left(\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}-\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right)$.

XLIV. Rilascio al frutto composto di r per 1 una pensione annua p che mi è dovuta, fin dal giorno d'oggi. Qual sarà il mio credito dopo anni t? *Ris*. $x=\frac{pq(q^t-1)}{q-1}$.

XLV. Un debitore in vece di pr paga ogni anno la somma $s<pr$. Nell'ipotesi dell'interesse composto di qual somma x sarà debitore al termine del tempo t? *Ris*. $x=pq^t-\frac{s(q^t-1)}{q-1}$.

XLVI. *A* dovendo a *B* le somme s_1, s_2 allo scader dei tempi t', t'' offre invece un fondo valutato s. A qual tempo t dovrà farne cessione, nell'ipotesi dell' interesse composto? *Ris*. $t=t'+t''+\frac{Ls-L(s_1q^{t''}+s_2q^{t'})}{Lq}$.

ELEMENTI DI GEOMETRIA

La *Geometria* è la scienza che si occupa delle proprietà e della misura dell'estensione. Prende il nome dalla misura dei terreni, a cui forse fu impiegata in principio.

489. Tutti i corpi occupano un'estensione o spazio, nel quale hanno lu go contemporaneamente le tre dimensioni *lunghezza*, *larghezza* e *profondità*. I limiti che determinano questo spazio, e che lo distinguono da un altro comunque maggiore o minore, si chiamano *superficie*, le quali non hanno che le due dimensioni della lunghezza e della larghezza, ossia non si estendono che in questi due sensi. I limiti della superficie si chiamano *linee*, le quali non hanno perciò che la sola dimensione della lunghezza, e si estendono soltanto in un senso: mentre i limiti delle linee si chiamano *punti*, i quali dunque non hanno veruna delle tre dimensioni, nè per conseguenza estensione.

È evidente che, sebbene le tre dimensioni non si trovino in natura giammai disgiunte l'une dall'altre, possiamo bensì considerarle isolate col nostro pensiero. Ciò mirabilmente contribuisce a render più semplice e ordinato lo studio della Geometria, la quale comincia dal considerare la sola lunghezza, cioè le linee, quindi la riunione della lunghezza colla larghezza, ossia la superficie, e finalmente le tre dimensioni riunite insieme, aggregato a cui si dà il nome di *solido*.

PRIMA PARTE

Linee

490. Da un punto A si può andare ad un altro B per un' infinità di linee; la più corta d'ogn'altra, e quella perciò che nel nostro pensiero rappresenta la minore e vera distanza dell'uno all'altro punto, dicesi *linea retta*. Fig. 1.

491. Dunque 1°. *Una sola retta può condursi da* A *a* B; perchè una sola può esser la linea più corta di tutte l'altre, ed una

Fig. 1. sola la minore e vera distanza fra i due punti; qualunque altra che si conducesse fra i medesimi punti si confonderebbe con AB. 2°. I due punti A, B determinano insieme e la *lunghezza* e la *direzione* o posizione della retta AB. Ma quanto alla sola direzione è evidente che resterebbe del pari determinata da due altri punti qualunque C, D presi lungo la retta; come gli stessi punti A,B potrebber determinare la direzione di una retta indefinitamente prolungata al di là di A e di B; onde 3°. *due punti qualunque e a qualsivoglia distanza tra loro bastano a determinar la posizione di una retta*; 4°. e perciò *due rette che abbiano comuni due punti hanno altresì una medesima direzione; se hanno comune un sol punto hanno una direzione diversa*: come all'opposto *se sono in direzione diversa*, cioè *se s'incontrano senza soprapporsi, o se si tagliano, non possono aver più d'un punto comune*.

1. 492. Tre punti A,B,C sono in una medesima retta, qualora quella che unisce i due estremi A, C copra esattamente le due AB, BC che uniscono gli estremi A, C col medio B. In tal caso l'una di queste due non è che un prolungamento dell'altra, e la retta intera AC non è che una delle due prolungata. Onde se una retta AB si concepisca prolungata comunque, unito A con qualsivoglia punto D, preso nella lunghezza totale del prolungamento, la retta AD deve coprire insieme e tutta la retta primitiva AB, e la porzione del prolungamento interposto fra B e D,

1. 493. Se la retta AB dopo esser giunta in B cambi direzione e pieghi in O, l'aggregato delle due rette AB,BO si chiama *retta spezzata*, ed è *maggiore della retta* AO *condotta fra le sue estremità* (490). Ogni altra linea che non è retta, nè composta di rette *spezzate*, come sarebbero ALMOB, AGFEPOB, si chiama *curva*.

3. 494. La più semplice fra tutte le curve, e insieme la più facile a descriversi e la più nota, è la *circolare* BFDCB, quella cioè che la retta AB, movendosi in giro sopra di un piano intorno ad una delle sue estremità A, va successivamente segnando con l'altra B. Intendiamo per *piano* quella superficie su cui

dovunque, e in qualunque senso applicare si voglia una retta, questa poserà con ogni suo punto su quella; ed avvertiamo una volta per sempre che tutte le linee, delle quali avremo occasione di parlare in questa prima parte, si supporranno tracciate sopra uno stesso piano. Fig. 3.

495. Tutta intera la curva circolare chiamasi *circonferenza*; una sua qualunque porzione CEB dicesi *arco*; la retta CB, che riunisce le due estremità dell'arco dicesi *corda* o *sottesa* dell'*arco* CEB, o semplicemente dell'arco CB, ovvero corda che *sottende* l'arco CB; mentre lo stesso arco CB si chiama *arco sotteso* dalla corda CB. Si avverta però che ogni corda CB, oltre l'arco CEB, sottende ancora il resto CDFB della circonferenza, cioè appartiene simultaneamente a due archi; ma quando altro non si dichiari, noi la riferiremo sempre all'arco minore.

496. Ogni retta condotta dalla circonferenza al centro dicesi *raggio*; il raggio prolungato fino alla parte opposta della circonferenza si chiama *diametro*. Infine si chiama *segmento* la superficie compresa fra l'arco e la corda; *settore*, quella fra l'arco e due raggi condotti alle estremità del medesimo; e *circolo* la superficie racchiusa dall'intera circonferenza.

497. Segue evidentemente da ciò 1°. che *tutti i raggi sono eguali alla retta generatrice* AB, *e in conseguenza fra loro*, *siccome son pure eguali fra loro tutti i diametri*, comecchè doppj de'raggi.

2°. *Che tutti i punti di una medesima circonferenza*, *o di circonferenze descritte con raggi eguali*, *sono egualmente distanti dal respettivo loro centro*, perchè ciascuna di queste distanze ha manifestamente per misura il raggio con cui le circonferenze sono state descritte.

3°. Che se si fa girare intorno al centro A il settore ACE, l'arco CE scorrerà con tutto se stesso sulla circonferenza; poichè se ne uscisse al di fuori come in G, o scendesse al di dentro come in L, i raggi AG, AL sarebbero l'uno maggiore, l'altro minore dei raggi AE, AC contro la natura della curva.

4°. *Ad archi eguali* CE, EB *corrispondono corde eguali*; poichè se il settore CAE si fa scorrere in modo che il raggio AC

Fig. 3. cada sul raggio AE, tutto l'arco CE scorrerà sull'arco EB, e atteso l'essergli eguale lo coprirà interamente: dunque il punto E caderà in B, e la corda CE si confonderà totalmente con la corda EB, con la quale avrà allora comuni le due estremità (491.4°).

5°. *A corde maggiori corrispondono archi maggiori, e a corde minori archi minori.* Abbiansi infatti i due archi DK, PQ di cui il primo sia maggior del secondo. Se il minore PQ si faccia scorrere lungo la circonferenza in modo che la sua estremità Q cada sull'estremità D del maggiore, l'altra estremità P caderà in un punto F intermedio fra D e K, e condotto dal centro A ad F il raggio AF, questo dovrà intersecare in un qualche punto I la corda DK. Ciò premesso, si conducano i raggi AK, AD. Avremo (493) $KI+AI>AK$, $ID+IF>DF$, e sommate le due ineguaglianze $KI+AI+IF+ID>DF+AK$. Ma $KI+ID=DK$, ed $AI+IF=AF=AK$ (497.1°); sarà dunque $KD+AK>AK+DF$, e quindi evidentemente $KD>DF$.

6°. *Il diametro* DB *è maggiore della corda qualunque* CB; infatti condotta AC, sarà la spezzata $CAB>CB$ (493): ora $CAB=CA+AB=DB$ (497.1°); dunque $DB>CB$.

7°. *Ogni diametro* DB *divide la circonferenza in due parti eguali*: infatti facendo scorrere la parte superiore DCB sull'inferiore BFD, finchè il punto che è adesso in B cada in D; il punto che è in D, comecchè appartenente al prolungamento della retta AB, dovrà anche allora trovarsi nella direzione di AB, e quindi cadere in B; perciò le due parti della circonferenza si copriranno esattamente.

8°. *L'estremità* B *di una retta* AB *è sempre sulla circonferenza di un circolo che abbia per raggio* AB *e per centro l'altra estremità.* Parimente *le estremità* B, C *di due rette eguali* AB, AC *che partono da uno stesso punto* A *sono sulla circonferenza descritta col centro in* A *e con raggio eguale alle rette date.* Reciprocamente *se più rette eguali partono da un punto stesso* A, *la circonferenza descritta col centro in* A *e con una delle rette per raggio, passa per l'estremità di tutte le altre.* Tutto ciò è chiara conseguenza del modo con cui abbiamo detto generarsi la circonferenza (494).

9°. Infine *le rette che da un punto stesso* C *si conducono sopra una retta* EO *non possono eguagliarsi che a due a due fra di loro*. Infatti sia CF=CG: la circonferenza MFPGM descritta col raggio CG passerà per G ed F (497.8°) e includerà come corda la porzione FG della retta EO. Ora è chiaro che qualunque altra retta differente da CF e CG, che da C si conduca sopra EO, o caderà sulla corda come CK, e allora non raggiungendo la circonferenza sarà dunque minore di CF e di CG, o caderà al di fuori della corda come CE, e allora oltrepasserà la ciconferenza, e sarà dunque maggiore del raggio, e quindi di CF e di CG. Fig. 12.

498. La misura di una retta qualunque si ha cercando quante volte la sua lunghezza A contiene una lunghezza nota B, che si prende per *unità di misura* o di confronto. Il rapporto di due rette fra loro corrisponde a quello dei numeri, esprimenti le quantità delle volte che l'una e l'altra contengono la comune misura. Può anche ottenersi con un metodo analogo a quello già dato per il massimo comun divisore (58), cioè togliendo quante volte è possibile la minore B dalla maggiore A, togliendo nel modo stesso il resto R_1 della maggiore dalla minore B, togliendo egualmente il nuovo resto R_2 dal resto R_1, e così continuando; quello dei resti che sarà contenuto esattamente nel precedente, preso per unità di misura, darà il rapporto cercato (*ivi*). Che se niun resto soddisfaccia alla supposta condizione, le due rette saranno *incommensurabili* fra loro. In qualunque maniera, si posson sempre rappresentar le linee o le loro lunghezze con numeri o segni astratti, e quindi assoggettarle alle ordinarie regole del calcolo numerico e algebrico.

Ben è vero però che anche indipendentemente da questa considerazione le linee rette si *sommano*, il che si fa intestando l'una con l'altra lungo il prolungamento d'una qualunque di esse, si *sottraggono* diminuendo la lunghezza della maggiore d'una quantità eguale alla lunghezza della minore. Si moltiplicano in oltre e si dividon l'una per l'altra; il che come debba intendersi e come eseguirsi lo vedremo nella seconda parte. Anche gli archi d'uno stesso circolo si sommano e si sottraggono come le rette.

Fig. 1. e 2. 499. Se oltre i due punti A, B, per i quali si stende la retta AB, si abbia un terzo punto C che cada o sopra AB o nel suo prolungamento, le rette AB, AC, l'una delle quali resta in tal caso coperta interamente dall'altra, si dicono *coincidenti*.

4. 500. Ma se C è fuori di AB o del di lei prolungamento, le rette AB,AC si dicono *inclinate* fra loro. La quantità della loro inclinazione, rappresentata dall'apertura BAC, si chiama *angolo*, che è tanto più grande o più piccolo, quanto le due rette più o men si scostano dalla coincidenza.

501. Il punto A comune alle due rette AB, AC, o dove queste rette s'incontrano, chiamasi *vertice* dell'angolo BAC, o CAB. Le due rette AB, AC, che incontrandosi in A formano l'angolo, si chiamano *lati*. Ed è evidente che i lati possono esser maggiori o minori, posson prolungarsi o diminuirsi, senza che l'angolo divenga per questo maggiore o minore. Onde *l'ampiezza di un angolo non dipende dalla lunghezza dei lati*, ma bensì dalla loro situazione relativa, o dal senso in cui l'uno e l'altro è diretto. Nominando, siccome abbiam fatto, l'angolo con tre lettere si deve porre nel mezzo quella del vertice. Talvolta però lo indicheremo con la sola del vertice, specialmente se questo appartenga ad un angolo solo, il che come vedremo non sempre accade.

4. e 6. 502. Se due angoli BAC,EDF si soprappongano in modo che l'un vertice A cada sull'altro D, e uno dei lati AB del primo sopra uno dei lati DE del secondo, qualora anche l'altro lato AC cada sull'altro lato DF, i due angoli saranno *eguali*: e all'opposto se sono eguali debbon poter soprapporsi nel modo suddetto.

4. e 7. 503. Se uno dei due lati, come per esempio il lato AB, si prolunghi comunque al di là del vertice in D, nascerà un nuovo angolo DAC. Se questo è uguale all'altro BAC, i due angoli si dicono *retti*, e la retta CA dicesi *perpendicolare* o *normale* a DB. Se l'uno dei due angoli è maggior dell'altro, la retta CA dicesi *obliqua*, il maggior dei due angoli si chiama *ottuso*, l'altro *acuto*: ed è intanto evidente che comunque dif-

feriscano tra loro, la somma ne è peraltro costante ed eguale a due retti. Infatti se s' immagini la normale AH, alzata dal comun vertice A, avremo DAC=DAH+HAC, CAB=BAH—HAC, onde sommando, DAC+CAB=DAH+BAH=2DAH=2BAH. La quantità angolare HAC, di cui l'angolo acuto CAB differisce dall'angolo retto BAH, si chiama *complemento* dell'angolo CAB. Quella di cui ciascuno dei due angoli DAC, CAB differisce dalla somma di due retti, si chiama *supplemento*: onde ognuno dei due è supplemento dell' altro. Fig. 4.

504. Frattanto nasce da queste definizioni: 1°. *Che sopra uno stesso punto di una retta* DB *non può elevarsi che una sola normale*. Infatti supposta una seconda normale GA, avremo GAD=GAB, cioè DAH+GAH=HAB—GAH, ovvero DAH+GAH=DAH—GAH, assurdo evidente, qualora non sia GAH=o, cioè l'angolo delle due normali nullo, e l'una coincidente affatto esattamente con l'altra. 2°. *Che tutti gli angoli retti sono eguali*. Infatti supposte AC, AH respettivamente normali sopra le due rette DB, se queste s'immaginino soprapposte l'una sull'altra in modo che il punto A dell' una cada sul punto A dell' altra, le normali dovranno esse pure soprapporsi e insieme confondersi, non potendo da uno stesso punto elevarsi più d'una normale. Dunque gli angoli retti che l'una e l' altra fanno con le rette sulle quali s'inalzano sono eguali. 3°. *Che due angoli acuti con lo stesso complemento, o due angoli qualunque con lo stesso supplemento sono eguali*. 4°. *Che i supplementi o complementi d' uno stesso angolo o d' angoli eguali, sono eguali*. 4. e 7.

505. Se oltre la retta CA, cada sullo stesso punto A un'altra obliqua GA, la somma dei due angoli DAG, GAC sarà eguale a DAC: e quindi quella dei tre DAG, GAC, CAB sarà, come sopra (503), eguale a due retti: in generale *la somma di tutti gli angoli che un numero qualunque di oblique concorrenti in uno stesso punto di una retta data formano con la retta e fra loro, è sempre eguale alla somma di due angoli retti*. 4.

506. Se due rette DB, CE si tagliano in A, avremo intorno al punto comune d'intersezione i quattro angoli CAB, CAD,

Fig. 4. DAE, EAB: il primo e terzo dei quali son supplementi dello stesso angolo CAD (503), il secondo e quarto lo sono di CAB. Dunque (504.4°) CAB=DAE, e CAD=EAB. Or tanto quelli che questi, avendo un comun vertice e lati in opposta direzione, si chiamano *angoli opposti al vertice*.

Perciò 1°. *se due rette si tagliano, gli angoli opposti al*
7. *vertice sono eguali*. Dunque se gli angoli CAB, CAD saran retti, retti pure saranno DAE, EAB: onde 2°. *se una retta* CE *sia normale ad un' altra* DB, *anche* DB *sarà normale a* CE. Infine 3°. *se in* A *punto d'incontro della normale* CA *con la retta* DB, *si conduca al di sotto di* DB *una nuova normale* AE, *questa sarà nel prolungamento* AE *di* CA, *cioè formerà con* CA *una sola e medesima retta* CE. Infatti anche BA è normale a CE, dunque ogni altra normale in A al di sotto di DB deve confondersi con AE (504.1°).

507. Se DB sia tagliata in A da un numero qualunque di rette, la somma di tutti gli angoli inferiori sarà, come quella dei superiori (505), eguale a due retti. Quindi *la somma totale degli angoli compresi fra un numero qualunque di rette che si tagliano in uno stesso punto, equivale a quella di quattro angoli retti*.

4. 508. Se nel dato angolo BAC si uniscano con una retta BC due punti qualunque B, C dei lati AB, AC, lo spazio compreso fra le tre rette AB, AC, BC si chiama *triangolo*. Le tre rette AB, AC, BC ne sono i *lati*, i tre punti A, B, C ne sono i *vertici*. E se da uno dei tre vertici s' immagini scender normalmente sul lato opposto o sul di lui prolungamento una retta, questa si chiama *altezza* del triangolo, e il lato su cui cade si chiama *base*.

Il triangolo è *rettangolo* se uno degli angoli è retto, *ottusiangolo* se è ottuso, *acuziangolo* se tutti gli angoli sono acuti. È poi *equilatero* se ha eguali tutti i suoi lati, *isoscele* o *equicrure* se ne ha due, *scaleno* se gli ha tutti ineguali. Nel triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto dicesi *ipotenusa*; gli altri due, *lati obliqui* o *cateti*. Nel triangolo isoscele si dà più specialmente il nome di base a quello dei tre lati che è differente dagli altri due; e si chiama *vertice del triangolo*, il vertice dell'angolo opposto.

509. Due triangoli ABC, *dbf* si dicono *simili* se hanno tutti gli angoli respettivamente eguali, cioè se ABC=*dbf*, BAC =*bdf*, ACB=*dfb*, nel qual caso i lati che nell'uno e nell'altro sono respettivamente opposti agli angoli eguali, prendono il nome di lati *omologhi*.

Fig. 4. e 5.

510. Due triangoli ABC, DEF si dicono *eguali* se posson soprapporsi in modo che i tre vertici dell'uno coincidano esattamente con quelli dell'altro; o che tanto l'uno che l'altro si coprano interamente. Essi perciò lo sono:

4. e 6

1°. *Se coi due lati* AB,BC *respettivamente eguali ai due lati* DE, EF *abbiano eguali anche i due angoli* ABC, DEF *compresi tra questi lati*. Infatti se AB, DE sono eguali, DE potrà soprapporsi ad AB in modo che D cada in A,E in B. In tal caso siccome i due angoli ABC,DEF sono eguali, EF prenderà la direzione di BC (502), e poichè EF=BC, così F caderà in C, e tutto il lato EF coprirà esattamente BC. Le due estremità D,F di DF si troveranno dunque sulle due A,C di AC: e perciò anche DF si confonderà con AC (491. 1°); tutti e tre i lati del triangolo DEF si confonderanno coi tre lati del triangolo ABC, e quindi DEF coinciderà esattamente con ABC, e l'uno sarà perfettamente eguale all'altro.

2°. *Se hanno un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali*. Sieno infatti AC=DF, BAC=EDF, ACB=DFE: soprapposto l'un triangolo all'altro in modo che il vertice D cada in A, il vertice F in C, il che può sempre farsi per essere AC=DF (491. 1°.), i due lati DE, FE prenderanno necessariamente le direzioni l'uno di AB, l'altro di CB (502), e dovranno dunque incontrarsi ove si incontrano AB e CB, cioè in B; dunque anche il terzo vertice caderà sul terzo vertice, e l'un triangolo sarà esattamente coperto dall'altro.

3°. *Se i tre lati* DE,EF,FD *dell'uno sono respettivamente eguali ai tre lati* AB,BC,AC *dell'altro*. Si descrivano coi centri A,B e raggi AC,BC gli archi *gh lk*, e coi centri D,E e raggi FD,EF gli archi *mn*, *pq*. Dovranno i primi, prolungati se occorra, intersecarsi in C, punto che appartenendo in comune all'estremità delle rette AC,BC deve dunque trovarsi insieme e nella circonferenza

Fig. 4. e 6. descritta col centro A e raggio AC, e in quella descritta col centro in B e raggio BC (497.8°). Per la stessa ragione s'intersecheranno in F gli altri due archi *mn*, *pq*. Or s' immagini il triangolo DEF soprapposto al triangolo ABC in modo che il lato DE cuopra esattamente il suo eguale AB; gli archi *gh*, *mn* che si troveranno avere allora lo stesso centro, e che di più hanno lo stesso raggio, atteso l' essere in ipotesi DF=AC, prolungati quanto bisogni, dovranno confondersi insieme, come l' arco *pq* si confonderà con l' arco *lk*. In tal caso è chiaro che il punto F, comune agli archi *mn*, *pq*, non potrà non cadere sul punto C comune agli archi *gh*, *lk*; e quindi anche adesso tutti i tre vertici coincideranno, e il triangolo EFD coprirà esattamente l' altro a cui è soprapposto.

511. Si noterà 1°. che in ciascuna di queste tre costruzioni *gli angoli eguali si trovano necessariamente opposti ai lati eguali, e reciprocamente*. 2°. Che *i triangoli eguali* dovendo oltre i lati avere anche gli angoli eguali, *sono necessariamente anche simili* (509). 3°. Per *costruire un triangolo con lati eguali a tre date rette*, fatto centro prima sull'una, poi sull' altra estremità di una qualunque di esse, con raggio eguale prima all'una, poi all' altra delle due rimanenti, si descrivano due archi in modo che s' intersechino, il che se non riesca, il triangolo non potrà costruirsi: unito quindi il punto d' intersezione coi due suddetti centri, il triangolo che quindi ne nascerà sarà evidentemente il cercato.

8. 512. Per *condurre sopra una retta* AB *un' obliqua che faccia un angolo eguale ad un angolo dato* FEG, si condurrà tra i lati di questo la retta qualunque FG, e quindi presa sopra AB la porzione AL=EG, si costruirà col metodo precedente un triangolo ALK eguale al triangolo EFG, e l' angolo KAL sarà il cercato.

Perpendicolari

9. 513. *Se* AC *sia normale ad* MN, *e il punto* C *d' incontro sia equidistante dai punti* D, F, *ogni punto* H *di* AC *sarà equidistante dai punti stessi* D, F.

Infatti condotte le oblique HD, HF, i triangoli rettangoli HCD, HCF, che hanno il lato HC comune e i lati DC, CF eguali per condizione, saranno eguali (510. 1°). Dunque saranno eguali altresì le loro respettive ipotenuse HD, HF che misurano la distanza del punto qualunque H ai punti D, F (490). Fig. 9.

514. Reciprocamente *se ogni punto di* AC *sia equidistante dai punti* D,F *la retta* AC *sarà normale ad* MN. Condotte HD, HF, l'equidistanza di D,F da tutti i punti di HC darà $HD=HF$, $CD=CF$. Dunque i triangoli HCF, HCD, che hanno inoltre il lato HC di comune, saranno eguali (510. 3.°). Lo saranno perciò gli angoli HCF, HCD (511. 1.°), e quindi HC normale (503).

515. *Le oblique qualunque* HD, HE *condotte sopra* MN *da uno stesso punto* H *e dalla medesima parte della normale* AC, *sono ineguali*. Prolungata la normale AC al di sotto di MN e presa $CG=CH$ si conducano le oblique GD, GE e si prolunghi GE fino all' incontro in O con HD. Avremo $HE=EG$, $HD=GD$ (513), $HE<EO+HO$ (493), $HE+GE<GE+EO+HO$, ossia $2HE<GO+HO$. Ma si ha $GO<GD+DO$, sarà dunque a più forte ragione $2HE<GD+DO+HO$, ovvero $2HE<GD+HD$, ossia $2HE<2HD$ e quindi $HE<HD$. Di qui

Se AC *è normale ad* MN, *ed un suo punto qualunque* H *è equidistante dai punti* D,F *lo sarà ancora il punto* C, *e quindi ogni altro punto di* AC. Infatti, supponiamo $CD>CF$; vi sarà in CD un altro punto E tale che sia $CE=CF$; in tal caso condotte HE, HF, sarà $HE=HF$ (513); ma in ipotesi $HF=HD$, si avrebbe dunque $HE=HF=HD$, il che per il lemma precedente essendosi mostrato impossibile, il punto E non potrà dunque esser diverso da D; e quindi il punto C, e perciò ogni altro punto di AC (513), dovrà essere equidistante dai punti F,D.

516. *Se i punti* F,D *sull'indefinita* MN *sieno equidistanti da un punto qualunque* A *fuori della stessa retta* MN, A *sarà nel prolungamento della normale alzata sulla metà* C *di* FD. Condotte AD, AC, AF i triangoli DCA, FCA saranno eguali (510. 3.°); eguali gli angoli DCA, FCA (511. 1.°) e quindi AC normale a DF in C (503); ma da C non può elevarsi che una sola normale (504. 1.°), dunque se una vi se ne alzi, questa si confonderà con CA, e prolungata dovrà passare per A.

Fig. 9. 517. *Se ciascuno dei due punti* A,H *sia equidistante da due* D,F *presi sulla retta* MN, 1.° *la retta condotta per* AH, *e prolungata fino all'incontro in* C *con* MN *sarà normale ad* MN; 2.° *tutti gli altri punti di* AH *saranno equidistanti da* D, F; 3.° *la retta stessa da* D *a* F *sarà divisa in mezzo in* C. Infatti condotte AD, AF, HD, HF, i triangoli ADH, HFA saranno eguali (510. 3.°) e lo saranno perciò gli angoli di DAH, HAF (511. 1.°). Dunque saranno eguali altresì i triangoli DAC, CAF (510. 1.°), e quindi anche gli angoli DCA, ACF (511. 1.°), e AC sarà normale (503), e perciò tutti i suoi punti saranno equidistanti da D,F (515), dunque lo sarà anche C, e perciò DC=CF.

518. Di qui 1.° *una sola normale* AC *può abbassarsi sopra una retta* MN *da un punto* A *preso al di fuori della medesima.* Poichè condotte le oblique eguali AD, AF, la normale che scende da A deve cadere in C sulla metà di DF (517. 3.°); e come per i punti A,C non può condursi più di una retta (491. 1.°), così non potrà scendere sopra DF più di una normale dal punto A. D'onde si ha pure che *due rette normali ad una terza non possono aver comune alcun punto; e prolungate quanto si voglia non s'incontreranno giammai.*

10. 2.° *Due triangoli* ABC, DEF *rettangoli l'uno in* B, *l'altro in* E, *che abbiano eguali l'ipotenuse ed uno degli altri due angoli, saranno eguali.* Sieno A,D i vertici degli angoli eguali; soprapposte le ipotenuse in modo che D cada in A, e perciò F in C, il lato DE prenderà la direzione di AB (502), ed FE scenderà normalmente sopra AB dallo stesso punto C da cui vi scende CB; dunque esso pure si confonderà con CB (518. 1.°).

3.° *Gli stessi triangoli saranno eguali se abbiano eguali l'ipotenusa ed un lato.* Sieno AB, DE i lati eguali: prolungo CB, prendo BH=EF e conduco AH. I triangoli ABH, DEF saranno eguali (510. 1.°), e daranno AH=DF=AC. Ma AB è normale ad HC, dunque (515) BC=BH=FE; cioè i triangoli ABC, DEF oltre le ipotenuse AC, FD e i lati AB, DE avranno eguali anche i lati BC, FE, e perciò saranno eguali (510. 3.°).

Fig. 9. 519. *La normale* AC *è più corta di qualunque obliqua* AD, *che dal punto stesso* A *vada a cadere sulla stessa retta* MN.

Prolungata AC al di sotto di DF fino in B, tanto che sia CB= AC, e condotta quindi DB, sarà DC normale ad AB (506.2°), e perciò (513) AD=DB, onde la totale spezzata BDA sarà doppia di AD, come AB è doppia di CA. Ma $AB<BDA$ (493), dunque $2AC<2DA$, e quindi $AC<DA$. Perciò *la normale* AC *misura la distanza di un punto* A *ad una retta* DF. Sciogliamo alcuni Problemi. Fig. 9.

520 I. *Dividere in mezzo la data retta* DC. Coi centri D,C e col raggio stesso DC descrivo quattro archi che a due a due si seghino in G, H; la retta GH condotta per G,H dividerà in mezzo DC. Poichè condotti i raggi DG,DH,CG,CH, sarà DC= DG=DH=CG=CH, e i punti G, H saranno equidistanti da D,C: lo sarà dunque anche il punto F(517.2°) e però DF=FC. 11.

II. *Da un dato punto* G *fuori d' una retta* AB *condur sopra di essa una normale.* Preso per centro G e per raggio un' obliqua qualunque GD, taglio in due punti D,C con due piccoli archi *mn,pq* la retta AB. Quindi con lo stesso o con altro opportuno raggio e coi centri D,C descrivo al di sotto di AB due nuovi archi in modo che fra loro si seghino in qualche punto H; unisco in fine G con H, e sarà GH la normale cercata. Infatti i due punti G,H sono equidistanti da D,C, il primo come centro comune degli archi *mn,pq* (497. 1°.), l' altro come spettante a due archi descritti con raggio eguale e coi centri D,C (*ivi*). Dunque GH è normale ad AB (517. 1°).

III. *Da un punto* F *dato nella retta* AB *alzar sopra di essa una normale.* Presa FD=FC, e coi centri D,C e col raggio stesso DC descritti due archi che si seghino in G, unisco G con F, e sarà FG la normale richiesta. Infatti i due punti F,G sono equidistanti dai due D,C il primo per costruzione, l'altro come spettante a due archi descritti con raggio eguale e coi centri D,C; dunque FG è normale ad AB (517.1°).

Perpendicolari nel Circolo

521. *Se dal centro* C, *oltre i raggi* CF,CG *si conduca sulla corda* FG *il raggio normale* CM, *esso dividerà in mez-* 12.

Fig. 12. zo *la corda* FG, *l' arco sotteso* FMG, *e l' angolo contenuto* FCG. Conduco le corde FM, GM, sarà C equidistante dai punti F,G (497. 2°); ma di più CD è in ipotesi normale ad FG; dunque anche i punti D,M saranno equidistanti da F,G (515), onde DF=DG, MF=MG; *arc.* MIF=*arc.* MLG (497. 4°), ed *ang.* FCM=*ang.* GCM, attesa l'eguaglianza dei triangoli FCM, GCM (510.3°).

522. Reciprocamente, *se la corda* FG *è divisa in mezzo dal raggio* CM, *esso sarà normale ad* FG, *e dividerà in mezzo l' arco* FMG *e l' angolo* FCG. Infatti i due punti C,D sono equidistanti dai due F,G, il primo come centro, l' altro per condizione; lo è dunque ancheM (517.2°); dunque MF=MG, MIF =MLG, e, come sopra, *ang.* FCM=*ang.* GCM.

523. Nel modo stesso si prova che *se l' arco* FMG *o l' angolo* FCG *è diviso in mezzo dal raggio* CM, *questo è normale ad* FG, *e divide in mezzo* FG, *e l' angolo* FCG *o l' arco* FMG. Si noti che in ciascuno di questi casi la divisione dell' arco o dell' angolo in due parti eguali, porta sempre la divisione in parti eguali anche dell' angolo o dell' arco; perciò *angoli eguali e col vertice al centro, comprendono in uno stesso circolo archi eguali*, e reciprocamente *archi eguali son compresi da angoli eguali col vertice al centro*.

524. Infine *se la corda* FG *sia divisa in mezzo dalla normale* MD, *questa prolungata passerà per il centro* C. Infatti i punti F,G sono equidistanti da D per condizione, e da C come spettanti alla circonferenza descritta col centro in C (497.2°). Dunque C è nel prolungamento della normale alzata sul punto D (516).

525. Il triangolo FCG coi lati FC,CG eguali e qualunque, può rappresentar qualsivoglia triangolo isoscele: C ne è il vertice, FG la base. Concluderemo dunque dal fin quì detto. 1°. Che *la normale calata dal vertice di un triangolo isoscele sulla base divide in mezzo la base e l' angolo al vertice*. 2°. Che *una retta condotta dal vertice di un triangolo isoscele sulla metà della base è normale alla base*, *e divide in mezzo l' angolo al vertice*. 3°. Che i triangoli eguali CDF,

CDG danno eguali gli angoli CFD, CGD opposti al comun lato CD (511. 1°): dunque 4°. *nel triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali*, e reciprocamente *se un triangolo abbia due angoli eguali, avrà eguali anche i lati opposti e sarà isoscele*; come dimostreremo in appresso

Fig. 12.

526. Che se anche FG sia eguale agli altri due lati FC,CG, cioè il triangolo FCG si supponga equilatero (508), nel modo stesso col quale abbiam dimostrato l'angolo CFG eguale all'angolo CGF, potremo dimostrarlo eguale all'angolo FCG, prendendo per vertice G e per base FC. Dunque *se un triangolo sia equilatero, oltre i tre lati, avrà i tre angoli eguali*, e all'opposto *se un triangolo abbia tre angoli eguali avrà eguali anche i tre lati, ovvero sarà equilatero.*

527. Ripreso il triangolo isoscele FCG (525), si conduca dal vertice C sulla base FG o sul prolungamento di essa l'obliqua CE. Non potendo essere CE=CG (497.9°), il triangolo CEG o non sarà isoscele (525.4°), o non avrà per base GE, nè per conseguenza si avrà CEG=CGE, e quindi neppure CFG=CEG. Perciò *se da uno stesso punto* C *e da una medesima parte della normale* CD *cadano sopra* EG *due o più oblique* CE,CF, *gli angoli di queste con la retta* FG *saranno tutti ineguali*; e *se gli angoli* CFG, CEG *saranno eguali, le oblique non potranno cadere da un medesimo punto*; non avranno dunque alcun punto comune, e prolungate non s'incontreranno giammai: il che si era già veduto vero nel caso di due normali (518. 1°).

528. *Se due circonferenze* GMFK,FLIK *si taglino* la retta AC che unisce i loro centri passerà per la metà della corda FK, che unisce i loro punti d'intersezione. Infatti la retta AC ha i punti A,C respettivamente equidistanti dalle estremità K,F della corda FK (497.2°): dunque divide in mezzo la corda (517).

15.

529. *Due corde eguali nel medesimo circolo sono ad egual distanza dal centro.* Infatti sia la corda AP eguale alla corda FG; condotte sull'una e sull'altra le normali CQ, CD, ed i raggi CA, CF, i triangoli rettangoli ACQ, FCD nei quali AC =FC, ed AQ=$\frac{1}{2}$AP (521)=$\frac{1}{2}$FG=FD saranno eguali (518.3°)

12.

Fig. 12. e perciò saranno eguali le CQ, CD che misurano la distanza del centro C alle due corde (519).

530. *Di due corde ineguali la minore è la più distante dal centro.* Sia FG la corda maggiore, e si supponga FM eguale alla minore; sarà l' arco FM minore dell' arco FMG(497.5°) e quindi tutta la corda FM rimarrà al di sotto della corda FG. Condotta sopra FM la normale CS, sia K il punto dove questa attraversa FG, sarà CK obliqua sopra FG (518.1°), ed avremo CK>CD (519), e a più forte ragione CS>CD, cioè la distanza della corda minore al centro supererà la distanza della maggiore. Passiamo adesso a risolvere qualche Problema.

11. 531. I. *Dividere in mezzo un angolo* DGC *o un arco* DMC. Condotta e divisa in mezzo la corda DC, il raggio normale GM dividerà in mezzo l'angolo DGC e l'arco DMC (521). Dividendo nel modo stesso l' angolo DGM, e poi la sua metà ec., si avrà un quarto, un ottavo ec. dell'angolo DGC; onde col metodo precedente potrà anche dividersi un angolo in 4, 8, 16, ec. parti eguali.

13. 532. II. *Raddoppiare un angolo dato* CBA. Col centro B e raggio qualunque BA, descrivo l' arco indefinito ACD, e preso EC=CA conduco BE. Poichè BC divide in mezzo l'arco ECA, dividerà altresì in mezzo l' angolo EBA (523): sarà dunque EBA doppio del dato CBA.

Prendendo nel modo stesso una nuova porzione FE=EC, l' angolo FBA sarà triplo di CBA; così potremo averne uno quadruplo, quintuplo, e in generale n^{plo}, purchè n sia razionale.

14. 533. III. *Descrivere una circonferenza che passi per due dati punti, o che abbia per corda una data retta* BD. Alzata sulla metà di BD la normale indefinita GI, e preso per centro un qualunque punto C di questa normale, la circonferenza descritta col raggio CB passerà evidentemente (497. 8°.) anche per D ed avrà per corda BD. Il Problema ha dunque infinite soluzioni.

534. IV. *Far passare una circonferenza per tre dati punti* A, B, D *non posti in linea retta.* Condotte le rette AB, BD, se si dividano in mezzo con le normali FL, GI (520.I), la circonferenza descritta col centro in C, punto d'intersezione delle nor-

mali, e col raggio CA avrà per corde AB,BD(533), dunque passerà per i tre punti A,B,D. Fig. 14

535. E poichè uno solo è il punto ove possono incontrarsi le normali FL, GI, e che determina il centro del circolo cercato, e tutte eguali sono le distanze di questo punto da qualunque dei tre punti dati, così una sola potrà esser la circonferenza che può farsi passare per i medesimi. Perciò 1°. *due circonferenze non possono aver comuni più di due punti*; se ne avessero tre coinciderebbero. 2°. *Tre punti non posti in linea retta determinano la posizione e l' ampiezza di un circolo*; perchè quando è assegnato il centro ed il raggio, il circolo è manifestamente dato, sì di posizione che di grandezza.

536. V. *Trovare il centro d' un circolo o d' un arco.* Presi sul circolo o sull' arco tre punti, condotte fra loro due corde, e divisele in mezzo con due normali, il punto del loro incontro sarà il centro cercato (534).

Tangenti

537. Una retta MT di lunghezza indefinita, che ha un sol punto M comune con la circonferenza FMG si chiama *tangente*, e il punto comune M si chiama *punto di contatto*. 15.

538. I *Se* MT *sia tangente in* M, *il raggio* CM *sarà normale ad* MT. Infatti ogni punto H di MT diverso da M dovendo per natura della tangente esser fuori della circonferenza, il raggio CM sarà più corto d'ogni altra retta CH, che da C scenda sopra MT; dunque sarà normale ad MT (519).

II. Reciprocamente, *se il raggio* CM *sia normale alla retta* MT, *sarà* MT *tangente in* M. Perchè CM normale è più corta d'ogn' altra CH che da C scenda sopra MT (519); dunque tutti i punti H di MT son fuori del circolo meno che M; dunque MT è tangente in M.

539. Quindi se voglio una tangente al punto M d' una circonferenza, conduco ad M il raggio CM, lo prolungo al di fuori della circonferenza, e quindi alzo in M la normale MT (520.III) che sarà la tangente cercata.

540. *Se due o più circonferenze si tocchino in un punto o al di* 16.

Fig. 16. *fuori o al di dentro, la retta che passa per i centri, passa anche per il punto di contatto.* Poichè la stessa tangente MT è normale ai raggi CM, AM; questi dunque formano una sola retta CA=CM+MA nel 1° caso, e CA=CM—MA nel 2° (506. 3°).

17. 541. In qualunque triangolo ABC può *iscriversi* un circolo, che ne tocchi cioè, o abbia per tangenti tutti i lati. Divisi in mezzo i due angoli A,B con le rette AF, BF, e condotte dal punto F ove queste si tagliano le normali FE, FD, FG sopra i tre lati, i triangoli BFG e BFE, AFE ed AFD saranno respettivamente eguali fra loro (518. 2°); dunque FG=FE=FD, ed il circolo descritto col raggio FG passerà per G, E, D (497. 8°), ove (538. II.) toccherà i tre lati BC, AB, AC, normali per costruzione ai raggi FG, FE, FD.

542. Si avrà pure AE=AD, DC=GC, BG=BE: e fatti $BC=g$, $CA=g'$, $AB=g''$, e il *semiperimetro* o semisomma dei lati del triangolo $\frac{g+g'+g''}{2}=q$, sarà $q=AC+BG=AB+DC=BC+AE$; onde $BG=q=g'=\frac{g+g''-g'}{2}$, $DC=q-g''=\frac{g+g'-g''}{2}$, $AE=q-g=\frac{g'+g''-g}{2}$: espressioni di cui faremo qualche uso in appresso.

Parallele

18. 543. Due rette si dicono *parallele*, allorchè non hanno alcun punto comune nè in tutta la loro lunghezza, nè in tutto il loro prolungamento. Nel caso opposto, considerate per la parte in cui si accostano al punto comune, si chiamano *convergenti*, considerate per quella in cui se ne scostano si chiamano *divergenti*.

544. Dunque *due normali ad una medesima retta*, o in generale *due oblique egualmente e nello stesso senso inclinate sopra di essa, saranno parallele*: perchè si è veduto che nè l'una nè l'altra, comunque si prolunghino, non possono mai incontrarsi, nè aver comune alcun punto (518. 1° e 527).

545. Al contrario *una normale e un' obliqua*, o *due oblique disegualmente inclinate sopra di una retta, non possono esser parallele, e prolungate al di sopra o al di sotto s' incontreranno.* Supposte AB, CD due oblique ad AH, si conducano

AE, AS in modo che sia l'angolo EAH eguale all'angolo DCH (512), e l'angolo EAS maggiore di EAH, e tale che contenga un numero esatto n di volte l'angolo EAB (532). Quindi preso sull'indefinita AH un numero $n-1$ d'intervalli CF, FG, GH, ec. tutti eguali fra loro e ad AC, si alzino FI, GL, HM, ec., le quali tutte facciano con AH angoli eguali ad EAH. È chiaro, 1.° che le rette AE, CD, FI, ec. saranno tutte parallele (544). 2°. Che gli n spazi indefiniti EACD, DCFI, ec. saranno tutti eguali fra loro, e ciascuno sarà la parte n^{sima} dello spazio totale indefinito, steso fra la prima ed ultima parallela. 3°. Infine che questo spazio totale essendo visibilmente minore di tutto quello che giace tra i lati dell'angolo EAS, anche la sua parte n^{sima} EACD, sarà dunque minore dello spazio steso fra l'angolo EAB, parte n^{sima} di EAS: il che non potrebbe accadere, qualora l'obliqua AB non tagliasse l'altra CD. Fig. 18.

546. Perciò *una retta normale ad una delle due parallele sarà normale anche all' altra*; e in generale se le due parallele AB, CD sieno comunque attraversate da una *secante* NQ, dovranno essere eguali gli angoli NFB, NGD, e per conseguenza i loro opposti ed eguali (506. 1°) AFQ, CGQ, i lor supplementi (504.4°) AFN, CGN, e gli eguali ai supplementi, QFB, QGD. 19.

547. Questi angoli a due a due, comecchè situati dalla stessa parte sì rapporto alle parallele che alla secante, si chiamano *corrispondenti*. Si chiamano poi *esterni* quelli al di fuori delle parallele, come NFB, QGD; *interni* quelli al di dentro come FGD, CGF; e *alterni interni, alterni esterni* quei degli interni ed esterni che restano l'uno al di quà, l'altro al di là della secante, come AFG, NGD, e AFN, QGD. Onde non solo gli angoli corrispondenti, *ma ancora gli alterni interni e gli alterni esterni sono respettivamente eguali*. Infatti AFG=NFB =NGD; AFN=QFB=QGD, e nel modo stesso si dimostrerà degli altri.

548. Per *condurre da un punto dato* G *una parallela ad* AB, descrivo con un raggio GF e coi centri G, F gli archi FLM, GA. Prendo FL=GA, e GL condotta per G, L sarà la parallela cercata; poichè gli archi eguali GA, FL danno eguali le

Fig. 19. loro corde AG, FL (497 4°) e quindi anche i triangoli AFG, FGL (510.3°), e i loro angoli AFG, FGL.

20. 549. *Due o più normali*, o più in generale *due o più rette parallele* FG, HI, *comprese fra due parallele* AB, CD, *sono eguali.* Infatti condotta GH gli angoli FHG, HGI alterni interni fra le parallele AB, CD, e gli angoli FGH, GHI alterni interni fra le parallele FG, HI sono eguali (547). Dunque i triangoli GFH, HGI, che hanno inoltre il lato comune GH, sono eguali (510.2°), e perciò FG=HI. Per l'istessa ragione si ha pure FH=GI. Quindi *due parallele conservano una stessa distanza in tutto il loro prolungamento*: altrimenti se differissero le distanze, differirebbero altresì le normali che le misurano (519).

19. 550. Si proverà parimente, conducendo le due normali FH, OP, che sono eguali le due oblique FL, BO, comprese fra le due parallele FB, HD, qualora sieno eguali i due angoli FLD, BOL, o i due LFB, FBO.

12. 551. *Due corde parallele* FG, IL *intercettano due archi eguali* FI, LG; perchè il raggio CM normale ad FG, è normale anche ad IL (546): ora FIM=MLG ed IM=ML (521); dunque FIM—IM=MLG—ML, ovvero FI=GL. Lo stesso sarebbe se una delle parallele fosse tangente.

21. 552. *Due angoli coi lati respettivamente paralleli, se son della stessa specie, cioè o ambedue acuti, o ambedue ottusi,* come BAC, MLN, *si eguagliano; se di specie diversa,* come BAC, NLG, *l'uno è supplemento dell'altro.* Prolungata LM fino all' incontro con AC, il confronto degli angoli alterni interni darà NLD=LDA=BAC. Dunque nel primo caso BAC=NLD; e poichè NLD è supplemento di GLN (503), dunque nel secondo caso lo sarà ancora BAC.

22. 553. *Due angoli* ABC, DEF *della stessa specie, e tali che i lati dell'uno sieno o normali o inclinati ad angolo eguale sul prolungamento dei lati dell'altro, sono eguali.* Si conducano IB, LB parallele a DE, FE. Sarà IBL=DEF, e gli angoli ABI, CBL rappresenteranno le inclinazioni dei lati DE, EF sui lati AB, CB. Dunque ABI=CBL (547); e aggiunto all' uno e all'altro l'angolo IBC, avremo ABC=IBL=DEF.

554. *Due triangoli con tutti i lati paralleli, o con due soli paralleli, e il terzo dell' uno coincidente col terzo dell' altro o col suo prolungamento,* come pure *con tutti i lati dell'uno o normali o egualmente inclinati sui lati dell' altro, son simili*; poichè applicando a ciascuno degli angoli i raziocinj precedenti, gli angoli si troveranno tutti eguali: dunque i triangoli saranno simili (509). Fig. 22.

555. *Se un numero di parallele* DF, IL, AC, ec. *taglia i lati di un angolo* ABC, *tutti i triangoli* BDF, BIL, BAC, ec. *saranno simili*: poichè oltre l' angolo comune B, tutti gli angoli BDF, BIL, BAC, ec., e gli altri BFD, BLI, BCA, ec., sono eguali. 23.

556. E *se di più le parti* BD, ID, AI *di un lato sieno eguali fra loro, saranno eguali fra loro anche le parti* BF, FL, LC *dell' altro*. Infatti condotte DH, IK parallelamente al lato BC, i triangoli DBF, IDH, AIK con le basi BD, ID, AI eguali, e con gli angoli sulle medesime respettivamente eguali (547) saranno eguali (510.2°), e daranno BF=DH=IK. Ma (549) DH=FL, IK=LC, dunque BF=FL=LC. Quindi se il numero delle parallele sia m, e perciò AB contenga m volte BD, anche BC conterrà m volte BF.

557. Di qui si ha il modo di *dividere una data retta* BC *in un numero* m *di parti eguali*, o di trovarne la parte m^{sima}. Si ponga con essa ad angolo un'altra retta indefinita BA, sulla quale si prendano due porzioni una arbitraria BD, l' altra BI$=m\times$BD. Unito I con C, e condotta DE parallela ad IC, sarà BE la parte m^{sima} di BC; poichè come BI$=m\times$BD, anche BC$=m\times$BE (556). 24.

558. *Se il triangolo* bdf *s' immagini posto sul suo simile* ABC *in modo che l' angolo* b *cada sul suo eguale* B, *e i lati* bd, bf *sopra i loro omologhi* BA, BC, *il lato* df, *rappresentato da* DF, *risulterà parallelo al lato* AC. Infatti il triangolo BDF come eguale a *bdf*, è simile ad ABC; dunque *ang.*BDF=*ang.* BAC (509), e quindi DF, AC son parallele (544). 25.

559. Se prolungato in E il lato AC del triangolo ABC, si conduca AD parallela a BC, gli angoli EAD, ACB saranno corrispondenti, e gli angoli DAB, ABC alterni interni. Avremo dunque 26.

Fig. 26. EAD=ACB, DAB=ABC; e quindi EAD+DAB=EAB=ACB+ABC, cioè *l' angolo esterno formato dal prolungamento di uno dei lati di un triangolo, eguaglia la somma dei due angoli interni opposti.*

560. Inoltre sarà EAD+DAB+BAC=ACB+ABC+BAC; cioè *la somma dei tre angoli di un triangolo*, espressa dal secondo membro dell' equazione, *eguaglia quella di due angoli retti*, valore del primo membro (505).

561. Perciò 1°. *Ogni angolo di un triangolo è supplemento della somma degli altri due.* 2°. *Due triangoli con due angoli eguali hanno eguale anche il terzo* (504.3°), *e son simili; e se di più hanno un lato eguale, sono eguali* (510.2°). 3°. *I due angoli sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo son sempre acuti, e l' uno è complemento dell' altro.* 4°. *Due triangoli rettangoli con un angolo acuto eguale son simili.* 5°. *Un triangolo non può aver che un solo angolo retto o ottuso; e due almeno degli angoli son sempre acuti:* altrimenti la somma di tutti oltrepasserebbe quella di due retti.

27. 562. Da quest' ultima proposizione possono intanto dedursi due notabili conseguenze. La I^a. che *la normale calata dal vertice di un triangolo, cadrà al di fuori, se uno degli angoli sulla base sia ottuso* come in ABC, *cadrà al di dentro, se sono ambedue acuti* come in DEF. Poichè se nel primo caso cadesse al di dentro, per esempio in L, e nel secondo al di fuori, per esempio in H, i nuovi triangoli BAL, FEH avrebbero un angolo retto ed uno ottuso. La II^a. che *due*

28. *triangoli* ABC, abc *con due lati* AB, ab, e BC, bc, *e con un angolo* A, a *non contenuto eguali, sono eguali, se l' altr' angolo* C, c *non contenuto sia in ambedue della medesima specie.* Infatti supponiamolo acuto; descritto col lato BC l' arco EC, e sopraposto l' angolo *a* all' angolo A, il lato *bc*, che non potrebbe cadere se non che in BE o in BC (497.8°), caderà in BC in forza dell' essersi supposto acuto l' angolo *c*: onde i due triangoli totalmente coincideranno. Che se si abbiano in vece i due triangoli ABE, *abe* con gli angoli E, *e* ottusi, *be* cade-

rà per la ragione medesima sopra BE; e i triangoli si copriranno nel medesimo modo. Fig.28.

Misura degli angoli

563. Sia ABC un angolo qualunque, fra i lati del quale, col centro in B e con qualsivoglia raggio AB venga descritto l' arco ADC. Immaginando l' angolo suddiviso in un numero m di parti eguali, quanto si voglia piccole, l'arco compreso resterà esso pure diviso in altrettante parti tutte eguali fra loro (523); e se dalla somma di n parti dell' angolo risulti l' angolo parziale DBC, anche l'arco DC compreso fra i lati del nuovo angolo risulterà dalla somma di n parti dell' arco ADC; ed avremo (358) *ang.* ABC : *ang.* DBC :: *arc.* AC : *arc.* DC; cioè *i due angoli saranno come i due archi compresi fra i loro lati*, purchè descritti col medesimo raggio. 29.

564. Che se gli angoli ABC,DBC fossero fra loro incommensurabili, cioè l' uno non potesse supporsi composto di n parti dell' altro, l'analogia precedente sussisterebbe in egual modo. Si supponga infatti che la ragione dei due angoli in luogo di equivalere a quella degli archi AC, DC, equivalga a quella degli archi AC, CE. Qualunque differenza passi fra DC e CE, potremo prender sempre le parti di AC così piccole, che una almeno delle divisioni cada in qualche punto G fra D ed E. In tal caso condotta BG, fra gli angoli ABC, CBG e gli archi compresi AC, CG respettivamente commensurabili, potremo istituir la proporzione (563) ABC : GBC :: AC : GC ; ma in ipotesi ABC : DBC :: AC : CE, si avrebbe dunque (357.3°) GBC : DBC :: GC : CE, proporzione insussistente, perchè se E cade frà C e D, si ha GBC < DBC e GC > CE ; e se cade fra D ed A, si ha GBC > DBC e GC < CE.

565. Or quest' eguaglianza di rapporto fra gli angoli e gli archi, in virtù della quale crescendo o scemando gli uni, crescono o scemano costantemente, e in egual ragione anche gli altri, dà luogo a prender questi per misura di quelli e viceversa. Di quì il principio che *l' angolo ha per misura l' arco*

Fig.29. *compreso fra i suoi lati, e descritto col centro al vertice e con un raggio qualunque*: con che intendiamo dire, che un angolo è tanto maggiore o minore di un altro preso per unità di misura, quanto l'arco compreso fra i lati del primo è maggiore o minore di quello compreso fra i lati del secondo, e descritto col medesimo raggio. E poichè la grandezza degli archi spettanti al medesimo circolo è proporzionale al numero dei gradi (127) che vi son contenuti, potremo sostituire il rapporto numerico di questi gradi al rapporto lineare degli archi, e valutare, come suol farsi, gli angoli in *gradi*. Così diciamo che un angolo è di 30 o di 40 gradi, allorchè tale si trova essere il numero dei gradi contenuti nell'arco compreso. Nè in tal caso è necessario mentovare il raggio: poichè qualunque esso sia, il numero dei gradi non varia, e si mantiene lo stesso per tutti gli archi descritti col centro al vertice, e compresi fra i lati di un medesimo angolo. Infatti
30. si abbiano le due semicirconferenze concentriche CQS, MPR, e si suppongano l, l' le respettive lunghezze lineari dell'arco di un grado nell'una e nell'altra. Condotti i raggi BQ, BD l'uno normale, e l'altro comunque obliquo al diametro SC, e supposti n, n' i numeri dei gradi contenuti negli archi NM, DC, avremo $DC = nl$, $NM = n'l'$; inoltre QDC, PNM saranno metà delle semicirconferenze SQC, RPM (521), e perciò $QDC = 90l$, $PNM = 90l'$. Ma abbiamo (563) QBC : QDC :: DBC : DC, PBM : PNM :: NBM : NM; dunque poichè QBC = PBM, e DBC = NBM (501), perciò QDC : DC : : PNM : NM, cioè $90l : nl :: 90l' : n'l'$, d'onde $n = n'$.

566. Dunque 1°. *l'angolo retto è di* 90°. 2°. *Il supplemento di un angolo di gradi* a è 180°—a, *il complemento* 90°—a (503). 3°. *La somma di tutti gli angoli formati da più linee che si tagliano in un punto, è di* 360° (507). 4°. *La somma degli angoli di un triangolo è di* 180° (560). 5°. *L'angolo del triangolo equilatero è di* 60° (526). 6°. *Ciascuno degli angoli acuti del triangolo rettangolo isoscele è di* 45° (561. 3°). 7°. *Supposto di gradi* a *l'angolo al vertice di un triangolo isoscele qualunque, ciascuno dei due sulla base sarà* $90° - \frac{1}{2}$a.

31. 567. Fin qui il vertice dell'angolo si è supposto nel centro dell'arco che lo misura: nel qual caso l'angolo si chiama *centra-*

le. Ma anche qualora ne sia fuori vi è mezzo di concludere egualmente dall'arco l'ampiezza e valore dell'angolo. Sia da determinarsi l'angolo BAD *del segmento*, fatto dalla tangente AB e dalla corda AD. Condotto al punto A di contatto il raggio CA, e normalmente ad AD il raggio CE, prolungato fino all'incontro della tangente in B, i triangoli rettangoli FAB, CAB (538.I) con l'angolo B comune saranno simili (561.4°), e daranno FAB=ACB=AE (565)=½AED (521). Dunque *l'angolo del segmento ha per misura la metà dell'arco sotteso dalla corda.*

Fig. 31.

568. Voglia determinarsi l'angolo *inscritto* DAK, formato dal concorso di due corde DA, AK sopra uno stesso punto A della circonferenza AFDK. Condotta la tangente AB, si avranno due angoli del segmento BAD, BAK, e sarà DAK=BAK—BAD=(567)½ADK—½AFD=½(ADK—AFD) =½DK; onde *l'angolo inscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra le corde.* E di quì 1°. *L'angolo centrale* DCK *è doppio dell'inscritto appoggiato sullo stesso arco* DK, perchè l'uno è misurato dall'arco intero DK, l'altro dalla metà. 2°. *L'angolo inscritto appoggiato sul diametro è retto*, poichè l'arco compreso è in tal caso la semicirconferenza. 3°. *Tutti gli angoli inscritti appoggiati sullo stesso arco* DK *nel medesimo circolo sono eguali*, comecchè tutti misurati da ½DK. 4°. Fatta passare una circonferenza per i tre vertici di un triangolo (534), i lati diverranno corde su cui saranno inscritti gli angoli opposti, che avranno per misura la metà degli archi sottesi. Or come a maggiori corde corrispondono archi maggiori (497.5°), e a corde eguali archi eguali, così *in ogni triangolo al più grand' angolo è opposto il più gran lato*, e viceversa *ad angoli eguali sono opposti lati eguali* (525.4°). D'onde 5°. *in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa*, comecchè opposta all'angolo retto (508), *è maggiore di ciascuno dei due cateti*, che sono opposti ad angoli acuti (561.3°); 6°. *di due oblique* AB, AC *che da uno stesso punto* A *e da una stessa parte della normale* AD *scendono sopra una medesima retta* DC *quella è maggiore che più si scosta dalla direzione della normale.* Infatti ABD essendo angolo acuto, ABC sarà ottuso (503) e quindi maggiore di ACB necessariamente acu-

32.

27.

Fig.27. to (561.5°). Dunque il lato AC opposto ad ABC sarà maggiore di AB opposto ad ACB.

33. 569. Vogliasi in terzo luogo misurare l'angolo *eccentrico* BAD, o BAF, formato dall'intersezione in A delle due corde BG, FD. Conduco GE parallela ad FAD, ed ho BAD=BGE (547)=$\frac{1}{2}$BDE(568)=$\frac{1}{2}$BD+$\frac{1}{2}$DE=$\frac{1}{2}$BD+$\frac{1}{2}$FG (551)=$\frac{1}{2}$(BD+FG). Di qui BAF=180°—BAD (566.2°)=$\frac{1}{2}$FBDGF—$\frac{1}{2}$(BD+FG)=$\frac{1}{2}$(FB+GD): perciò *l'angolo eccentrico ha per misura la semisomma degli archi compresi fra le corde.*

32. 570. Vogliasi infine misurare l'angolo *circoscritto* BAD, col vertice fuor del circolo in A. Condotta GE parallela ad AD, sarà BAD=BGE=$\frac{1}{2}$BHE (568) =$\frac{1}{2}$(BD—ED)=$\frac{1}{2}$(BD—GI)(551). Se AD divenga la tangente AF, sarà FAB=$\frac{1}{2}$(FB—FG); onde se AM è l'altra tangente, sarà FAM=$\frac{1}{2}$(FBM—FGM). Perciò *l'angolo circoscritto ha per misura la semidifferenza degli archi compresi fra i lati.* Ma si venga ai Problemi.

33. 571. I. *Data una retta* AB, *che non possa prolungarsi, alzare una normale sopra una delle sue estremità* B. Fatta passare per A, B una circonferenza ABEA (533), si conduca il diametro AL, e quindi la corda LB, che sarà la normale cercata (568.2°).

34. 572. II. *Condurre una tangente da un punto dato* A *fuori della circonferenza.* Unisco A, C, e sulla retta AC presa come diametro descrivo un circolo che taglierà il dato nei punti M, M'; e poichè condotte AM, MC, l'angolo CMA è retto (568.2°), la MA, normale a CM, è tangente in M (538.II). Il problema ha due soluzioni, potendosi condurre da A anche la tangente AM'.

33. 573. III. *Sopra la retta* AB *descrivere un segmento capace di un dato angolo* a, cioè descrivere un circolo in cui posta AB come corda, gli angoli iscritti sopra AB risultino eguali ad *a*. Costruito l'angolo DAB=*a* (512), si alzi AL normale ad AD in A, ed FE normale ad AB in F metà di AB. Il punto d'intersezione C delle due normali sarà il centro, ed AC il raggio del circolo cercato. Infatti AD sarà tangente in A (538.II), e condotte a qualunque punto L della circonferenza le corde AL, LB, avremo ALB=$\frac{1}{2}$AGB (568) =DAB(567)=*a*.

574. IV. *Descrivere un triangolo di cui sia data la ba-*

se b, *l' altezza* c, *e l' angolo al vertice* a. Presa AB=b, si eseguisca sopra AB tutta intera la costruzione del problema precedente: quindi presa FH=c, pel punto H si conduca LL' parallela ad AB, e le corde AL, LB. Il triangolo ALB sarà manifestamente il cercato. Fig.33.

575. V. *Dati i tre punti* B, C, D *trovarne un quarto* A *tale che condotte* AB, AC, AD *si abbia* BAC=a, CAD=b. Condotte BC, CD si descriverà respettivamente sull' una e sull' altra un segmento capace dei due angoli a, b (573). L' intersezione delle due cirsonferenze, che per tal via verranno ad esser descritte, darà il punto richiesto. 35.

Linee rette proporzionali

576. Se di quattro rette date la prima sia contenuta nella seconda tante volte quante la terza è contenuta nella quarta, queste rette diconsi *proporzionali fra loro*. Tutte le proprietà che abbiamo dimostrato appartenere alle proporzioni formate da quantità qualunque (357), convengono in particolare anche a quelle formate da queste rette, giacchè secondo ciò che osservammo (498), anche le rette entrano nell' ordine delle quantità.

577. Poste ad angolo le due rette AH, AL, prese sull'una e sull' altra due porzioni AD, AC comunque piccole ed ineguali, e condotta DC, si supponga che AI, AB contengano l' una m, l' altra n parti eguali ad AD, onde sia AI=$m\times$AD, AB=$n\times$AD. Condotte IF, BG parallele fra loro e a DC, sarà (557) AF=$m\times$AC, AG=$n\times$AC; e quindi AI : AF : : AB : AG, e (357) AI : AB—AI : : AF : AG—AF, ossia AI : IB : : AF : FG. Dunque *se due rette* AB, AG *son tagliate da due o più parallele, le parti son proporzionali alle rette intere e fra loro.* 45.

578. Che se AI, AB non fossero fra se stesse commensurabili (498), cioè se AB non contenesse esattamente un numero n di quelle m parti che son contenute in AI, il teorema non sarebbe men vero. Infatti rinnovando il raziocinio già fatto altrove (564), supponiamo che in tal caso dovesse aversi piuttosto AI : IB : : AF : FE. Potremo sempre supporre le parti AD così

Fig. 45. piccole che una delle divisioni di AI cadendo in L, la parallela LP incontri AH in un punto P contenuto fra G ed E. In tal caso fra le parti AI, IL, AF, FP respettivamente commensurabili, avremo la proporzione AI : IL : : AF : FP, e quindi AI : AF :: IL : FP; ma dall'altra proporzione supposta abbiamo AI : AF :: IB : FE, starebbe dunque IL : FP :: IB : FE, ossia IL : IB :: FP : FE; proporzione insussistente, perchè con IL>IB si ha FP<FE, e con IL<IB si avrebbe FP>FE, cioè le due ragioni sono nel l'un caso e nell'altro inverse fra loro (352).

46. 579. *Se i triangoli* ABC, abc *son simili, tutti i loro lati omologhi son proporzionali.* Poichè se l'angolo B=*b*, presa sopra AB la parte DB eguale al lato omologo *ab*, e condotta DF parallela ad AC, i triangoli BDF, *bac* saranno eguali (510.2°): ma AB : BC :: BD : BF; dunque AB : BC :: *ab* : *bc*. Si proverà egualmente che AB : AC :: *ab* : *ac*, che AC : CB :: *ac* : *cb*.

580. Reciprocamente, *i triangoli* ABC, abc *son simili se hanno tutti i loro lati omologhi proporzionali.* Per la costruzione passata, i triangoli DBF, ABC son simili; dunque AB : BD : : AC : DF :: BC : BF; ma per ipotesi AB : *ab*(=DB) :: AC : *ac* :: BC : *bc*; dunque DF=*ac*, e BF=*bc*; dunque i triangoli BDF, *abc* sono eguali e simili; e poichè il primo è simile ad ABC, lo è dunque anche il secondo.

581. *I triangoli* ABC, abc *son simili se hanno un angolo eguale* B *e* b, *ed i lati intorno a quest'angolo proporzionali.* Fatta la solita costruzione, avremo AB : BC :: *ab* : *bc* :: BD (=*ab*) : BF: dunque BF=*bc*, ed il triangolo *abc* è eguale a BDF, e perciò simile ad ABC.

47. 582. *Se dal vertice dell' angolo retto* A *del triangolo rettangolo* BAC *si abbassi sull'ipotenusa* BC *la normale* AD, 1°. *i triangoli* BAD, ADC *saranno simili tra loro e al triangolo totale* BAC; 2°. *la normale* AD *sarà media proporzionale tra i segmenti* BD, DC *dell'ipotenusa* BC; 3°. *ciascun cateto* AB, AC *sarà medio proporzionale tra l'ipotenusa* BC *e il respettivo segmento adiacente* BD, o DC. Infatti 1°. i triangoli rettangoli BAD, BAC hanno l'angolo B comune, e i triangoli ADC, BAC han comune l'angolo C; dunque son simili (561.4°),

Fig. 47.

e due triangoli simili ad un terzo lo sono anche tra loro. 2°. I triangoli simili BAD, ADC danno BD : AD :: AD : DC. 3°. I triangoli simili BAD, BAC danno BD : BA :: BA : BC, e i triangoli simili BAC, ADC danno DC : AC :: AC: BC.

583. *Diviso un angolo* A *d'un triangolo* ABC *in mezzo con la retta* AD, *i lati* BA, AC *saranno proporzionali ai segmenti adiacenti* BD, DC. Poichè condotta BF parallela ad AD che incontri in F il lato AC prolungato, si avrà BD : DC :: FA : AC: ma l'angolo ABF=DAB=DAC=BFA; dunque il triangolo FAB è isoscele; onde FA=AB, e BD : DC :: AB : AC. Perciò se sia AB>AC avremo BD>DC.

584. Quindi se nel triangolo CAD rettangolo in D, l'angolo acuto CAD venga diviso in m parti eguali dalle rette AE, AG, AB, AF, AH, ec. ciascuna delle m parti DE, EG, GB, BF, ec. in cui resterà diviso il lato opposto CD, sarà maggiore della sua precedente. Infatti poichè in primo luogo abbiamo AG>AD (568.5°) e i due angoli GAE, EAD sono in ipotesi eguali, avremo GE>ED (583). Parimente poichè i due angoli BAG, GAE sono eguali e abbiamo AB>AE (568.6°), sarà GB>GE; e così si dimostrerà FB>BG, ec.

49.

585. Si supponga frattanto che condotta comunque da A sopra CD la retta AB, i due angoli BAD, CAB risultino fra di loro nella ragione di $n:n'$ cioè che l'uno comprenda parti n, l'altro parti n' delle m contenute nell'angolo totale CAD. Le rette AE, AG, ec. condotte come sopra, divideranno in n parti la porzione BD del lato CD, e in parti n' la rimanente BC. Or siccome la parte FB è la minore fra le parti n' contenute in CB, e la BG è la maggiore fra le parti n contenute in BD, sarà dunque $CB>n'\times FB$, e $BD<n\times BG$. Di qui (50) $\frac{CB}{BD}>\frac{n'\times FB}{n\times BG}$, ed a più forte ragione $\frac{CB}{BD}>\frac{n'}{n}$, poichè essendo FB>BG, si ha $\frac{FB}{BG}>1$ e per conseguenza il prodotto $\frac{n'}{n}\times\frac{FB}{BG}$ maggiore del fattore $\frac{n'}{n}$. La ragione dunque dei due segmenti CB, BD non segue in verun caso, ed anzi supera sempre quella dei respettivi angoli opposti.

Fig. 49. 586. Da $\frac{CB}{BD} > \frac{n'}{n}$ si ha pure $\frac{CB}{BD} + 1 > \frac{n'}{n} + 1$, quindi $\frac{CB+BD}{BD} > \frac{n+n'}{n}$, ossia $\frac{CD}{BD} > \frac{m}{n}$; dal che più particolarmente si apprende che *crescendo nella ragione di* n : m *uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo, il lato opposto cresce in una ragione maggiore*; talchè se quello divenga o doppio, o triplo, o n^{plo}, questo diverrà più che doppio, più che triplo, più che n^{plo}.

51. 587. *La normale* MP *abbassata da un punto qualunque* M *della semicirconferenza* AMB *sul diametro* AB *è media proporzionale fra i due segmenti* AP, PB *del diametro*. Infatti condotte le corde AM, MB, l'angolo AMB sarà retto (568.2°); il triangolo AMB sarà dunque rettangolo in M, e quindi avremo (582.2°) AP : PM :: PM : PB. Dedurremo ancora che *ciascuna delle corde* AM, BM *è media proporzionale tra l'intero diametro e il segmento adiacente* (582 3°). Comunemente la normale PM prende il nome di *ordinata al circolo*, e i due segmenti del diametro prendon quello di *ascisse*.

52. 588. *Se due corde* AB, CD *si tagliano in un circolo, le loro parti* AF *ed* FB, CF *ed* FD *son reciprocamente proporzionali*. Poichè condotte AC, BD, i triangoli ACF, FBD, in cui l'angolo CFA=DFB, e CDB=CAB (568.3°), son simili, onde CF : AF :: FB : FD.

54. 589. *Le parti esteriori* AD, AE *di due secanti* AB, AC *condotte da un punto* A *fuori d' una circonferenza, son reciprocamente proporzionali alle intere secanti*. Poichè condotte BE, DC, i triangoli ABE, ADC, che oltre l'angolo comune A hanno eguali gli angoli B, C, son simili, e danno (579) AD : AE :: AC : AB.

55. 590. *Se la secante* AC *si converte nella tangente* AM, *questa sarà media proporzionale tra la secante intera* AB *e la sua parte esteriore* AD. Condotte MD, MB, i triangoli AMD, AMB, che oltre l'angolo comune A hanno eguali gli angoli AMD, ABM (567.568), son simili e danno AD : AM :: AM : AB.

58. 591. Termineremo coi seguenti importanti Problemi. I. *Date tre rette* a, b, c, *trovare una quarta proporzionale*. Sulle

due rette AD, AE ad angolo, prendo $AB=a$, $AD=c$, ed $AC=b$; condotta CB, e quindi DE parallela a CB, i triangoli simili ACB, AED danno AB : AC :: AD : AE, ed AE sarà la quarta proporzionale cercata. Se si voglia una terza proporzionale fra due rette date a,b, la costruzione sarà la medesima, e solo bisognerà prendere AD=AC. Fig. 58.

II. *Trovar tra due rette* a, b *una media proporzionale*. Sull'indefinita APB prendo $AP=a$, $BP=b$, e descritto un semicircolo del diametro AB, la perpendicolare PM sarà la media proporzionale cercata (587). Oppure supposta $a>b$ prendo $AP=a$, e su di essa la porzione $AD=b$. Quindi descritto il semicircolo ACP, alzo l'ordinata DC: la corda AC sarà la media proporzionale richiesta (*ivi*). Oppure presa come sopra $AP=a$, $AD=b$, descrivo sul diametro DP il semicircolo DCP, e conduco da A la tangente AC, che sarà media proporzionale fra AP ed AD (590). 59. 60. 61.

III. *Dividere una retta* a *nella ragione in cui è divisa l'altra* AB. Da A conduco $AC=a$, che faccia con AB un angolo qualunque CAB. Inoltre conduco CB, e dai punti di divisione I, F, D di AB parallelamente a CB le rette IH, FG, DE, ed avrò (577) AB : AC : : AI : AH : : IF : HG : : FD : GE : : DB : EC. 62.

IV. *Per un punto dato* A *dentro un angolo* BCD *condurre una retta* BD *le cui parti* AD, BA *sieno nella ragione di* m : n. Conduco per A la retta AE parallela a CD, e quindi presa BE in modo che stia EC : BE : : m : n (591.III), conduco BA, che prolungo in D, ed ho BD retta cercata. Infatti attese le parallele AE, CD, abbiamo AD : AB : : EC : BE : : m : n. 70.

V. *Dividere una retta data* AB *in media ed estrema ragione*, cioè in modo che il maggior segmento FB sia medio proporzionale fra l'intera AB e il minor segmento AF. Si alzi da A la normale $AC=\frac{1}{2}AB$, e condotta CB, prendasi FB=CB−AC, e sarà F il punto cercato di divisione. Infatti descritto col raggio AC e centro in C il circolo ADRA, sarà CD=AC, BD=CB−AC=FB, RD=2AC=AB, ed RB=RD+DB=AB+FB. Frattanto poichè AB è tangente in A (538.II), e perciò (590) BD : AB :: AB : RB, sostituiti dunque i trovati valori, avremo 63.

Fig.63. FB : AB :: AB : AB+FB. e di quì (357.3°) FB : AB—FB : : AB : AB+FB—AB, cioè FB : AF : : AB : FB : ovvero (*ivi* 1°) AB : FB:: FB : AF.

Poligoni

592. Si chiama *poligono* ogni figura piana terminata da rette, alle quali si dà il nome di *lati*. Il più semplice fra i poligoni è il *triangolo*, di cui abbiamo già molto parlato. Il *quadrilatero* ha quattro lati, il *pentagono* 5, *l' esagono* 6; *l' ettagono*, *ottagono*, *enneagono*, *decagono*, *duodecagono*, *pentadecagono*, *ec.* sono poligoni di 7, 8, 9, 10, 12, 15, ec. lati.

593. I poligoni si dividono in *irregolari* che hanno gli angoli e i lati ineguali; in *simmetrici* che hanno tutti i lati opposti paralleli ed eguali; e in *regolari* che hanno tutti i lati e tutti gli angoli eguali. Diconsi *isoperimetri*, quando hanno un egual contorno o perimetro.

594. Il quadrilatero simmetrico si chiama *parallelogrammo*; il regolare, *quadrato*; il quadrilatero con due lati paralleli, *trapezio*; il parallelogrammo con tutti i lati eguali, ma con angoli ineguali, *rombo* o *losanga*; e il parallelogrammo che ha egnali i soli lati opposti, ma retti tutti i suoi angoli, si chiama *parallelogrammo rettangolo*, o solamente *rettangolo*.

36. 595. Una retta AD che attraversa un poligono da un angolo all' altro si chiama *diagonale*. L' *angolo saliente* ha il vertice fuor della figura, come ABC; l' angolo *rientrante* lo ha dentro, come CDE.

37.

36. 596. Le diagonali AC, AD, AE condotte da un angolo A, dividono il poligono di lati n in un numero $n-2$ di triangoli, come è chiaro, i cui angoli sommati riproducono gli angoli stessi del poligono: dunque la somma di questi angoli è $S=180°(n-2)$. Onde 1°. in un quadrilatero, $S=360°$; in un pentagono, $S=540°$; ec.; 2°. l' angolo d' un poligono regolare, che gli ha tutti eguali, (592) sarà $\frac{S}{n}=\frac{180°(n-2)}{n}=180°-\frac{360°}{n}$, tanto più ottuso o più prossimo a 180°, quanto n è più grande (50).

597. *I supplementi degli angoli salienti formano in tutti*

360°. Poichè i salienti coi lor supplementi son $180^\circ \times n$ (504), e i soli salienti son $180^\circ(n-2)$; dunque i supplementi son $180^\circ n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ$. Fig 36.

Poligoni simmetrici

598. I lati opposti d'un poligono simmetrico dovendo esser paralleli ed eguali (593), è chiaro 1°. che il numero di questi lati è sempre pari; 2°. che condotte da ogn' angolo d'un poligono simmetrico le diagonali agli angoli opposti, i triangoli contrariamente situati come AFB, DFC, che oltre AB=DC, hanno eguali gli angoli FDC ed FBA, FCD ed FAB (547), sono eguali. 38.e39.

599. Dunque AF=FC, BF=FD, ec., cioè tutte le diagonali AC, DB, ec. si tagliano in due parti eguali in un punto stesso F, che può chiamarsi il *centro* del poligono: perciò ogni diagonale AC, e in generale ogni retta IL che passa per il centro F, è divisa in mezzo in F, e divide il poligono in due parti eguali e simili, per essere eguali i triangoli FIB e DFL, AIF ed LCF, ec.

600. Quindi per descrivere un poligono simmetrico di un numero dato di lati, per esempio di sei, condotte comunque per un punto F tre rette EFG, DFB, AFC, prendo FB=DF, AF=FC, EF=GF, e per i punti A, B, G, C, D, E conduco AB, BG, ec., che saranno i lati del poligono: perchè i triangoli AFB, DFC essendo eguali (510.1°), AB è dunque eguale e parallela a DC, ec. 39.

Poligoni regolari

601. *Ad un dato poligono regolare* ABDFGHA *si può sempre inscrivere o circoscrivere un circolo*, cioè si può descrivere una tal circonferenza che passi per tutti i vertici, o che sia tangente a tutti i lati. Divisi in mezzo con le rette AC, BC due angoli contigui A, B (531), e dal punto C di concorso condotte CD, CF, CG, ec. l'eguaglianza degli angoli A, B (593), e per conseguenza quella delle loro metà CAB, ABC darà AC=CB (568.4°); e l'eguaglianza dei lati AB, BD darà eguali i triangoli ABC, BCD (510.1°), e quindi CD=CA=CB, come per la stessa ragione si tro- 40.

Fig. 40. verebbe CD=CF, CF=CG, ec.: onde la circonferenza col centro in C e raggio AC passerà per tutti i vertici del poligono.

602. Si calino adesso CK, CL, CM, ec. normali ai lati AB, BD, DF, ec. I triangoli CKB, CBL saranno eguali (518.3°), e daranno CK=CL, come i triangoli parimente eguali CLD, CMD daranno CL=CM, ec.; dunque il circolo descritto col centro in C e raggio CK passerà per K, L, M, ec. (497.8°), e sarà tangente a ciascuno dei lati BA, BD, DF, ec. (538.II).

Quindi *ciascun lato di un poligono regolare inscritto è corda d'un arco di* $\frac{1}{n}360°$, *posto* n *il numero de' lati*: così il lato di un triangolo equilatero inscritto è corda di 120°, quello di un quadrato è corda di 90°, d'un pentagono è corda di 72°, di un esagono è corda di 60°, di un decagono è corda di 36°, d'un pentadecagono è corda di 24°, ec. In generale quanto sarà maggiore *n*, ossia il numero dei lati, tanto sarà più piccolo l'arco sotteso, e quindi tanto minore la lunghezza del lato del poligono inscritto (497.5°).

603. Il problema inverso, cioè *inscrivere* o *circoscrivere un dato poligono regolare ad un circolo dato*, non ha soluzione generale. Bensì qualora si abbia un poligono qualunque inscritto, potremo averne altri infiniti dividendo in 2, in 4, in 8, ec. parti eguali (531) gli archi sottesi dai lati, e applicando le corde a ciascuno degli archi così suddivisi. Potremo inoltre sempre circoscriverne uno simile, cioè d'egual numero di lati: il che si fa

41. conducendo sui lati AB, BD, DF, ec. del poligono inscritto i raggi normali CR, CO, CE, ec., e ai punti R, O, E, ec. le tangenti GQ, QS, ST, ec., che essendo normali ai raggi saranno parallele ai lati, e formeranno il poligono esterno GQSTVG regolare e simile al dato. Infatti 1°. atteso il predetto parallelismo, tutti gli angoli del poligono esterno saranno eguali a quelli dell'interno (552), e in conseguenza fra loro: 2°. Condotte dal centro C ai vertici del poligono esterno le rette CG, CQ, CS, ec., i triangoli rettangoli CPG e CRG, CRQ e QOC, COS e CES, ec., saranno eguali (518.3°), e daranno eguali gli angoli PCG e GCR, RCQ e QCO, OCS ed SCE, ec., e per conseguenza gli archi AP ed AR, RB e BO, OD e DE, ec. Dunque CG passerà per il punto A metà dell'arco PAR e vertice del poligono inscritto;

e nel modo stesso CQ passerà per il vertice B, CS per il vertice D, ec. Dunque i triangoli GCQ, QCS, ec. saranno simili ai triangoli ACB, BCD, ec. (555), e come questi, eguali fra loro, e perciò si avrà GQ=QS=ST, ec.; cioè il poligono esterno avrà eguali anche tutti i suoi lati tangenti alla circonferenza, e quindi sarà regolare (593) e circoscritto. Nel modo stesso se si ha il poligono circoscritto può costruirsi il simile inscritto. Ma vediamo quali poligoni si possono inscriver direttamente. Fig.41.

604. I. *Inscrivere in un dato circolo un triangolo equilatero*. Col punto B della circonferenza come centro, e col raggio BC, descrivo l'arco ACD che tagli la circonferenza: in A, D: per A, D conduco AD, e presa AG=AD, ADG sarà il triangolo richiesto. Poichè condotte AB, BD, i triangoli ACB, BCD sono equilateri: dunque gli archi AB, BD son di 60°(566.5°), e l'arco totale ABD di 120°, la cui corda è lato del triangolo equilatero (602). 40.

605. Poichè l'arco AVB è di 60°, la sua corda AB è il lato dell'esagono regolare (602): ma AB=CB; dunque *il lato dell'esagono regolare inscritto è eguale al raggio*. Può anche osservarsi che prolungato il raggio CD fino all'incontro con la BN tangente al circolo nel punto B, sarà BN un semilato del triangolo equilatero circoscritto (603), e frattanto avremo CQ : CB :: QD : BN (577). Ma il triangolo isoscele CDB dà CQ=QB(525.1°) e perciò CB=2CQ, dunque BN=2QD=AD, e 2BN=2AD. E poichè 2BN è l'intero lato del triangolo equilatero circoscritto, perciò *il lato del triangolo equilatero circoscritto è doppio di quello dell'inscritto.*

606. II. *Inscrivere un quadrato in un dato circolo.* Condotti i diametri AD, BF normali l'uno all'altro, essi taglieranno la circonferenza nei punti A, B, D, F, e le corde AB, BD, DF, FA daranno il quadrato, per esser gli archi AB, BD, DF, AF tutti di 90° (513). 4.

607. III. *Inscrivere in un circolo dato un decagono regolare, e quindi un pentagono regolare.* Sia AB il lato del decagono, e si conducano i raggi AC, BC, e la retta BE che divida in mezzo l'angolo ABC. L'angolo ACB=36° (602); dunque l'angolo 43.

Fig. 43. ABC=BAC=72°: ma BE divide in mezzo l'angolo ABC; dunque ABE= 36°=ACB; dunque i triangoli ABE, ACB son simili; dunque AE : AB : : AB : AC; ma l'angolo EBC=36°=ACB, dunque il triangolo CEB è isoscele, e perciò EB o AB=EC, ed AE : EC : : EC : AC; se dunque si divida il raggio AC *in media ed estrema ragione* (591.V), il maggior segmento EC sarà il lato AB del decagono regolare. Descritto il decagono, se ne uniremo con rette i vertici di tre in tre, verremo a formare il pentagono: poichè ciascuna di queste rette sarà corda di un arco di 72° (602).

608. IV. *Inscrivere in un circolo un pentadecagono regolare.*

44. Presa AB eguale al raggio, e condotta AD eguale al lato del decagono, la corda BD sarà il lato del pentadecagono. Infatti l'arco ADB=60°, l'arco AD=36°, e $60^\circ-36^\circ=24^\circ$, arco del pentadecagono (602).

609. Coi metodi precedenti e con le ripetute suddivisioni degli archi (603), inscrivonsi dunque in un circolo tutti quei poligoni regolari, il numero dei cui lati venga espresso da un termine qualunque delle quattro progressioni geometriche 3, 6, 12, ec; 4, 8, 16, ec; 5, 10, 20, ec; 15, 30, 60, ec. Lungamente si è creduto esser questi i soli poligoni inscrittibili coi semplici mezzi della Geometria elementare. Ma fin dal principio di questo secolo il celebre *Gauss* di *Brunswick* trovò potersi pure inscrivere coi medesimi mezzi tutti i poligoni di lati 2^n+1, e quindi quelli di lati $2^m(2^n+1)$, purchè n sia tale che 2^n+1 risulti numero primo. Dimostreremo a suo luogo quest'insigne verità pel caso più semplice, cioè di $n=4$ e quindi $2^n+1=17$.

610. *Circoscritti ad uno stesso circolo due poligoni regolari P,P' l'uno di lati* m, *l'altro di lati* 2m, *il perimetro* p *del primo sarà maggiore del perimetro* p' *del secondo: l'opposto avverrà se i due poligoni sieno inscritti.* Sia in primo luo-

41. go GQ un lato del poligono circoscritto P, ed R il punto in cui tocca la circonferenza. Sarà GR un semilato (602), e quindi $p=m\times 2GR=2m\times GR$. Condotta GC, e quindi AN tangente al punto A, saranno AN, NR due semilati del poligono di lati $2m$, ed avremo $p'=2m(AN+NR)$, e quindi $p:p'::2m\times GR:2m(AN$

$+NR) :: GR : AN+NR :: GN+NR : AN+NR$. Ma il triangolo Fig.41. GNA rettangolo in A dà $GN>AN$ (568.5°), dunque $GN+NR> AN+NR$, ossia $GR>AN+NR$, e perciò $p>p'$.

Sia in secondo luogo BD un lato del poligono inscritto *P*. Condotto il raggio CO normale a BD e quindi la corda BO, sarà IB il semilato del poligono *P*, ed OB un lato del poligono *P'* (603). Avremo dunque $p=m\times 2IB=2m\times IB$, e $p'=2m\times OB$, e $p : p' :: 2m\times IB : 2m\times OB :: IB : OB$. Ma il triangolo BIO rettangolo in I dà $OB>IB$, dunque $p'>p$.

611. Di qui facilmente si raccoglie che di tutti i poligoni regolari, il numero dei cui lati sia rappresentato da un termine qualunque della serie m, $2m$, $4m$, $8m$, ... $2^n m$, quello che avrà più lati avrà minor perimetro se è circoscritto, maggiore se inscritto; e la serie sarà crescente relativamente ai poligoni inscritti, decrescente rapporto ai circoscritti.

612. *Il perimetro* p *di qualunque poligono regolare inscritto è minore del perimetro p' del poligono simile circoscritto.* Infatti sia AB un lato del poligono inscritto, e GQ quello del poligono circoscritto, costruito nel modo superiormente indicato (603). Supposto m il numero dei lati, avremo $p=m\times AB$, $p'=m\times GQ$, e $p:p' :: m\times AB : m\times GQ :: AB : GQ :: CS : CR$. Ma $CR=CA$, e $CS<CA$ (568.5°), e quindi $CS<CR$, dunque $p<p'$. La differenza per altro dei due perimetri sarà tanto più piccola quanto più CS si accosterà ad essere eguale a CR, cioè quanto più la corda AB si scosterà dal centro C, e in conseguenza quanto sarà più piccola questa corda (530) e l'arco da essa sotteso, e quindi quanto sarà maggiore il numero dei lati dei due poligoni (602).

613. Frattanto è ben visibile potersi concepire S portato tanto vicino ad R, che la differenza RS fra CS e CR si riduca ad esser minore di qualunque quantità assegnabile. A quel punto anche la differenza tra i due perimetri sarà dunque minore di qualunque quantità assegnabile, in modo che comunque poco si aumentasse il perimetro del poligono inscritto, verrebbe ad eguagliare ed anche a superare il perimetro del circoscritto,

614. *La circonferenza è maggiore del perimetro di qua-*

lunque poligono regolare inscritto, e minore di quello di qualunque poligono regolare circoscritto. La prima proposizione è evidente, giacchè ogni lato del poligono inscritto è una corda della quale è sempre maggiore l'arco sotteso. Col qual ragionamento si verrebbe a dimostrare altresì che la circonferenza è sempre più grande del perimetro di qualunque poligono inscritto, anche non regolare. E qui pure dovrà osservarsi che se il poligono è regolare e di lati m, e mediante la ripetuta suddivisione degli archi ci conduciamo al poligono di lati $2^n m$ (603), l'ultimo comecchè di maggior perimetro (*ivi*) differirà dalla circonferenza meno che il primo, e tanto meno quanto maggior sarà il coefficiente 2^n, cioè quanto più avremo spinta la suddivisione; e come non vi è limite alcuno per questa, così potremo sempre pervenire ad un tal poligono di lati $2^n m$, che differisca dalla circonferenza meno di qualunque assegnata o assegnabile quantità.

615. Riguardo all'altra proposizione, sia C la lunghezza della circonferenza, P, P' i perimetri di due poligoni inscritto l'uno, circoscritto l'altro, ambedue d'un egual numero di lati m. Sia inoltre a la differenza tra C e P', e si supponga $C > P'$. Sarà primieramente $P < P'$ (612). Potremo poi sempre inscrivere tal poligono regolare di lati $2^n m$, il cui perimetro p differisca da C di una quantità minore di a (614), nel qual caso avremo $C - p < C - P'$, e in conseguenza $P' < p$. Circoscritto in seguito un nuovo poligono dello stesso numero $2^n m$ di lati, e chiamatone p' il perimetro, avremo $p' > p$ (612), $P' > p'$ (611), e quindi $P' > p$. Dunque se si avesse $C > P'$, P' sarebbe nel tempo stesso e minore di p e maggiore di p' quantità più grande di p: il che essendo assurdo, non potrà dunque sussistere che sia $C > P'$. E neppur potrebbe sussistere che fosse $C = P'$, perchè qualunque siasi P' vi sarebbe sempre luogo di circoscrivere a C un nuovo poligono $p' < P'$ (611), nel qual caso si avrebbe $C > p'$, contro ciò che si è dimostrato. È quindi forza ammetter $C < P'$.

616. La circonferenza è dunque il limite a cui tendono i perimetri dei poligoni regolari inscritti e quelli dei circoscritti, a misura che coll'aumentar dei lati, gli uni vanno aumentando in lunghezza, gli altri diminuendo; ossia è il confine comune o

di separazione delle due serie crescente l'una, decrescente l'altra, formate quella dai successivi poligoni iscritti di lati $m, 2m, 4m$, ec., questa dai poligoni circoscritti medesimamente di lati $m, 2m, 4m$, ec.

617. Ma sia P un poligono irregolare, ed MN ne rappresenti un lato qualunque che tocchi la circonferenza in O. In tal caso si supponga che OQ < OM sia il semilato di un poligono regolare circoscritto. Condotto il raggio CO e le rette CM, CQ, CN avremo (585.586) $\frac{OM}{OQ} > \frac{MCO}{OCQ}$, ossia sostituendo alla ragione dei due angoli, la ragione $\frac{OS}{OR}$ degli archi che li misurano (563), $\frac{OM}{OQ} > \frac{OS}{OR}$; ma abbiamo (614) OQ>OR, dunque altresì OM>OS. Così si dimostrerà ON>OU, e quindi tutto il lato MN>SOU, arco compreso fra le rette CM, CN condotte alle due estremità del lato. Ragionando egualmente rapporto a ciascun degli altri lati si concluderà che la loro somma, e in conseguenza il perimetro del poligono irregolare circoscritto è desso pure maggiore della circonferenza.

Fig. 44.

618. *Di due circonferenze quella che ha maggior raggio è maggiore di quella che lo ha minore.* Sia ABD=C la circonferenza di raggio maggiore, $abd=c$ quella di raggio minore. Descritta col centro f della minore e con un raggio $a'f$ eguale a quello della maggiore una nuova circonferenza $a'b'd'=C'$; avremo $C'=C$. Ora s'inscriva o s'immagini inscritto in C' un poligono regolare del perimetro p', e tale che la distanza d'uno dei suoi lati $a'b'$ dal centro f oltrepassi il raggio af della circonferenza minore; al che potremo sempre pervenire col solito mezzo della ripetuta suddivisione degli archi (603), dopo avere primieramente inscritto in C' un poligono regolare qualunque. Si conducano quindi i raggi fa', fb', la retta $e'f$ normale ad $a'b'$, e la gh tangente alla circonferenza c nel punto e, ove la circonferenza è attraversata da $e'f$. Sarà (603) gh il lato d'un poligono p circoscritto a c, simile al poligono p' inscritto a C'; onde, supposto m il numero dei lati dell'uno e dell'altro, avremo $p=m\times gh$, $p'=m\times a'b'$, e $p:p'::gh:a'b'::fe:fe'::fa:fe'$; e poichè in ipotesi

68.

Fig. 68. si ha $af < fe'$, sarà dunque $p < p'$. Ma abbiamo (614) $p' < C'$, (615) $p > c$; dunque $C' > c$, ossia $C > c$.

Figure simili

619. Due figure son *simili* quando con un numero eguale di lati hanno tutti gli angoli respettivamente eguali, e tutti i lati omologhi proporzionali. Onde i poligoni regolari di un egual numero di lati, e perciò i circoli, limiti naturali di tutti questi poligoni, son figure simili.

66. 620. *I perimetri di due figure simili* ABCDE, abcde *son tra loro come i lati omologhi* AB, ab, *o come un egual numero di lati omologhi* AB+AE+DE+ec., $ab+ae+de+$ec. Essendo $AB : ab :: AE : ae :: DE : de :: DC : dc$ ec., la somma degli antecedenti o il perimetro della prima figura, è alla somma de' conseguenti o al perimetro della seconda, come $AB : ab$, o come $AB+AE+DE+$ec.$: ab+ae+de+$ec. (358). Onde i contorni p, p'

67. di due poligoni regolari ABDEFG, *abdefg* son tra loro come il lato AG all' omologo ag, come la porzione BAGF all' omologa $bagf$ dei perimetri; e se C è il centro dei circoli inscritti o circoscritti, attesi i triangoli isosceli e simili aCg, ACG, si avrà $p : p' :: AG : ag :: CG : Cg :: CN : Cn$; cioè *i perimetri di due poligoni regolari e simili stanno come i raggi dei circoli inscritti o circoscritti.*

621. Nasce da ciò che le *circonferenze stanno fra loro come i raggi*. Infatti sieno c, C due circonferenze dei raggi r, R, e si supponga che in luogo di $c : C :: r : R$, dovesse aversi $c : C :: r : R'$, e fosse $R' > R$ Descritta col raggio R' una nuova circonferenza C', sarà $C' > C$ (618); e chiamato a l'eccesso di C' sopra C, avremo $C' - C = a$. Or s'immagini inscritto in C' un poligono regolare del perimetro p' e tale che sia $C' - p' < a$ (614); ed un altro poligono simile s'immagini inscritto in c, il cui perimetro sia rappresentato da p. Sarà $p' > C$, e (614) $p < c$. Frattanto avremo (620) $p : p' :: r : R'$, e per conseguenza $p : p' :: c : C$, e $p : c :: p' : C$ proporzione che non può sussistere con $p < c$, e $p' > C$ (349.351). Dunque non potrà essere $R' > R$.

Supponiamo $R' < R$. Sarà allora $C > C'$; e se, posto $C - C' = a$, si circoscriva a C' un poligono regolare di tal perimetro p' che si abbia $p' - C' < a$; un altro simile se ne circoscriva a c, e il perimetro di questo si chiami p, avremo $p' < C$, e (615) $p > c$. Sarà poi come sopra $p : p' :: r : R' :: c : C$, d'onde $p : c :: p' : C$, proporzione che non può in verun modo aver luogo con $p > c$, e $p' < C$. Dunque R' non solo non potrà esser maggiore, ma neppur minore di R; sarà perciò $R' = R$, ed avremo $c : C :: r : R$.

622. Di quì $c : r :: C : R$. Perciò se si chiami 2π il rapporto numerico della circonferenza C al raggio R quando $R = 1$, avremo $c : r :: 2\pi : 1$ e di quì $c = 2r\pi$, espressione dalla quale si ha il valore di qualunque circonferenza c dato per il suo raggio r, o quello del raggio r dato per la circonferenza c a cui appartiene, quando per altro sia conosciuto π; il che fino a qual punto possa conseguirsi lo vedremo nella seconda parte.

623. *In due poligoni simili* ABCDE, abcde *le diagonali* AD, AC, ad, ac *son proporzionali tra loro e ai lati omologhi* AE, ae. I triangoli ADE, *ade* son simili avendo un angolo E=*e*, e intorno ad esso i lati proporzionali (581); dunque AD : *ad* :: AE : *ae*; così si troverà AC : *ac* :: BC : *bc* :: DE : *de* :: AD : *ad* ec. In generale *le figure simili hanno proporzionali tutte le loro dimensioni omologhe*. Onde per descriver sopra un lato omologo ad AB un poligono simile al dato ABCDEF, si prenderà in AB, prolungato se occorra, la retta A*b* eguale al dato lato, e condotte dal punto A le diagonali AC, AD, AE, le parallele *bc* a BC, *cd* a CD, *de* a DE, *ef* ad EF, formeranno il poligono cercato: poichè i poligoni ABCDEF, A*bcdef* hanno gli angoli respettivamente eguali e i lati proporzionali, attesi i triangoli simili ABC, A*bc*, e ACD, A*cd*, ec.

Fig. 67.

69.

Seconda Parte

Superficie

624. Dichiarammo a suo luogo cosa si voglia intendere per superficie (489). Entrando adesso a parlarne, ci limiteremo in

questa seconda parte alle sole superficie piane (494), e considerandole in primo luogo limitate dai perimetri delle più note figure, daremo il modo di trovarne l'*area* o misura, e confrontarle fra loro; passando poi a supporle come dotate d'estensione indefinita, e l'une sull'altre variamente inclinate, determineremo la natura e la direzione delle loro intersezioni, e il modo di misurarne le inclinazioni. Quanto alle superficie rimanenti, non potremo parlarne che nella terza parte, dopo aver premesse le nozioni dei solidi e delle loro diverse conformazioni.

Misura delle superficie

625. Misurare, altro non significa che determinare il rapporto numerico di una quantità qualunque data ad un'altra quantità omogenea egualmente data, che si assume come già nota, e a cui si dà il nome di *unità di misura* (498). Così misuriamo una durata di tempo, computando il numero di volte che questa contiene un'altra durata nota, la quale può esser quella d'un anno, d'un mese, d'un giorno, d'un'ora,ec. Misuriamo una lunghezza o una distanza, valutando il numero di volte che o l'una o l'altra contengono una lunghezza o distanza nota, la quale può essere un braccio, un metro, una tesa, un miglio, una lega,ec.; e dovremo dunque in pari modo misurare una superficie data, calcolando quante volte dessa contenga un'altra superficie nota e di convenuta estensione, la quale dovrà considerarsi come unità di misura.

626. Or questa superficie convenuta è un *quadrato*, che aver deve per lato un'unità del genere di misura, al quale si vuol riferire la valutazione della superficie assegnata. Così se si vuole aver la superficie in braccia, il quadrato *unità* dev'essere un *braccio quadro*, cioè un quadrato di cui ciascun dei lati abbia la lunghezza d'un braccio; e il numero di volte che la superficie del braccio quadro è contenuta nella superficie data, dà in *braccia quadre* il valor cercato della medesima. Che se il quadrato unità abbia un pollice di lunghezza per lato, il valore della superficie misurata risulterà in pollici quadri, ec. E

se il lato del quadrato unità non ha lunghezza nè determinata, nè di qualità specificata, rimarrà del pari indeterminata e non specificata la superficie da misurarsi; e la misura non altro darà che il rapporto fra due superficie una delle quali è la data, l'altra si considera come eguale all'unità. Ed è appunto sotto quest'ultimo aspetto che misura e valuta le superficie la Geometria. Or l'uso stabilito di riferire al quadrato la misura d'ogni superficie, ha dato luogo a chiamar *quadratura* la valutazione di una superficie qualunque; e il problema sì celebre della quadratura del circolo consiste appunto in trovare un quadrato di superficie eguale a quella del circolo. Tutto ciò premesso, diamo il modo di misurare la superficie delle più usuali figure.

627. Sia prima di tutto da misurarsi il quadrato ABCD, o più compendiosamente il quadrato $BD=Q$, diverso da $abcd$ o da $bd=q$ *quadrato unità*. Presa $FB=bc$, e condotta FE parallela a BA, si supponga che il lato $ab=bc=1$ del quadrato q entri m volte in AB; e quindi sia $AB=m\times ab$. È chiaro che il quadrato q entrerà del pari m volte nel rettangolo BE, ed avremo $BE=m\times q$; ed è chiaro altresì che il lato $FB=bc$ entrerà pure m volte nel lato BC, ed altrettante volte il rettangolo BE entrerà nel quadrato Q. Avremo dunque $Q=m\times BE=m^2\times q$; dal che si conclude che *la superficie* Q *d'un quadrato qualunque* ABCD *si ha moltiplicando la superficie* q *del quadrato unità per il quadrato* m² *del numero* m *di volte che uno dei lati* AB *di quello contiene uno dei lati* ab *di questo*. Così se ab è un pollice, ed AB un piede, nel qual caso $m=12$ (123), sarà q un pollice quadro, e $Q=144$ pollici quadri. Fig. 71.

628. Siccome però in generale $q=1$, e l'equazione $AB=m\times ab$, nella quale $ab=1$, dà $m=AB$, avremo altresì, sostituendo, $Q=AB^2$, equazione egualmente idonea a rappresentare il valor relativo del quadrato Q, qualora però vi si consideri AB non assolutamente come lato del quadrato, nel quale aspetto non potrebbe moltiplicarsi nè con se stesso, nè con verun'altra retta, ma bensì come una quantità che tiene il luogo dell'indicato rapporto m, il quale soltanto, essendo sempre numerico, può andar soggetto alla moltiplicazione. In caso diverso l'espressione

Fig.71. AB^2 non farà che rappresentare la superficie del quadrato ABCD costruito sopra AB, senza darcene per altro il valore espresso e relativo.

72. 629. Debba in secondo luogo misurarsi la superficie del rettangolo ABCD, o più semplicemente $AC = R$. Si supponga che i lati AB, BC contengano l'uno m, l'altro n volte il lato $ab = 1$ del quadrato unità, laonde si abbia $AB = m \times ab$, $BC = n \times ab$. Presa BE=AB, e condotta EF parallela ad AB, avremo il quadrato $AE = m^2 \times q$ (627), che visibilmente sarà contenuto tante volte nel rettangolo $AC = R$, quante volte il lato $BE = AB = m \times ab$ è contenuto nel lato $BC = n \times ab$, ossia quante volte m è contenuto in n, numero che visibilmente corrisponde ad $\frac{n}{m}$ (29). Sarà dunque $R = \frac{n}{m} \times m^2 q = nm \times q$; e di quì: *si misura la superficie di un rettangolo moltiplicando la superficie del quadrato unità per il prodotto* mn *dei rapporti* m, n, *che il lato di questo ha coi due lati di quello.* E quì pure dovrà osservarsi che essendo $q = 1$, e l'equazioni $AB = m \times ab$, $BC = n \times ab$, nelle quali $ab = 1$, dando $m = AB$, $n = BC$, avremo sostituendo $R = AB \times BC$, d'onde più semplicemente: *la superficie d'un rettangolo si ottiene moltiplicando uno per l'altro i due lati ineguali*; purchè per valore di questi lati si assuma quello del respettivo loro rapporto numerico col lato del quadrato unità. In questo solo caso l'espressione $AB \times BC$ sarà un vero prodotto, il cui valore ci farà conoscere quello della superficie cercata. Diversamente essa non sarà che un modo di rappresentare la superficie, qualunque essa sia, del rettangolo che ha per lati AB, BC, e potremo usarla in questo senso ogni qual volta non altro si richieda che accennar questa superficie, e non già di valutarla, come sempre accaderà in avvenire. Quantunque poi la detta espressione non possa allora in rigore riguardarsi come prodotto, noi la qualificheremo con questo nome, che promiscueremo indistintamente con quello di rettangolo.

630. E quì prima di più oltre procedere osserveremo I°. che avendosi $R = mn$, sarà $\frac{R}{m} = n$, cioè (sostituendo i valori di R, m, n), $\frac{AB \times BC}{AB} = BC$, appunto come dall'Algebra si ha $\frac{ab}{a} = b$.

II°. Se con la normale FE si divida il rettangolo $AC=R$, nei due AE$=R'$, FC$=R''$, sarà $R'+R''=R$. Ma $R'=AB\times BE$, $R''=FE\times EC=AB\times EC$, ed $R=AB\times BC=AB(BE+EC)$, avremo dunque $AB\times BE+AB\times EC=AB(BE+EC)$, nel medesimo modo che dall'Algebra si ha $ab+ac=a(b+c)$. Sarà pure $R-R'=R''$; e di qui $AB\times BC-AB\times BE=AB\times EC=AB(BC-BE)$, come egualmente dall'Algebra abbiamo $ab-ac=a(b-c)$. Noi faremo liberamente uso di queste riduzioni, che quantunque di apparente dominio dell'Algebra, non cessano come qui vediamo, di appartenere anche alla Geometria.

Fig. 72.

Infine III°. se AB, uno dei lati del rettangolo, cresca nella ragione di $1:p$, e divenga $p\times AB=A'B$, e l'altro BC scemi nella ragione medesima e divenga $\frac{1}{p}\times BC=BC'$, chiamato R' il nuovo rettangolo, avremo $R'=A'B\times BC'=p\times AB\times\frac{1}{p}\times BC=AB\times BC=R$, cioè la superficie del nuovo eguaglierà quella del primitivo. Ora è visibile che i lati di questi due rettangoli stanno in ragione inversa tra loro (349), e che quindi danno la proporzione $AB:A'B::BC':BC$ (352). Dunque 1°. *l'equazione* $AB\times BC=A'B\times BC'$ *tra due rettangoli eguali in superficie può sempre sciogliersi nella proporzione* $AB:A'B::BC':BC$, nel modo medesimo che l'equazione algebrica $ab=cd$ si scioglie nella proporzione $a:c::d:b$ (356); 2°. Reciprocamente *se quattro rette* AB, A'B, BC', BC *sono in proporzione, il rettangolo fatto con le due medie eguaglierà il rettangolo fatto con le due estreme*, nel modo che nelle proporzioni algebriche il prodotto dei termini medj eguaglia quello degli estremi. Quindi se la proporzione è continua, onde sia $AB:A'B::A'B:BC$, sarà $AB\times BC=A'B^2$, cioè il rettangolo fatto coll'estreme eguaglierà il quadrato fatto sulla media, o che ha la media per lato: come all' opposto se un rettangolo eguagli in superficie un quadrato, il lato di questo sarà medio proporzionale fra i lati di quello. Grande è l'importanza di queste proposizioni in tutto il seguito della Geometria, e noi non molto tarderemo a profittarne: ma ritorniamo alle misure.

631. *La superficie d'un triangolo rettangolo eguaglia*

Fig.71. *il semiprodotto dell'un cateto per l'altro.* Infatti, condotta nel rettangolo AF la diagonale BE, i triangoli ABE, BEF saranno eguali tra loro (510.3°), e ciascuno equivarrà in conseguenza alla metà del rettangolo. Avremo dunque ABE$=\frac{R}{2}=$......
$\frac{1}{2}$ AB$\times$AE (629).

73. 632. *La superficie d'un triangolo qualunque* ABC *equivale al prodotto d'un lato* AC *per la seminormale* BD *condotta dall'angolo opposto* B *su questo lato, prolungato se occorra.* Poichè se la normale cade sulla base (562), avremo ABC$=$CDB$+$ADB$=$(631)$\frac{1}{2}$CD$\times$DB$+\frac{1}{2}$AD$\times$DB$=$ (630.II)$\frac{1}{2}$DB(AD$+$DC) $=\frac{1}{2}$DB$\times$AC; e se cade fuori del triangolo sul prolungamento della base, avremo ABC$=$CDB$-$ADB$=\frac{1}{2}$BD$\times$CD$-\frac{1}{2}$BD$\times$AD $=\frac{1}{2}$BD(CD$-$AD)$=\frac{1}{2}$BD$\times$AC come sopra.

74. 633. Dunque il *parallelogrammo* AD *equivale al prodotto della base* AE *per l'altezza* BC, *ossia per la distanza dei lati paralleli* AE,BD. Poichè, condotta la diagonale BE, i due triangoli ABE, BED saranno eguali (599), e il parallelogrammo sarà doppio d'uno qualunque dei due. Avremo perciò AD$=$ 2ABE$=2\times\frac{1}{2}$AE$\times$BC$=$AE$\times$BC.

75. 634. *Il trapezio* ABCD *è il prodotto della semisomma delle sue basi parallele* AD, BC *per la lor distanza* FC; poichè condotta la diagonale AC, si ha DABC$=$DAC$+$CAB$=$ $\frac{1}{2}$FC$\times$AD$+\frac{1}{2}$FC$\times$BC (631)$=\frac{1}{2}$FC(AD$+$BC).

67. 635. *Il poligono regolare è il prodotto del suo perimetro per la seminormale condotta dal centro sopra uno dei lati, ossia per il semiraggio del circolo inscritto*: poichè i raggi dal centro agli angoli dividono il poligono in triangoli eguali e simili, ciascun dei quali è il prodotto del lato del poligono per la seminormale; dunque il poligono è il prodotto della seminormale, ossia del semiraggio del circolo inscritto (601), per l'intero perimetro; ed una porzione BAG del poligono, è il prodotto di BA$+$AG per la seminormale.

636. *La superficie* S *del circolo eguaglia il semiprodotto della circonferenza nel raggio.* Sia infatti r il raggio, C la circonferenza. Se non dovesse aversi $S=\frac{1}{2}rC$, ma piuttosto $S=\frac{1}{2}rC'$, e fosse C' la circonferenza di un nuovo circolo di raggio

maggiore, e quindi $C'>C$ (618), ogni poligono circoscritto a C, il cui perimetro P' fosse medio fra C' e C avrebbe una superficie $S'=$ (635) $\frac{1}{2}rP'<\frac{1}{2}rC'$, e quindi $<S$, cioè si caderebbe nell'assurdo di una superficie contenuta più grande della sua contenente. E se fosse $C'<C$, immaginato come sopra un poligono regolare del perimetro P' medio fra C e C', si avrebbe in primo luogo $P'<C$, e $>C'$. Sarebbe in oltre $\frac{1}{2}rP'>\frac{1}{2}rC'$ e quindi $>S$. Posto frattanto $\frac{1}{2}rP'-S=a$, qualunque poligono circoscritto a C la cui superficie superasse quella del circolo dato di una quantità minore di a, avrebbe un perimetro $P<P'$, e in conseguenza $<C$, il che essendo impossibile (614) sarà altresì impossibile che sia $C'<C$. Non potendo dunque aversi nè C' maggiore di C, nè C' minore di C, dovrà esser $C'=C$, e quindi $S=\frac{1}{2}rC$.

637. Frattanto se quì si ponga il valor trovato di $C=2r\pi$ (622), avremo $S=r^2\pi$, espressione che ci farà conoscere il rapporto della superficie del circolo al quadrato del raggio, quando si conosca il rapporto π della circonferenza al raggio (*ivi*). Inoltre se si abbia un settore circolare (496) chiuso da un arco che stia alla circonferenza totale : : a : 1, la sua superficie corrisponderà ad $ar^2\pi$.

Paragone delle superficie

638. La maniera diretta di paragonare due superficie è quella di confrontare i rapporti che l'una e l'altra trovansi avere col quadrato unità (626). Ma può bene spesso instituirsi un paragone immediato fra loro, il che si fa nei casi e modi seguenti.

639. *Due rettangoli stanno fra loro in ragion composta delle basi e delle altezze; lo stesso accade di due parallelogrammi e di due triangoli.* Poichè chiamando S, s le due superficie, B, b le basi, A, a le altezze respettive, avremo per i rettangoli e per i parallelogrammi (629.633) $S=A\times B$, $s=a\times b$, e per i triangoli (632) $S=\frac{1}{2}A\times B$, $s=\frac{1}{2}a\times b$, e quindi in tutti i casi $S:s::A\times B:a\times b$.

640. *Due rettangoli con basi eguali stanno come le altezze; con altezze eguali stanno come le basi: il che sotto*

le stesse condizioni segue pure tra due parallelogrammi, e tra due triangoli. Infatti dalla proporzione $S : s :: A \times B : a \times b$, nel caso di $A = a$ risulta $S : s :: B : b$, e nel caso di $B = b$ risulta $S : s :: A : a$.

Fig.79. 641. *Se due triangoli* BAC, bac *hanno un angolo* A=a, *saranno tra loro come i prodotti de' lati intorno all' angolo eguale.* Poichè condotte le normali BD, *bd* sui lati AC, *ac*, avremo BAC : *bac* :: BD $\times$ AC : *bd* $\times$ *ac*; ma i triangoli simili ABD, *abd* danno BD : *bd* :: AB : *ab*, e di quì (357.3°) BD $\times$ AC : *bd* $\times$ *ac* :: AB $\times$ AC : *ab* $\times$ *ac*, dunque BAC : *bac* :: AB $\times$ AC : *ab* $\times$ *ac*.

642. *Due figure simili stanno come i quadrati delle loro dimensioni omologhe.* Poichè si suppongano A, B, C, ec. nell'una, ed a, b, c, ec, nell'altra le dimensioni respettivamente omologhe, e sieno A, B nella prima, a, b nella seconda quelle dal cui prodotto risultano le respettive superficie S, s. Avremo $S : s :: A \times B : a \times b$. Ma la supposta similitudine dà (623) $A : a :: B : b :: C : c$ ec.; e da $A : a :: B : b$ abbiamo (357. 3.°) $A^2 : a^2 :: A \times B : a \times b$, dunque $S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2$ ec. Così i rettangoli, i parallelogrammi ed i triangoli simili stanno come i quadrati dei lati, o delle diagonali, o delle altezze; dal che possiamo per esempio dedurre che la superficie del triangolo circoscritto è quadrupla dell' inscritto, poichè il lato del primo è doppio di quello del secondo (605). Per le stesse ragioni i *circoli stanno come i quadrati dei raggi, dei diametri, delle circonferenze, ec.*

643. *Di due poligoni regolari circoscritti ad uno stesso circolo, quello che ha minor numero di lati ha maggior superficie.* Premetto, come cosa o evidente o facile a dedursi, che la lunghezza dei lati di un poligono regolare circoscritto decresce in ragione del loro numero. Sia frattanto n il numero dei lati d'uno

40. dei due poligoni, ed $m < n$ quello dell' altro. Supposto ZF un semilato del primo, e ZX un semilato del secondo, e chiamate T, t, t' le superficie dei tre triangoli ZCX, ZCF, FCX, ed S, s, s' quelle dei settori circolari Z*Cr*, Z*Cf*, *fCr*, saranno primieramente $2mT$, $2nt$ le intere superficie dei due poligoni; $2mS$, $2ns$ equivaranno ambedue a quella del circolo, ed avremo infine $T = t + t'$, $S = s + s'$. Descritto quindi col raggio CF l'arco TFR, e chiamati σ, σ' i due nuovi settori TCF, FCR, sarà $t < \sigma$, $t' > \sigma'$ e quindi $\frac{t'}{t} > \frac{\sigma'}{\sigma}$. Ma abbiamo (642) $\sigma : s ::$ CF^2 : C*f*^{2} :: $\sigma' : s'$, dunque $\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s'}{s}$, e perciò $\frac{t'}{t} > \frac{s'}{s}$, e di quì $\frac{t'+t}{t} > \frac{s'+s}{s}$, ossia $\frac{T}{t} >$

$\frac{S}{s}$ e $\frac{2mT}{2nt} > \frac{2mS}{2ns}$. Ma, come si è già veduto, $2mS = 2ns$, sarà dunque $\frac{2mT]}{2nt} > 1$, e quindi $2mT' > 2nt$.

644. *Di due poligoni regolari isoperimetri quello che ha più lati ha maggior superficie.* Sieno p, p' due poligoni isoperimetri d' uno stesso circolo $r^2\pi$, e P, P' due a lui circoscritti respettivamente simili agli isoperimetri: avremo $(r^2\pi)^2 = Pp$ (649) $= P'p'$, e supposti i più lati in p, P, sarà $P' > P$ (640.635); dunque $P' : P'p' > P : Pp$, cioè $1 : p' > 1 : p$, e $p > p'$.

Casi notabili d' equivalenza di superficie fra due o più poligoni di una stessa, o di differente figura

645. *Due rettangoli, due parallelogrammi e due triangoli son respettivamente eguali in superficie, se hanno le basi in ragione inversa delle altezze;* poichè se $A : a :: b : B$, avremo $A \times B = a \times b$, e la nota proporzione (639) $S : s :: A \times B : a \times b$ darà $S = s$.

646. *Due poligoni regolari i cui perimetri* P, P' *sieno inversamente come i raggi* r, r' *dei circoli inscritti sono eguali in superficie.* Infatti chiamate S, S' le due superficie, si ha (635) $S = \frac{1}{2} rP$, $S' = \frac{1}{2} r'P'$, ed $S : S' :: rP : r'P'$. Se dunque abbiasi per condizione $P : P' :: r' : r$, sarà $rP = r'P'$, ed $S = S'$.

647. *Il prodotto del semiraggio nel perimetro del poligono regolare inscritto di* n *lati, equivale alla superficie del poligono inscritto di lati* 2n. Sieno P, P' i perimetri dei due poligoni, AF un lato dell' uno, AK un lato dell' altro, S' la superficie del secondo; e si conducano CI normale ad AK, e CA al punto d' incontro A dei due lati. Avremo $P = n \times AF$, $P' = 2n \times AK$, $S' = \frac{1}{2} CI \times P'$ (635) $= n \times AK \times CI$. Ora $AK \times CI = CK \times AO$, perchè ambedue questi rettangoli son doppj in superficie del triangolo ACK (632); di più $AO = \frac{1}{2} AF$; sarà dunque $S' = \frac{1}{2} n \times CK \times AF = \frac{1}{2} CK \times P$.

Fig. 42.

648. *La superficie* S' *del poligono regolare inscritto di lati* 2n *è media proporzionale fra le superficie* S, S'' *dei poligoni inscritto e circoscritto di lati* n. Supposto RK un semilato del poligono circoscritto, parallelo al semilato AO del poligono simile inscritto, e ritenuta nel rimanente la superior costruzio-

Fig.42. ne (647), avremo (635) $S=\frac{1}{2}n\times CO\times AF=n\times CO\times AO$, $S''=n\times CK\times RK$, e come sopra (647) $S'=\frac{1}{2}n\times CK\times AF$. Dunque $S:S'::CO:CK$, ed $S':S''::AO:RK::CO:CK$; (579) e quindi $S:S'::S':S''$.

649. *La superficie* S *del circolo è media proporzionale fra le superficie* S', S'' *di due poligoni regolari simili, l'uno circoscritto, l'altro isoperimetro* (593) *alla circonferenza* C *del circolo.* Posto r il raggio del circolo supposto, ed r' quello del circolo inscritto al poligono isoperimetro, avremo $S=r^2\pi$ (637), $S''=\frac{1}{2}r'C$ (635) $=rr'\pi$ (622), ed $S'':S::rr'\pi:r^2\pi::r':r$. Ma abbiamo (642) $S'':S'::r'^2:r^2$, dunque $S''^2:S^2::S'':S'$, ovvero $S'':S^2::1:S'$, ossia $S'':S::S:S'$. E quì può osservarsi che come si ha sempre $S'>S$, così sarà $S>S''$, cioè *la superficie del circolo è maggiore di quella di qualunque poligono regolare suo isoperimetro.*

650. *Due triangoli che abbiano due lati eguali a due lati, e l'angolo contenuto nell'uno, supplemento di quello contenuto nell'altro, sono eguali in superficie.* Sieno ABE, *bec* i due triangoli, e si abbia AE$=ec$, BE$=be$, e l'angolo AEB$=180°-bec$. Prolungata AE in C in modo che abbiasi EC$=$AE$=ec$, e condotta BC, i triangoli CBE, *cbe*, che oltre i lati BE e *be*, EC ed *ec* hanno eguali gli angoli contenuti BEC, *bec*, saranno eguali (510.1°); ma il primo eguaglia in superficie il triangolo ABE, con cui ha eguale la base e visibilmente comune l'altezza, altrettanto dunque accaderà del secondo.

28.

77. 651. *Se la retta* FE *sia divisa comunque in* A, *il rettangolo* FE$\times$AF *sarà eguale al rettangolo* FA$\times$AE *col quadrato di* AF; cioè fatta FA$=a$, AE$=b$, sarà $(a+b)a=ab+a^2$. Infatti presa FG$=$AF, formato il rettangolo FL, e condotta AK parallela ad FG, sarà FK$=$AF$\times$FG$=$AF$\times$AF$=$AF^2, AL$=$AE$\times$AK$=$AE$\times$FG$=$AE$\times$FA; e quindi FL$=$FE$\times$FG$=$FE$\times$AF$=$AL$+$FK$=$FA$\times$AE$+$AF^2.

652. Poste le stesse cose, *il quadrato di* FE *sarà eguale ai quadrati di* FA.AE *col doppio rettangolo* FA$\times$AE; cioè $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Costruiti sopra FE ed FA i quadrati FN, FK e prolungate AK in P, GK in L, sarà NL$=$NE$-$LE

$=FE-FA=AE=KL$, onde $KN=KL^2=AE^2$; inoltre $GP=$ Fig.77.
$MP\times MG=FA\times AE$; $AL=LE\times AE=FA\times AE$; onde $FN=$
$FE^2=FK+AL+GP+KN=FA^2+2FA\times AE+AE^2$.

653. Poste le stesse cose, *il quadrato di* FA *sarà eguale ai quadrati di* FE,AE *meno il doppio rettangolo* $FE\times AE$: cioè fatta $FE=a$, $EA=b$, sarà $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Eseguita infatti la costruzione che sopra, si ha $FK=FA^2=FN-AN-GP$ $=FN-AN-(GN-KN)=FN-AN-GN+KN=FE^2-$ $2FE\times AE+AE^2$.

654. Inoltre *i quadrati di* FE,AE *saranno eguali al doppio rettangolo* $FE\times EA$, *e al quadrato di* FA; cioè posto $FA=a$, $AE=b$, sarà $(a+b)^2+b^2=2b(a+b)+a^2$. Infatti se come abbiamo adesso veduto $FA^2=FE^2-2FE\times AE+AE^2$, è chiaro che dovrà aversi altresì $FA^2+2FE\times AE=FE^2+AE^2$.

655. *Se la retta* DA *sia divisa in mezzo in* G *e comunque in* F, *il rettangolo* $AF\times FD$ *col quadrato di* FG *sarà eguale al quadrato della metà* DG; cioè fatto $AG=a$, $GF=b$, sarà $(a+b)(a-b)+b^2=a^2$. Formato sopra DG il quadrato DI e prese ED ed MI eguali ad AF, si costruiscano i rettangoli EF, MH. Poichè $DO=DG=GA$, ed $ED=FL=FA$, sarà $EO=FG$. Inoltre poichè $OI=DO$ ed $MI=AF$, sarà $OM=EO=FG$. Quindi $EM=EO^2=GF^2$; $NI=MI\times IH=MI\times EO=AF\times FG$ $=GL$: onde $DI=DG^2=EM+MH+DH=FG^2+GL+DH=$ $FG^2+DL=FG^2+DF\times FL=FG^2+DF\times FA$. 78.

656. *Nel triangolo rettangolo il quadrato fatto sulla normale calata dal vertice dell'angolo retto sulla base equivarrà al rettangolo fatto coi due segmenti della base*: e *il quadrato fatto sopra uno qualunque dei due cateti equivarrà al rettangolo fatto con l'intera ipotenusa e il segmento adiacente al cateto*. Tutto ciò spontaneamente risulta dalle proporzioni stabilite altrove (582).

657. Del pari e nel modo stesso concluderemo che *nel circolo il quadrato dell'ordinata equivale al rettangolo delle ascisse* (587), *e quello di ciascuna delle due corde condotte dall'estremità del diametro alla sommità dell'ordi-*

nata equivale al rettangolo formato dall' intero diametro e dal segmento adiacente.

658. *Nel quadrilatero formato da quattro corde, il prodotto* $BD\times AC$ *delle diagonali eguaglia i prodotti* $BA\times DC+BC\times DA$ *dei lati opposti.* Fatto l' angolo $CDF=ADB$, i triangoli CDF, ADB, in cui anche $DCF=DBA$, danno $DC:CF::DB:BA$, onde I^a. $DC\times BA=DB\times CF$; e i triangoli ADF,CDB, in cui oltre $ADF=CDB$, anche $DAF=DBC$, danno $DA:AF::DB:BC$, onde II^a. $DA\times BC=DB\times FA$. Sommo la I^a e II^a, ed ho $DC\times BA+DA\times BC=DB(CF+FA)=DB\times CA$.

Fig.56.

659. *Nel triangolo rettangolo il quadrato fatto sull' ipotenusa eguaglia la somma dei quadrati fatti sui lati*: e quindi *il quadrato fatto sopra uno qualunque dei due cateti eguaglia la differenza fra quelli fatti sull' ipotenusa e sull' altro cateto*. Infatti se il triangolo BAC sia rettangolo in A, e dal vertice A si abbassi sull' ipotenusa la normale AD, avremo (582.3°) $BD:AB::AB:BC$, e $DC:AC::AC:BC$; d'onde (630.III) $AB^2=BD\times BC$, $AC^2=DC\times BC$, e sommando $AB^2+AC^2=BD\times BC+DC\times BC=$ (630.II) $(BD+DC)BC=BC\times BC=BC^2$. Di qui chiaramente $AB^2=BC^2-AC^2$, ed $AC^2=BC^2-AB^2$. Questa celebre proposizione conosciuta col nome di *Teorema di Pittagora*, è una delle più importanti e delle più feconde della Geometria elementare.

47.

660. Ne dedurremo intanto: 1°. che una figura qualunque $F=ALMNC$ costruita sull' ipotenusa AC, eguaglia la somma delle due figure simili $F'=ADFGB$, $F''=BHIKC$ costruite sui lati. Infatti avendosi (642) $F:AC^2::F':AB^2::F'':BC^2$; sarà dunque (358) $F:F'+F''::AC^2:AB^2+BC^2$; ma $AC^2=AB^2+BC^2$; dunque $F=F'+F''$. Onde il semicircolo ACB sull' ipotenusa AB eguaglierà la somma dei semicircoli ACD, BCF sui lati AC, CB; e tolte le parti comuni AECA, CGBC, gli spazj curvilinei ADCEA+CFBGC sono eguali al triangolo ABC. Questi si chiamano le *Lunule d' Ippocrate*.

81. 82.

2°. Se nel quadrato ABDC si conduca la diagonale AD, avremo $AD^2=AB^2+BD^2$, ossia, poichè $AB=BD$, $AD^2=2AB^2$;

48.

cioè *il quadrato della diagonale è doppio del quadrato del lato*. Avremo frattanto $AB^2 : AD^2 :: 1 : 2$, e di quì (357) $AB : AD :: 1 : \sqrt{2}$; ma la ragione $1 : \sqrt{2}$ è incommensurabile, *dunque la diagonale è incommensurabile col lato del quadrato*. Avremo ancora che, posto r il raggio del circolo, il lato del quadrato inscritto sarà $r\sqrt{2}$. Fig. 48.

3°. Se dal vertice A d' un triangolo ABC si abbassi sulla base BC, o sul suo prolungamento BD la normale AD, e sia $BC=a$, $AB=b$, $AC=d$, avremo $b^2-DB^2=AD^2=d^2-DC^2=d^2-(a\mp DB)^2=$ (653.652) $d^2-a^2\pm 2a\times DB-DB^2$, preso il segno di sopra se la normale è dentro: quindi $\pm 2a\times DB=a^2+b^2-d^2$, $DB=$ (630.I) $\frac{a^2+b^2-d^2}{\pm 2a}$, e $DC=a\mp DB=\frac{a^2+d^2-b^2}{2a}$. 49.

Dunque $d^2=b^2-DB^2+(a\mp DB)^2=b^2+a^2\mp 2a\times DB$: cioè *nel triangolo acuziangolo o ottusiangolo il quadrato del lato* AC *opposto all'angolo acuto o ottuso eguaglia i quadrati dei lati* AB, BC *meno o più il doppio rettangolo fatto dal lato* BC, *sul quale, o sul cui prolungamento cade la normale, e dal segmento adiacente all'altro lato* AB: onde non vi è che il solo triangolo rettangolo, in cui il quadrato del maggior lato eguagli la somma dei quadrati degli altri due.

4°. Infine se dal vertice A si conduca AE sulla metà della base BC i triangoli EAC, BAE, nel primo dei quali la perpendicolare cade dentro, nell'altro fuori, danno come sopra $AC^2=AE^2+EC^2-2EC\times ED$, $AB^2=AE^2+EB^2+2EB\times ED$: dunque poichè $EB=EC$ si avrà sommando, $AC^2+AB^2=2(AE^2+EB^2)$. Quindi se si compie il parallelogrammo ABFC, i triangoli BFE, EFC eguali ai triangoli EAC, ABE (598.2°) daranno $FB^2+FC^2=2(EF^2+EC^2)=2(AE^2+EB^2)$. Perciò $AC^2+AB^2+FB^2+FC^2=4AE^2+4EB^2=(2AE)^2+(2EB)^2=AF^2+BC^2$: onde *in ogni parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati eguaglia quella dei quadrati delle diagonali*. 50.

Problemi relativi alle precedenti dottrine, o dipendenti dalle medesime

661. I. *Trovare un quadrato eguale in superficie ad un dato triangolo.* Supposte A, B l'altezza e la base del triangolo, si cerchi una media proporzionale M (591.II) fra $\frac{1}{2}A$ e B, o fra $\frac{1}{2}B$ ed A; e sarà M il lato del quadrato richiesto. Infatti da $\frac{1}{2}A : M :: M : B$, o da $A : M :: M : \frac{1}{2}B$, si ha (631.2°) $M^2 = \frac{1}{2}A \times B$ superficie del triangolo (632). Nel modo stesso si troverebbe il quadrato equivalente ad un parallelogrammo e ad un rettangolo.

Fig. 76. 662. II. *Costruire un triangolo eguale in superficie ad un dato poligono irregolare* ABCDE. Condotta alla diagonale CE la parallela DG che incontri in G il lato AE prolungato, e poi CG, i triangoli CGE, CDE che hanno base ed altezza eguali (549) saranno eguali in superficie (632). Dunque ABCDE = ABCG. Condotta ora la diagonale CA, e la parallela BF, e congiunta CF, si proverà egualmente il triangolo FCG = ABCG, e perciò eguale al poligono. Frattanto poichè con questo metodo si riduce qualsivoglia poligono ad un triangolo, ed è facile di far d'un triangolo un quadrato (661), perciò *può sempre trovarsi la quadratura esatta di tutte le figure rettilinee*

84. 663. III. *Trovare una figura* ALMNC *simile a due date* ADFGB, BHIKC, *ed equivalente alla loro somma.* Posti ad angolo retto i lati omologhi AB, BC, e compito il triangolo, sarà AC il lato omologo della figura cercata (660), che con questo si descriverà facilmente (623).

664. IV. *Trovare una figura simile a due date, ed equivalente alla loro differenza.* Sul lato AC della maggiore si descriva un semicircolo, in cui si applichi, come corda con l'origine al diametro, il lato omologo BC della minore, ed AB sarà evidentemente l'omologo della cercata. Così può aversi un circolo eguale alla differenza di due circoli dati.

665. V. *Costruire un quadrato che stia ad un altro quadrato dato nella ragione di* m : n.

51. Prese sull' indefinita TG due porzioni BP, AP nella data ragione di $m : n$, si descriva sopra AB come diametro la semi-

circonferenza AMB; si alzi l' ordinata PM, e si conducano le due corde AM,BM. Sopra AM, prolungata se occorra al di fuori del circolo, si prenda AD eguale al lato del quadrato dato, e da D si conduca fino all' incontro con TG la DG parallelamente a BM. Sarà DG il lato del quadrato richiesto. Infatti avendosi (579) DG : AD : : MB : AM, sarà $DG^2 : AD^2 :: MB^2 : AM^2 ::$ (657) $AB \times PB : AB \times AP :: PB : AP :: m : n$. Fig. 51.

666. VI. *Costruire una figura simile ad una data, e che stia a quella nella ragione di* m : n.

Supposto AD un lato della figura data, si cerchi col metodo precedente una retta DG tale che abbiasi $DG^2 : AD^2 :: m : n$. Sarà DG il lato omologo ad AD nella figura cercata (642), che si costruirà col metodo insegnato altrove (623).

667. VII. *Date due figure* P, Q, *costruirne una terza simile a* P, *ed equivalente in superficie a* Q.

Si cangino le figure P, Q prima in due triangoli (662), poi in due quadrati (661) che rappresenteremo con M^2, N^2; e preso un lato qualunque A della figura P, si trovi una quarta proporzionale dopo M, N, A (591), sopra la quale presa come lato omologo ad A, si costruisca una figura simile a P (623); sarà questa equivalente a Q. Infatti chiamata Y la nuova figura avremo (642) $P : Y :: A^2 : \frac{A^2 N^2}{M^2} :: M^2 : N^2 :: P : Q$; dunque $Y = Q$.

668. VIII. *Dato il perimetro* p, *e la diagonale* a *d' un rettangolo, trovarne la superficie e i lati.* Sia x uno de' lati, y l'altro, si avrà $x + y = \frac{p}{2}$, $x^2 + y^2 = a^2$, onde $y = \frac{p}{2} - x = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; quadrando e risolvendo si trova $x = \frac{p}{4} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{p^2}{16}\right)}$, $y = \frac{p}{4} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{p^2}{16}\right)}$.

669. IX. *Dati i tre lati d' un triangolo, trovarne la superficie.* Sia $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$, la normale $BD = x$, sarà $AD = \sqrt{(b^2 - x^2)}$, $DC = \sqrt{(c^2 - x^2)}$, $AD + DC = a = \sqrt{(b^2 - x^2)} + \sqrt{(c^2 - x^2)}$, e però $x = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)}$, e la superficie cercata $\frac{ax}{2} = s = \frac{1}{4}\sqrt{(4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{((b + c - a) \times (a + c - b)(a + b - c)(a + b + c))}$. Sia $a + b + c = 2q$, onde $2q - 2a = b + c - a$, $2q - 2b = a + c - b$, $2q - 2c = a + b - c$; dunque $s = \sqrt{(q(q - a)(q - b)(q - c))}$. 83.

E qui osserveremo 1°. che se C'N è il raggio del circolo inscritto nel trian-

Fig.83. golo ABC, condotte C'B, C'A, C'C e le normali C'M, C'P, sarà ABC=AC'B+BC'C+CC'A=s=C'N$\times\frac{(a+b+c)}{2}$, e C'N=$\frac{s}{q}=\sqrt{\frac{(q-a)(q-b)(q-c)}{q}}$.

2°. Supposto $c=b+d$ si avrà $s=\sqrt{(q(q-a)(q-b)^2-dq(q-a)(q-b))}$; perciò se sia $d=0$, e quindi $c=b$, cioè se il triangolo sia isoscele, avremo $s'=\ldots$ $\sqrt{(q(q-a)(q-b)^2)}>s$; dunque *di tutti i triangoli isoperimetri, e con la stessa base* a, *il massimo in superficie è l'isoscele.*

3°. Medesimamente se $a=b+d$, sarà $s'=\sqrt{(q(q-b)^3-dq(q-b)^2)}$, e se $d=0$ e quindi $a=b=c$, ossia se il triangolo è equilatero, avremo $s''=\sqrt{q(q-b)^3}>s'$; dunqoe *di tutti i triangoli isoperimetri il massimo in superficie è l'equilatero.*

670. X. *Data l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo e la ragione* m:n *dei*

84. *due lati, trovarne l'area.* Sia AC=a, AB=x, sarà BC=$\frac{mx}{n}$ e si avrà $x^2+\ldots$ $\frac{m^2x^2}{n^2}=a^2$, onde $x^2=\frac{a^2n^2}{m^2+n^2}$, e l'area richiesta $\frac{mx^2}{2n}=\frac{a^2mn}{2(m^2+n^2)}$.

83. 671. XI. *Data la ragione e la somma dei tre lati d'un triangolo, trovar l'area.* Sia AC=x, AB=y, BC=z, il perimetro $p=x+y+z$, la ragione dei lati $x:y:z::a:b:c$, sarà $x+y+z(=p):a+b+c::x:a::y:b::z:c$, e perciò $x=\ldots$ $\frac{ap}{a+b+c}$, $y=\frac{bp}{a+b+c}$, $z=\frac{cp}{a+b+c}$, e di quì l'area (669).

84. 672. XII. *Dato il perimetro d'un triangolo rettangolo e la ragione* m:n *dell'ipotenusa alla somma dei lati, trovar l'area.* Sia p il perimetro, AC=x, AB=y, BC=z; sarà $x:y+z::m:n$; e però $x+y+z(=p):x::m+n:m$, onde $x=\ldots$ $\frac{mp}{m+n}$, $y+z=\frac{np}{m+n}$, $y^2+2yz+z^2=\frac{n^2p^2}{(m+n)^2}$; ma $y^2+z^2=x^2=\frac{m^2p^2}{(m+n)^2}$; dunque l'area cercata $\frac{yz}{2}=\frac{p^2}{4}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)$.

673. XIII. *Date le superficie* S, S'' *di due poligoni regolari d'egual numero di lati* n, *l'uno inscritto, l'altro circoscritto, trovare le superficie* S', S''' *dei poligoni regolari inscritto e circoscritto di lati* 2^mn.

Si supponga in primo luogo $m=1$. In questo caso la proposizione già dimostrata (648) ci farà conoscer tosto S'. E

42. quanto ad S''', ritenuta la costruzione già fatta altrove (648), e prolungata CI fino all'incontro in M col semilato RK, e condotta AM, osserveremo che i triangoli ACO, ACK, il quadrilatero MACK doppio del triangolo MCK, e in fine il triangolo RCK, saranno respettivamente parti $2n^{sime}$ dei poligoni di lati n e $2n$ inscritti, e dei poligoni di lati $2n$ ed n circoscritti. Avremo perciò $S=2n\times$

ACO, $S'=2n\times$ACK, $S''=2n\times$RCK, $S'''=4n\times$MCK; e di qui Fig.42.
1°. S: S' :: ACO : ACK :: (640) CO : CK :: CO : AC :: (577) CK : CR :: (583) MK : MR :: (640) MCK : RMC; d'onde 2°. S: $S+S'$: : MCK : MCK+RMC : : MCK : RCK : : $\frac{1}{2}S'''$: S''; dunque $S'''=\frac{2S\times S''}{S+S'}$.

Avute in tal guisa le superficie dei poligoni inscritto e circoscritto di lati $2n$, la proposizione citata (648), ci farà conoscere quella del poligono inscritto di lati $4n$, e dalla formula precedente, fatte le dovute sostituzioni, avremo poi quella del poligono simile circoscritto. Questi due ci porteranno nel modo stesso a conoscere i poligoni inscritto e circoscritto di lati $8n$; col qual metodo sempre continuando potremo giungere in fine ad aver quelli di lati $2^m n$. Così siccome il lato del quadrato circoscritto eguaglia il diametro $2r$, e il lato del quadrato inscritto è (660.2°) $r\sqrt{2}$, e quindi per questo abbiamo (628) $S=2r^2$, e per quello $S''=4r^2$, sarà $S'=$ (649) $\sqrt{S\times S''}=2r^2\sqrt{2}$ la superficie dell'ottagono inscritto, e perciò $S'''=8r^2(\sqrt{2}-1)$ quella dell'ottagono circoscritto. Con queste troveremo per la superficie del poligono inscritto di 16 lati $S'=4r^2\sqrt{(2-\sqrt{2})}$, e per quella del poligono simile circoscritto $S'''=\frac{16r^2(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{(2-\sqrt{2})}+\sqrt{2}}$, ec.

674. Ecco frattanto i coefficienti numerici di r^2 calcolati approssimatamente per ciascuna di queste espressioni fino a quelle spettanti ai poligoni di 32768 lati, e che potran servirci utilmente per l'importante problema che segue

N°. dei lati	Coefficienti di r^2 in S	in S''	N°. dei lati	Coefficienti di r^2 in S	in S''
4	2,0000000	4,0000000	512	3,1415138	3,1416321
8	2,8284271	3,3137085	1024	3,1415730	3,1416025
16	3,0614675	3,1825979	2048	3,1415877	3,1415951
32	3,1214452	3,1517249	4096	3,1415914	3,1415932
64	3,1365485	3,1441184	8192	3,1415923	3,1415928
128	3,1403311	3,1422236	16384	3,1415925	3,1415927
256	3,1412773	3,1417504	32768	3,1415926	3,1415926

Questi valori moltiplicati per r^2 daranno dunque la superficie

dei respettivi poligoni. Che se $r=1$, rappresenteranno essi stessi la superficie, purchè si sottintendano moltiplicati per il quadrato unità (626). Più semplicemente potremo e dovremo considerargli come i rapporti che il quadrato del raggio ha con la superficie del corrispondente poligono. Infatti se questa si chiami S, e K sia il relativo coefficiente di r^2, avremo $S=Kr^2$, e quindi $K=\frac{S}{r^2}$. Queste avvertenze, coerenti a quanto anche altrove accennammo (629), sono essenzialissime per ben comprendere come mediante un numero possa rappresentarsi una superficie.

675. XIV. *Trovare il valore approssimato della superficie del circolo.* Nel quadro dei valori approssimati dei coefficienti di S, S'' esposto nel problema precedente, si sarà potuto osservare come gli uni di questi valori vanno sempre diminuendo, gli altri sempre crescendo; e quelli a questi accostandosi in guisa che negli ultimi due poligoni si eguagliano fra di loro, almeno fino alla settima decimale, limite a cui abbiamo portate le approssimazioni; di modo che chiamato K l'ultimo coefficiente, spettante in comune ai poligoni inscritto e circoscritto di 32768 lati, abbiamo $S=Kr^2$ per la superficie approssimata sì del primo, che del secondo; le quali espressioni, per quanto non del tutto esatte, formano però la massima e quasi anzi la total parte dei veri valori (80). Ora è chiaro che la superficie πr^2 del circolo (637), presa dentro i limiti dell'approssimazione assegnata, non potrà nè esser maggiore, nè esser minore di Kr^2; poichè nel primo caso eccederebbe quella del poligono circoscritto S'', nel secondo sarebbe minore di quella del poligono inscritto S, conseguenze in ambedue i casi assurde. Sarà perciò $\pi r^2=Kr^2$, e quindi $\pi=K=3{,}1415926$; valore che nel tempo stesso rappresenta la superficie del circolo del raggio $r=1$, e il rapporto del quadrato del raggio r alla superficie del circolo, qualora r sia qualunque.

676. Poichè, supposta C la circonferenza, si ha $C=2r\pi$ (622), sarà dunque $\pi=\frac{C}{2r}$, cioè lo stesso valore di π dà il rapporto approssimato del diametro alla circonferenza. Invano si è dagli antichi e moderni tentato di avere esattamente questo rapporto. *Archimede*, con un metodo analogo al precedente, giunse a sta-

bilirlo di 7 : 22. Molti secoli dopo *Adriano Mezio* Olandese mostrò che poteva meglio e più rigorosamente rappresentarsi con 113 : 355. Infine *Van-Coulen*, *Machin* e *Lagni* pervennero dopo ostinate fatiche a darlo del valore seguente, esatto fino alla 127 decimale,

1 : 3,1415926535897932384626433832795028841971693993 75105820974944592307816406286208998628034825342117 0679821480865132823066470938446

Poichè l'uso di questo numero è frequentissimo, ne aggiungiamo il logaritmo, cioè

Log. 3,1415ec = 0,4971498726941338543 5 ec

677. Se $2r=1$, si ha $C=\pi$, e il valore di π corrisponde allora a quello della circonferenza, cioè dà il valore della lunghezza lineare della circonferenza relativamente a quella del diametro, presa come unità di misura o di confronto: se poi sia $r=1$, π rappresenterà la lunghezza lineare della semicirconferenza.

Sia frattanto u la lunghezza lineare di un arco preso nel circolo del raggio qualunque r, e g^o, g', g'' il numero dei gradi, o dei minuti, o dei secondi contenuti in quest'arco. Poichè la lunghezza degli archi è proporzionale al numero dei loro gradi, minuti e secondi, è chiaro che potremo istituire le proporzioni $r\pi : u :: 180^o : g^o :: 180^o . 60' : g' :: 180^o . 60' . 60'' : g''$, d'onde $g^o = \frac{u}{r} . \frac{180^o}{\pi}$, $g' = \frac{u}{r} . \frac{10800'}{\pi}$, $g'' = \frac{u}{r} . \frac{648000''}{\pi}$. Preso $u=r$, avremo $g^o = \frac{180^o}{\pi}$, $g' = \frac{10800'}{\pi}$, $g'' = \frac{648000''}{\pi}$: espressioni che dunque ci danno il numero dei gradi, dei minuti e dei secondi contenuti in un arco la cui lunghezza eguagli quella del raggio del circolo. Queste quantità sogliono compendiosamente rappresentarsi per r^o, r', r''; con che le tre espressioni primitive di g^o, g', g'' si cangeranno nelle equivalenti $g^o = \frac{ur^o}{r}$, $g' = \frac{ur'}{r}$, $g'' = \frac{ur''}{r}$, dalle quali si apprende *che volendo conoscere il numero dei gradi contenuti in un arco della lunghezza lineare* u, *o, come suol dirsi, volendo convertire un arco in gradi, basta dividere l'arco* u *per il raggio del circolo a cui appartiene, e quindi moltiplicare il quoziente per* r°, *o per* r', *o per* r'', *secondochè si vuole il risultamento o in gradi, o in minuti, o in secondi.* A facilitare queste operazioni, che spessissimo occorrono nella Fisica, ponghiamo qui a comodo degli studiosi i logaritmi di r^o, r', r''.

$Lr^{o} = 1,75812\ 26324\ 09172\ 21545$
$Lr^{I} = 3,53627\ 38827\ 92815\ 84796$
$Lr^{II} = 5,31442\ 51331\ 76459\ 48047$

678. Reciprocamente, poichè dalle precedenti relazioni abbiamo $u = \frac{gr}{r^{o}}, = \frac{gr}{r^{I}}, = \frac{gr}{r^{II}}$, così *volendo conoscere la lunghezza lineare dell'arco* u *che nel circolo del raggio* r *contiene un dato numero* g *di gradi, o di minuti, o di secondi, o, come suol dirsi, volendo rettificare un arco dato in gradi, bisogna moltiplicare per il raggio* r *il numero* g *dei gradi, o dei minuti, o dei secondi dati, e dividere il prodotto per* r^{o} *nel primo caso, per* r^{I} *nel secondo, per* r^{II} *nel terzo.* Su questi principj è stata costruita la *Tavola degli archi circolari ridotti in parti del raggio*=1, che trovasi al termine di questo Tomo, appiè delle pag. XXXIV e XXXV; l'uso della quale è così facile a comprendersi che non reputiamo necessario di trattenerci a farlo conoscere.

679. Se si suppone $r=1$ e si fa $g=1^{o}, =1^{I}, =1^{II}$, tanto dalle prime che dalle seconde formule si avrà $arc.1^{o} = \frac{1}{r^{o}}$, $arc.1^{I} = \frac{1}{r^{I}}$, $arc.1^{II} = \frac{1}{r^{II}}$, d'onde $r^{o} = \frac{1}{arc.1^{o}}$, $r^{I} = \frac{1}{arc.1^{I}}$, $r^{II} = \frac{1}{arc.1^{II}}$; valori che sostituiti daranno altresì $g^{o} = \frac{u}{r.arc.1^{o}}$, $g^{I} = \frac{u}{r.arc.1^{I}}$, $g^{II} = \frac{u}{r.arc.1^{II}}$; e del pari $u = rg.^{o}arc.1^{o}, = rg.^{I}arc.1^{I}, = rg.^{II}arc.1^{II}$. Sarà poi $log.arc.1^{o} = colog.r^{o}$, $log.arc.1^{I} = colog.r^{I}$, $log.arc.1^{II} = colog.r^{II}$. Infine se il valore di r^{II} si divida per m si avrà $\frac{r^{II}}{m} = \frac{1}{m\,arc.1^{II}} = \frac{1}{arc.m^{II}}$. E se m^{II} sia così piccolo che il suo arco si confonda col suo seno, sarà $\frac{r^{II}}{m} = \frac{1}{sen.m^{II}}$: e quindi $sen.m^{II} = arc.m^{II} = \frac{m}{r^{II}}$.

Fig. 57. 680. XV. *Date le corde* AC, BC *di due archi, ossia i loro rapporti* m : 1, n : 1 *col raggio* r, *trovare la corda* AB *dell'arco* ACB, *ossia il suo rapporto* d : 1 *col raggio*. Condotto il diametro CD, avremo (658) $CD \times AB = AC \times BD + CB \times AD$. E poichè $CD = 2r$, e in ipotesi $AB = dr$, $AC = mr$, $CB = nr$, e i triangoli rettangoli (568. 2.°) CBD, CAD danno (659) $BD = \sqrt{(CD^2 - CB^2)} = r\sqrt{(4-n^2)}$, $AD = \sqrt{(CD^2 - AC^2)} = r \times \sqrt{(4-m^2)}$, troveremo sostituendo, $d = \frac{1}{2}m\sqrt{(4-n^2)} + \frac{1}{2}n\sqrt{(4-m^2)}$, d'onde il rapporto cercato. Se le due corde sono eguali

avremo $m=n$, e $d=m\sqrt{(4-m^2)}$, equazione da cui potrà aversi il rapporto fra i perimetri dei poligoni regolari inscritti di lati p e $2p$, e quindi quello delle loro superficie (635).

681. XVI. *Date le corde* AB, AC *di due archi, ossia i loro rapporti* d : 1, m : 1 *col raggio, trovar la corda dell'arco* CB *o il rapporto* n : 1 *di questa corda col raggio*. Ripreso il primo valor di d (680), se ne tragga il valore dell' incognita n; troveremo $n=\frac{1}{2}m\sqrt{(4-d^2)}-\frac{1}{2}d\sqrt{(4-m^2)}$. Se l'arco ACB è doppio dall' arco CB sarà $n=m$, e come sopra $d=m\sqrt{(4-m^2)}$, d' onde $m=n=\sqrt{(2-\sqrt{(4-d^2)})}$. Di qui si ha il modo di conoscere il valor del lato di un poligono regolare inscritto di $2p$ lati, quando si conosca quello di lati p. Così siccome pel lato del quadrato inscritto abbiamo $rd=r\sqrt{2}$(660.2°)e quindi $d=\sqrt{2}$, per quello dell' ottagono avremo $m=\sqrt{(2-\sqrt{2})}$; fatto $d=\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ avremo in seguito pel lato del poligono di 16 lati $m=\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}$ ec., e in generale pel lato del poligono di 2^q lati si troverà $m=\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\text{ec.})})})})}$, esteso fino a $q-1$ il numero dei radicali.

Fig.57.

Costruzion geometrica dell' Equazioni determinate del primo e secondo grado

682. Si sono precedentemente veduti più esempj ove è impiegata l'Algebra nella soluzione dei Problemi geometrici. Questo metodo conduce ad un'equazione finale ove l'incognita rappresenta la linea cercata, e il suo valore è dato per mezzo di un'espressione analitica, le cui quantità esprimono le linee date e i loro rapporti di grandezza e di posizione. Per la piena soluzione del problema è necessario saper *costruire* quest' equazione, cioè saper rilevare dalla medesima per quali operazioni geometriche possa giungersi ad aver effettivamente la linea cercata. Ed ecco con quali principj vi giungeremo.

683. Se si ha $\frac{ac}{b}=x$, si prenderà (594.1°) una quarta proporzionale dopo b,a,c, e si avrà il valore di x. Se $x=\frac{abc}{de}$, si prenderà $m=\frac{ab}{d}$, e dipoi $n=\frac{cm}{e}$, e si avrà $n=x$: e nel modo stesso si costruirà $\frac{aa}{b}$, $\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^3}$, ec. Ma se il numerator del rotto sia complesso, ed abbiasi $\frac{abc+ced+mnp}{rq}$, si porrà $k=\frac{abc}{rq}$, $i=\frac{ced}{rq}$ ed $f=$

$\frac{mnp}{rq}$, ed unendo insieme k, i, f, si avrà una retta eguale alla frazione proposta. Se poi sieno complessi il numeratore e il denominatore, come $\frac{abc+cfg}{mk+nh}$, si prenderà $l=k+\frac{nh}{m}$, e la frazione diventerà $\frac{abc+cfg}{lm}$, che si costruirà come sopra. Parimente avendo da costruire $x=\frac{abcc+q^3h+noqk-m^3p}{q^2i-klq+cmd}$, si prenderà $f=i-\frac{kl}{q}+\frac{cmd}{qq}$, e si avrà $x=\frac{abcc}{fqq}+\frac{qh}{f}+\frac{okn}{fq}-\frac{m^3p}{fqq}$ che si sa costruire.

Talora la costruzione è più facile: così $x=\frac{ab+bc}{c+d}$ è quarta proporzionale dopo $c+d$, $a+c$, b; $x=\frac{a^2-b^2}{c}$ è quarta proporzionale dopo c, $a+b$, $a-b$; ed $x=\frac{abc^2-a^2b^2}{abc+c^3}$, presa $m=\frac{ab}{c}$, diventa $x=\frac{cm-mm}{m+c}$, quarta proporzionale dopo $m+c$, $c-m$, m.

684. Passiamo al secondo grado. Se sia $x=\sqrt{am}$, prendo una media proporzionale tra a ed m, e questa dà x. Se $x=\sqrt{(ab+bc)}$, prendo una media proporzionale tra b e $a+c$; se $x=\sqrt{(a^2+bc)}$, fatto $m=\frac{bc}{a}$, sarà $x=\sqrt{a(a+m)}$ che si sa costruire: e se $x=\sqrt{\frac{ab^2+cd^2}{b+c}}$, presa $m=\frac{ab}{b+c}$ ed $n=\frac{cd^2}{b(b+c)}$, verrà $x=\sqrt{b(m+n)}$.

685. Sia ora $x=\sqrt{(a^2-b^2)}$: una media proporzionale tra $a+b$ ed $a-b$ darà x. Dovendo costruire $\sqrt{(a^2+b^2)}$, si prenda $m=\frac{b^2}{a}$, e poi una media proporzionale tra a ed $a+m$: ma è più semplice il valersi d' un triangolo rettangolo ACB, i cui lati AC, AB sieno a e b; l' ipotenusa CB sarà $\sqrt{(a^2+b^2)}$. Se si abbia $\sqrt{(ab+bc+df)}$, si prenderà (683) $m=\frac{ab}{d}+\frac{bc}{d}+f$, e il radicale diventerà $\sqrt{dm}$. Ma data $\sqrt{(a^2-\frac{f^2(c^2+d^2)}{ab+cd})}$, si farà $c^2+d^2=m^2$, $ab+cd=n^2$, $\frac{fm}{n}=p$, e verrà $\sqrt{(a^2-p^2)}$. (Fig. 63.)

686. Per costruir $\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2+\text{ec})}$ si prenda AB$=a$, e condotta BC$=b$ normale ad AB, sarà CA$^2=a^2+b^2$: condotta pure CD$=c$ normale a CA, sarà AD$^2=a^2+b^2+c^2$; condotta DE$=d$ normale a DA, sarà AE$^2=a^2+b^2+c^2+d^2$, ec; d'onde l' ultima ipotenusa AF$=\sqrt{(a^2+b^2+c^2+\text{ec.})}$. Se alcuni dei quadrati sieno negativi, si prenda un sol quadrato m^2 eguale ai positivi, e un altro n^2 eguale ai negativi, e si avrà $\sqrt{(m^2-n^2)}$ che si sa costruire. (64.)

687. Posson ridursi a queste tutte l' altre quantità radicali. Sia $\sqrt{(bc+am+dn)}$; si farà $bc=i^2$, $am=k^2$, $dn=l^2$, e dovrà costruirsi $\sqrt{(i^2+k^2+l^2)}$.

688. Avendo più radicali come $\sqrt{(f^2+g\sqrt{(k^2-b^2)})}$, si fa $\sqrt{(k^2-b^2)}=c$ (685) e dovrà costruirsi $\sqrt{(f^2+gc)}$ (684). Per costruire $\sqrt[4]{a^3c}$, farei $ac=m^2$, e avrei $\sqrt[4]{a^2m^2} = \sqrt{am} = \sqrt[4]{a^3c}$. Così $\sqrt[4]{abcd}$ si costruisce prendendo $ab=m^2$, $cd=n^2$, onde $\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{mn}$. Infine $\sqrt[4]{(a^2fg+bcfk-a^3f)}$, fatto $m=\frac{fg}{a}+\frac{bcfk}{a^3}-f$, diviene $\sqrt[4]{a^3m}$. In generale ogni quantità composta di radicali del secondo grado, del quarto, dell' ottavo ec., può sempre costruirsi col circolo.

689. Prima di venire agli esempj, si noti: 1°. Che le quantità geometriche, come linee, superficie ec., son *date* o *di posizione* o *di grandezza*, o *di posizione e di grandezza*, quando o la loro situazione, o la loro misura, o l' una e l' altra sono invariabilmente assegnate. Se una quantità dicasi solamente *data*, s' intende *di grandezza*, e se dicasi *dato* un punto, s'intende data la sua distanza da una quantità che è data almeno di posizione. 2°. Che ad ogni quantità algebrica rappresentante una linea si dà il nome di *dimensione* (143), e i termini di un' espressione sono d' una, di due, di tre dimensioni ec. secondo che risultano dal prodotto d' una, di due, di tre ec. di tali quantità. 3°. I termini di due dimensioni rappresentano una superficie, di tre un solido. 4°. Se il termine è frazionario, la sua dimensione si ha sottraendo da quella del numeratore la dimensione del denominatore. Così $\frac{a^3b}{c^2}$, $\frac{a^5b^3}{c^3d^2}$ sono l' uno della seconda, l' altro della terza dimensione. 5°. Se un termine della dimensione m si alzi alla potenza n diviene della dimensione mn, se poi all' opposto venga estratta la radice n, il termine diverrà della dimensione $\frac{m}{n}$. 6°. Talvolta un termine di una dimensione apparentemente inferiore può in effetto esser di dimensione superiore; e ciò accade qualora uno o più fattori sono eguali all' *unità*, cioè che la linea dai medesimi rappresentata si riguardi come *unità* di confronto, o di misura in modo che un' altra linea la quale, per esempio sia m volte maggiore di quella, venga rappresentata con m. 7°. Infine ogni espressione algebrica da costruirsi deve essere *omogenea* o avere tutti i termini alla medesima dimensione: se ciò non sia, i termini di dimensione inferiore si intenderanno moltiplicati tante volte per la linea *unità*, quanto è necessario onde ridurgli alla dimensione superiore. Così in $\frac{a^3+b}{a^2+c}$ deve supporsi c moltiplicato per la linea *unità*, e b per il suo quadrato. Che se per maggior chiarezza si rappresenti la linea unità con f, l' espressione resa omogenea diverrà $\frac{a^3+bf^2}{a^2+cf}$.

690. Per fare adesso qualche applicazione delle antecedenti dottrine, e mostrare con qual facilità e sicurezza l'analisi algebrica conduca non tanto alla soluzione, quanto alla costruzione di molti Problemi geometrici, proponiamoci in primo luogo di dividere una data retta AB in media ed estrema ragione, problema già ri- Fig. 63.

Fig.63. soluto altrove per via sintetica (591.V). Fatta $AB=a$, e chiamato x il maggior segmento, sarà $a-x$ il minore, ed avremo $a:x::x:a-x$, d'onde l'equazione $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}a^2)}$. Per costruirla pongo ad angolo retto $AB=a$ con $AC=\frac{1}{2}a$. Uniti B,C e fatta $BC=n$ sarà $n=\pm\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}a^2)}$, e quindi $x=-\frac{1}{2}a\pm n$. Presa dunque sopra BC la porzione $CD=AC=\frac{1}{2}a$ sarà $BD=n-\frac{1}{2}a$, onde avuto riguardo al segno superiore della formula, il solo che possa aver luogo siccome è evidente, avremo $x=BD$: perciò se sopra AB si prenda $BF=BD$, sarà in F il punto cercato di divisione. E tale è appunto la costruzione che già insegnammo (*ivi*).

691. Sieno date in secondo luogo l'altezza a e le differenze b, c dei lati e dei segmenti di un triangolo, e vogliasi costruire questo triangolo. Si supponga già co-

65. struito, e sia ABC. Condotta del vertice B la normale BD, sarà $BD=a$; e fatto il minor segmento $AD=x$, avremo $DC=c+x$, $AB=\sqrt{(a^2+x^2)}$, $BC=\sqrt{(a^2+(c+x)^2)}$ e $BC-AB=b=\sqrt{(a^2+(c+x)^2)}-\sqrt{(a^2+x^2)}$; d'onde $x=-\frac{c}{2}\pm\ldots\ldots$ $\frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^2+c^2-b^2}{c^2-b^2}\right)}$. Poste dunque ad angolo retto $BC=b$ e l'indefinita BP, applico da C sopra BP l'obliqua $CE=c$, e fo $BE=m$. Sarà $m^2=c^2-b^2$, onde $x=-\frac{c}{2}\pm\frac{b}{2m}\sqrt{(4a^2+m^2)}$. Prendo $BD=2a$ sull'indefinita BP, e $BF=BE=m$ sul prolungamento di BC, e uniti F,D fo $FD=n$; dunque $n^2=4a^2+m^2$, ed $x=-\frac{c}{2}\pm\frac{bn}{2m}$. Prolungo EB in G finchè sia $EG=FD=n$, ed EC fino all'incontro in H con GH perpendicolare ad EG. Avremo $EB:BC::EG:GH=\frac{BC\times EG}{EB}=\frac{bn}{m}$; Dunque $x=\frac{1}{2}(GH-c)$, onde preso $HI=EC=c$, e divisa GI in mezzo in K sarà GK il minor segmento, KH il maggiore; e se da K si alzi normalmente $KL=a$, il triangolo GLH sarà il cercato. Volendone la dimostrazione sintetica, col centro L e raggio LG si descriva il circolo GINMG, e si prolunghi HL in M. Avremo (654) $MH^2+HN^2=2MH\times HN+MN^2=2MH\times HN+4LG^2=$ (589) $2GH\times HI+4GK^2+4KL^2=2GH\times HI+GI^2+BD^2=$ (654) $GH^2+IH^2+BD^2=GH^2+EC^2+BD^2=GH^2+EB^2+BC^2+BD^2=GH^2+FB^2+BC^2+BD^2=GH^2+FD^2+BC^2=GH^2+EG^2+BC^2=EH^2+BC^2$. D'altronde i triangoli simili EBC, EGH danno $EH:GH::EC:BC$; dunque $EH\times BC=GH\times EC=GH\times IH=$ (589) $MH\times HN$; dunque $MH^2+2MH\times HN+HN^2=EH^2+2EH\times BC+BC^2$, ed $MH^2-2MH\times HN+HN^2=EH^2-2EH\times BC+BC^2$, e quindi (652.653) $MH\pm HN=EH\pm BC$ d'onde $HN=BC=b$: cioè la differenza HN dei lati LH, LG è del valor proposto; e come per costruzione egualmente lo sono l'altezza $KL=a$ e la differenza $IH=c$ dei segmenti, così il triangolo GLH ha tutte le condizioni richieste.

Superficie piane, o piani non circoscritti da perimetro alcuno

692. *La superficie piana* o il *piano* è, siccome abbiamo già detto (494), quello su cui posson condursi per ogni verso linee rette. Da questa definizione risulta: 1°. che *se due piani si tagliano, la loro intersezione comune è una linea retta*: è una linea, perchè i due piani son superficie e non hanno grossezza; ed è retta, perchè se per due punti qualunque comuni ai piani si conduca una retta, questa dovrà essere nell' uno e nell'altro piano: dunque sarà la loro intersezione comune. 2°. *Tre punti* B, A, C *non posti in linea retta determinano la posizione d' un piano* BC; poichè può esservi un' infinità di piani diversi HA, BC, ec. coi due punti comuni A, B, ma un solo di questi piani può passar per il punto determinato C. Onde 3°. *Tre punti non posson esser comuni a più d' un piano, se non sieno in linea retta.* 4°. *Due rette* CA, AD *che si tagliano in* A *sono in un medesimo piano* PQ; poichè i tre punti C, A, D determinano la posizione delle due rette CA, AD (491.3°); e come i due punti C, D posson prendersi dovunque ad arbitrio in tutta l' estensione indefinita delle due rette, e i punti intermedj fra A e D, fra A e C debbon tutti coincider col piano che passa per gli estremi A e D, A e C (494, così le due rette comunque si prolunghino debbon sempre mantenersi nel medesimo piano. Perciò 5°. *i due lati d' un angolo, e i tre d' un triangolo determinano la posizione di un piano.* 6°. *Un piano è altresì determinato da due parallele* AD, BC, perchè condotta la secante CA, il piano delle due rette CA, AD sarà quello delle due parallele.

Fig. 85. 75.

693. *Una retta* AP *normale a due rette* PB, PC *nel loro punto* P *d' intersezione, è normale anche al piano* BPC *che esse determinano, ovvero è normale ad ogni altra retta* PQ *che sia stesa sul medesimo piano e passi per il punto* P. Infatti se per qualunque punto Q di PQ si conduca BC in modo che sia BQ=QC (591.IV), i triangoli BPC, BAC daranno (660.4°)

86.

Fig. 86. $PC^2+BP^2=2PQ^2+2QC^2$, $AC^2+AB^2=2AQ^2+2QC^2$. Sottraendo la prima equazione dalla seconda, e osservando che dai triangoli APC, APB rettangoli in P abbiamo $AC^2-PC^2=AP^2$, $AB^2-PB^2=AP^2$, si troverà $AQ^2=AP^2+PQ^2$; dunque ancora il triangolo APQ è rettangolo in P (660.3°), e perciò AP è normale alla retta qualunque PQ.

694. Quindi 1°. *Da un punto* A *fuori di un piano, non può condursi sopra di esso che una sola normale* AP; e viceversa *non può alzarsi che una sola normale da un punto* P *di un piano*. Perchè se AC potesse esser normale come AP, il triangolo APC avrebbe due angoli retti; e se PD potesse esser normale come PA, supposta PC l'intersezione del piano CPB col prolungamento del piano APD, le due rette AP, PD sarebbero ambedue normali a PC sul medesimo punto P, e nello stesso piano PAC; il che è impossibile (504). 2°. *La distanza da un punto ad un piano si misura dalla normale condotta da questo punto sul piano*; perchè steso il piano APC per la normale AP e per l'obliqua qualunque AC, abbiamo sempre $AP<AC$ (519).

695. *La retta* CP, *che sul piano* CPB *unisce il piede* C *dell' obliqua* AC *col piede* P *della perpendicolare* AP, *fa con l' obliqua un angolo minore di quello fatto con la medesima da qualunque altra retta* CB, *condotta per* C *sullo stesso piano* CPB. S' immagini condotta l' obliqua AB ad un punto qualunque B di CB, e nel piano triangolare CAB la normale AQ sulla base CB. Presa quindi AC come diametro, si suppongano descritte due semicirconferenze, una nel piano APC, l'altra nel piano ACB. Gli angoli APC, AQC essendo retti, la prima delle due semicirconferenze passerà per P, l'altra per Q (568.2°), ed avranno respettivamente per corde AP, AQ. Ma abbiamo $AP<AQ$ (519), e le due semicirconferenze son descritte con raggi eguali, dunque l'arco che verrà sotteso da AP sarà minore di quello sotteso da AQ (497.5°), e l'angolo inscritto ACP, misurato dalla metà del primo (568), sarà minore dell'angolo inscritto ACQ misurato dalla metà del secondo. Perciò l'angolo ACP, comecchè minore di tutti gli altri infiniti che l'obliqua AC fa da

ogni parte col piano, sarà quello che determinerà la vera inclinazione dell' obliqua sul piano. Fig 86.

696. Se si supponga BP=PC i triangoli rettangoli APB, APC saranno eguali, e perciò 1°. AB=AC, *ang*. ABP=*ang*. ACP; cioè *due o più oblique, che partendosi dallo stesso punto della perpendicolare incontrano il piano a distanze eguali dal piede della medesima, sono eguali ed egualmente inclinate sul piano*. Si proverebbe egualmente che quelle le quali incontrano il piano a distanze maggiori son maggiori e più inclinate, e viceversa: onde 2.° *tutte le oblique eguali terminano alla circonferenza di un circolo che ha il piede della normale per centro*. 3°. Per abbassare una normale da un punto qualunque *A* fuori del piano, basterà prendere su questo tre punti equidistanti da *A*, e fatta passare per i medesimi una circonferenza (534), il centro di questa determinerà il piede cercato della normale.

697. Che se BC sia normale a PC, avremo $AB^2=AP^2+BP^2=AC^2-PC^2+PC^2+BC^2=AC^2+BC^2$, e in conseguenza BC sarà normale anche ad AC (660.3°), e quindi a tutto il piano APC (693). Dunque se nel prolungamento del piano APC si conduca da C la CE parallela ad AP, saranno retti gli angoli ECP (547), ECB (693), e perciò anche EC sarà perpendicolare al piano BPC; onde *se due rette son parallele, e l' una è perpendicolare ad un piano, lo è necessariamente anche l' altra*.

698. Medesimamente *due rette* AB, RT *normali ad un medesimo piano* MN *son parallele fra loro*: altrimenti elevando da R una parallela ad AB, questa pure egualmente che RT dovrebbe esser normale al piano sul punto R (697), e perciò a tutte le rette che posson condursi per questo punto sul piano (693); il che è già stato dimostrato impossibile (694.1°). 85.

699. Perciò *due rette parallele ad una terza son parallele tra loro*: poichè immaginato un piano perpendicolare alla terza, questo dovrà esser perpendicolare anche a ciascuna dell' altre due (697), le quali perciò dovranno esser parallele fra loro (698).

700. Suppongo adesso che due piani MT, PG si seghino lungo la retta AB, e che da due punti qualunque C,D di AB si 87.

Fig. 87. conducano normalmente ad AB le rette EC,ID sull' uno, ed FC, HD sull' altro. Dico che gli angoli ECF,IDH saranno eguali. Infatti condotte nei due dati piani le rette MV ed RP parallele ad AB, i piani triangolari ECF, IDH normali in forza della costruzione ad AB (693), saranno pure normali ad MV, RP (697); onde i due lati EC, ID normali tra le parallele MV,AB, i due FE, HI normali fra le parallele MV,RP e i due FC,HD normali fra le parallele RP, AB saranno respettivamente eguali fra loro (549); dunque saranno pure eguali i triangoli ECF, IDH, e perciò anche i loro angoli C,D.

701. Quindi, a qualunque punto di AB si trasporti il piano normale FCE, l'angolo C sarà sempre esattamente contenuto fra i piani MT,PG in modo che i lati EC,FC si troveranno costantemente l'uno sul piano MT, l'altro sopra PG : è dunque chiaro che quest' angolo potrà servire di misura alla loro inclinazione: e perciò *l' inclinazione di due piani è determinata dall' angolo che fanno fra loro due normali respettivamente condotte sull' uno e sull' altro ad uno stesso qualunque punto dell' intersezione comune.*

702. Dunque 1°. *un piano che ne incontra un altro fa con esso due angoli la cui somma è* 180°. 2°. *Nell' intersezione di due piani gli angoli opposti sono eguali.* 3°. *Se più piani si tagliano sulla stessa retta la somma di tutti gli angoli sopra e sotto l' intersezione è di* 360°. 4°. *Un piano che ne taglia due o più paralleli fa con essi gli angoli alterni eguali, e se è normale ad uno è normale anche agli altri,* ec.

85. 703. Inoltre *se* AB *sia normale al piano qualunque* MN, *anche ogni piano* HD *steso lungo* AB *sarà normale ad* MN. Infatti poichè AB è normale a DE, intersezione comune dei due piani (693), condotta CA normale a DE sul piano MN, l'angolo BAC misurerà l'inclinazione di MN con HD (701) : or quest' angolo è retto (693); dunque i due piani son normali.

704. Del pari *se il piano* FE *sia normale al piano* MN, *e da un punto* B *di* FE *si conduca* BA *normale all' intersezione comune* DE, *anche* BA *sarà normale al piano* MN. Infatti condotta sul piano MN la CA normale a DE, l'angolo BAC, che misu-

ra l'inclinazione dei due piani normali (701), sarà retto: dunque AB sarà normale anche a CA, e perciò a tutto il piano MN. Fig.85.

705. *E se due rette* CA, AE *son normali alla retta* AB *condotta sul piano* HD, *tutto il piano* MN *steso per* CA, AE *sarà normale ad* HD. Infatti condotta nel piano MN la RA normale all'intersezione ED dei due piani HD, MN, l'angolo RAB, che misurerà l'inclinazione dei due piani (701), sarà retto (693).

706 *Se due piani* DH, CT *non paralleli son normali ad un terzo* PQ, *anche* BA *loro intersezione sarà normale a* PQ; poichè condotte nel piano PQ le AG, AL l'una normale ad ED e perciò al piano DH (704), l'altra a CR e quindi al piano CT, queste saranno ambedue normali a BA (693), che dunque sarà normale a PQ. Quindi *le intersezioni di tre piani normali sono esse pure tra loro normali.*

707. *Se una retta è parallela a due piani, sarà parallela anche alla loro intersezione*; perchè fatto passar per la retta un piano normale, questo sarà normale anche ai due piani dati (702.4°), e perciò anche alla loro intersezione comune (706), che per conseguenza sarà parallela alla retta data (698).

708. *Se la retta* VM *è parallela alla retta* AB *stesa sul piano* PG, *sarà parallela anche al piano* PG, *cioè comunque prolungata non potrà incontrarlo giammai*; poichè fatto passare per le parallele il piano VMNT, la VM che in tutto il suo prolungamento deve mantenersi sempre su questo piano (692.4°) non potrebbe incontrar l'altro piano se non lungo il prolungamento di BA, intersezione comune di ambedue. Ma VM non può incontrarsi con BA sua parallela (543), dunque neppur con PG. 87.

709. Da ciò si deduce: 1° *che una retta parallela all'intersezione di due piani, è parallela ad ambedue.* 2°. *Se si abbiano due rette* a, b *situate in piani diversi e non parallele, si potrà sempre far passare per la retta* a *un piano parallelo alla retta* b. Poichè condotta per un punto qualunque della retta *a* una terza retta *c* parallela alla retta *b* (548), la retta *b* sarà parallela al piano che passa per *a* e per *c*. 3°. Nel modo stesso potrà farsi passare per *b* un piano parallelo alla retta *a*. Condotto allora per *a* un nuovo piano perpendicolare ai due piani pa-

ralleli (702.4°), e dal punto ove esso attraversa la retta *b* alzata lungo il piano una normale a *b*, questa sarà normale insieme all' una e all'altra retta *b* ed *a*, e determinerà la più corta loro distanza.

710. *Se un piano taglia due piani paralleli, le intersezioni son parallele*; poichè se tali non fossero, siccome appartengono allo stesso piano secante, s'incontrerebbero, e con esse dovrebbero pure incontrarsi i due piani a cui respettivamente appartengono, i quali in conseguenza non sarebbero più paralleli, contro l'ipotesi.

711. *Due piani perpendicolari ad una medesima retta son paralleli fra loro*; perchè se si incontrassero, condotte da un punto qualunque della loro comune intersezione due rette per l'uno e l'altro piano, alle due estremità della normale, queste non potrebbero essere ambedue perpendicolari alla normale (518), nè questa contro l'ipotesi sarebbe normale ad ambedue i piani (693).

712. Reciprocamente *se due piani son paralleli, ogni retta normale all'uno è normale anche all'altro.* Infatti sieno CERD, KHTF due piani paralleli determinati dalle rette CR ed ED, KT ed HF, e sia AB normale al piano CERD. Condotti per AB i piani CKTR, EHFD, le loro intersezioni HF ed ED, KT e CR coi due piani paralleli dovranno essere respettivamente parallele (710.1°). Ma AB è in ipotesi normale al piano CERD e per conseguenza alle intersezioni CR ed ED (693), dunque dovrà esser normale anche alle altre due, e quindi al piano parallelo KHTF (*ivi*). Si potrebbe provare in egual modo che un' obliqua fra due piani paralleli è egualmente inclinata sull' uno e sull'altro. Frattanto di quì si ha che *due piani paralleli ad un terzo son paralleli anche tra loro*; perchè se sul parallelo comune si alzi una normale, questa dovrà esser normale ad ambedue gli altri piani, i quali perciò saran paralleli fra loro (702).

Fig. 85.

713. *Le parallele comprese fra due piani paralleli sono eguali*; perchè supposte due sole le parallele, e fatto passare per le medesime un piano, le intersezioni di questo coi piani paralleli saranno parallele (710), e quindi saranno fra loro eguali le parti di esse comprese fra le due parallele date (549),

le quali pure per la stessa ragione dovranno essere eguali. E così si troveranno eguali tutte le rimanenti, paragonandole nel modo stesso ad una ad una con qualunque delle due prime. Di quì si ha che *due piani paralleli conservano in tutta la loro estensione una stessa distanza*; perchè condotte dall' uno all' altro e dovunque delle rette normali, queste saran sempre parallele (698), e quindi eguali.

714. *Se tre parallele* IB, AN, EM *situate in piani diversi sono eguali, i piani* BAEDC, INMRK *che passan per le loro opposte estremità son paralleli* Infatti condotto per IN un piano parallelo a BAEDC, la porzione della parallela ME che rimarrà compresa fra questi due piani dovrà essere eguale alle altre due parallele IB, AN (713), e in conseguenza la parallela ME rimarrà tutta intera compresa fra l' un piano e l' altro, ossia il nuovo piano parallelo dovrà passare per M e confondersi perciò col piano INMRK. F. 100.

715. Se da un punto A si conducano a traverso di due piani paralleli PQ, pq quante rette si voglia AdD, AfF, ec. queste saranno tutte tagliate proporzionalmente, come pure l' AB condotta da A perpendicolarmente al piano PQ, e in conseguenza anche al piano pq (712), e le figure DFGEH, $dfgeh$ saranno simili; poichè 1°. fatto passare un piano per i tre punti A,D,F, le sue intersezioni coi piani paralleli PQ, pq saranno le rette parallele DF, df (710); dunque i triangoli ADF, Adf saranno simili. Lo stesso si proverà de' triangoli AFG ed Afg, AEG ed Aeg, ec.; onde AD : Ad :: DF : df :: AF : Af :: FG : fg :: AG : Ag :: AB : Ab; 2°. essendo DF : df :: AF : Af :: FG : fg :: ec., si ha DF : df :: FG : fg :: EG : eg ec. Ora se si conducano DG, dg, si proverà (581) che i triangoli ADG, Adg son simili, e perciò AD : Ad :: DG : dg :: DF : df :: FG : fg; dunque i triangoli DFG, dfg hanno tutti i lati omologhi proporzionali, e perciò son simili, onde l'angolo F=f; si proverà lo stesso degli angoli G e g, E ed e, ec.; dunque tutti gli angoli della figura DFGEH son respettivamente eguali a quelli della figura $dfgeh$: ma per altra parte tutti i loro lati omologhi son proporzionali, dunque esse son simili (619). 88.

716. Dall' esser l' angolo F=f si deduce che se due angoli

Fig. 88. DFG, dfg hanno i loro lati respettivamente paralleli, e diretti nel medesimo senso, saranno eguali benchè situati in diversi piani. E dall' esser simili le figure DFGEH, $dfgeh$ segue che le lor superficie stanno fra loro :: (642) $DF^2 : df^2 :: AD^2 : Ad^2$ :: il quadrato BA^2 della distanza del punto A dal piano PQ, al quadrato bA^2 della distanza del medesimo punto A dal piano pq; e perchè la ragione di $AB^2 : Ab^2$ è costante per lo stesso punto A, qualunque sia il numero delle rette AD, AF, ec., le superficie delle figure DFGEH, $dfgeh$ saranno sempre fra loro nella ragione costante $AB^2 : Ab^2$, e i loro perimetri nella ragione parimente costante di $AB : Ab$. Che se le rette AdD, AfF, ec. invece di partir dal punto A sieno parallele, tutte le rette dD, fF, gG, ec. saranno eguali e le figure diverranno eguali e simili.

717. Allorchè tre o più piani s' incontrano con le loro intersezioni in un medesimo punto, lo spazio angolare che comprendo-
80. no si chiama *angolo solido*. Tale è l' angolo S formato dai tre piani ASC, CSB, ASB. Vi vogliono dunque almeno tre angoli piani per formare un angolo solido; e ciascuno di essi è sempre minore della somma degli altri due. Ciò è evidente quanto ai due minori. Riguardo al maggiore, sia questo ASB. Sul piano ASB formisi l' angolo DSB=CSB, e prese ad arbitrio le lunghezze SB, SC, si faccia SD=SC; e si conduca da B per D la BA, e quindi le AC, CB. I triangoli eguali BSC, BSD (510. 1°) daranno CB=DB, e siccome si ha AB<AC+CB, così avremo AB<AC+DB, e per conseguenza AD<AC. Ma i due triangoli ASD, ASC hanno il lato AS comune, e il lato SD=SC, se dunque il terzo lato AD nel primo è minore del terzo AC nel secondo, avremo altresì l' angolo ASD minore dell' angolo ASC; e quindi ASD+DSB<ASC+DSB, cioè, per essere ASD+DSB=ASB, e DSB=CSB, sarà ASB<ASC+CSB.

89. 718. Dunque *la somma degli angoli piani che formano un angolo solido è minore di* 360°. Infatti abbiasi l' angolo solido quadrangolare BACDE, e si conduca comunque attraverso i suoi lati il piano ACDE. I due angoli AEB+DEB son maggiori dell' angolo AED con cui formano l' angolo solido E (717); dunque il lor supplemento è minore di quello dell' angolo AED.

Lo stesso è del supplemento di EAB+CAB relativamente a quello dell'angolo CAE, ec. Dunque la somma de' supplementi degli otto angoli inferiori dei quattro triangoli (somma eguale all'angolo solido B) è minore della somma de' supplementi dei quattro angoli del poligono ACDE, che è 360° (597); dunque l'angolo solido è minor di 360°. Fig.89.

719. *Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani respettivamente eguali, i piani a cui appartengono questi angoli saranno a due a due egualmente inclinati tra loro.* Abbiansi gli angoli solidi S,*s*, e sia ASC=*asc*, ASB=*asb*, BSC=*bsc*. Presa AS=*as* e condotti i piani CAB, *cab* respettivamente normali ad AS, *as*, i triangoli rettangoli SAC ed *sac*, SAB ed *sab* saranno eguali (510 2°), e si avrà SC=*sc*, AC=*ac*, SB=*sb*, AB=*ab*. Saranno dunque eguali anche i due triangoli CSB, *csb*, e per conseguenza i due ABC, *abc*, e quindi i loro angoli CAB, *cab*, i quali misurano le inclinazioni dei piani CAS ed ASB, *cas* ed *asb* (701); lo stesso ragionamento si estende manifestamente anche alle inclinazioni dei piani rimanenti. Perciò i due angoli solidi potranno esattamente soprapporsi l'uno sull'altro. 80.

Terza Parte

Solidi

720. Si chiama *solido* ciò che ha le tre dimensioni dell'estensione (489). In questo senso ogni corpo o esistente in natura o creato dalla nostra immaginazione è dunque un solido: noi per altro non ci occuperemo che di quelli di due sole specie, cioè dei *solidi poliedri*, la cui superficie si compone di faccie piane talmente unite nei loro lati da chiudere per ogni verso uno spazio, e dei *solidi di rivoluzione*, che posson concepirsi come formati dal perimetro di una figura piana che sia fatta girare intorno ad uno dei suoi lati, o intorno ad un *asse* qualunque. Nè di tutti i solidi spettanti a queste due specie prenderemo a parlare, ma soltanto di quelli che han forme più notabili e regolari. Di questi daremo in primo luogo una succinta descrizione; ne rileveremo in

seguito le più essenziali geometriche proprietà; quindi daremo il modo di misurarne e confrontarne le superficie; e quello infine di valutarne e paragonarne le *solidità* o *capacità*, o *volumi*, cioè gli *spazj* o *vuoti* circoscritti per ogni verso dalle loro superficie.

Poliedri

721. I *poliedri* si distinguono in *regolari*, in *simmetrici* ed in *irregolari*, e ciascuno di questi prende una differente denominazione secondo il numero delle sue *faccie*. Il più semplice che ne ha quattro, poichè tre sole non chiuderebbero spazio, chiamasi *tetraedro*; dicesi *pentaedro* quello che ne ha cinque, *esaedro* se ne ha sei, *ottaedro*, *dodecaedro*, *icosaedro*, ec. se ne ha otto, dodici, venti, ec.

722. Diconsi *regolari* quei poliedri le cui faccie sono altrettanti poligoni regolari ed eguali, e i cui angoli solidi (717) son pure tutti eguali fra loro.

723. Onde *cinque soli sono i poliedri regolari, cioè tre le cui faccie son triangoli equilateri, uno le cui faccie son quadrati, ed uno le cui faccie son pentagoni.* Poichè bisognando almeno tre angoli piani per fare un angolo solido, che intanto non può esser di 360°(718), in cinque soli casi può farsi un angolo solido con piani di poligoni regolari: 1°. l'angolo d'un triangolo equilatero essendo di 60°, tre de' suoi angoli fanno un angolo solido di 180°, e quattro di questi triangoli posson fare un *tetraedro*: 2°. quattro triangoli equilateri fanno un angolo solido di 240°, e può formarsene un corpo regolare d'otto faccie o un *ottaedro*: 3°. cinque triangoli equilateri fanno un angolo solido di 300°, e può comporsene un corpo regolare di 20 faccie o un *icosaedro*; ma sei farebbero 360°, e questo non può essere un angolo solido: 4°. l'angolo del quadrato essendo 90°, tre faranno un angolo solido di 270°, e potrà comporsene un corpo regolare di sei faccie o un *esaedro*; ma quattro farebbero 360°, nè potrebber dunque formare un angolo solido: 5°. l'angolo del pentagono regolare valendo 108° (596), tre formeranno un angolo solido di 324°, e potrà farsene un solido regolare di 12 faccie o un *dodecae-*

dro; ma quattro farebbero 432°, angolo solido impossibile. Infine l'angolo dell'esagono essendo 120° (*ivi*), tre fanno 360°, che non può essere un angolo solido: molto meno tre ettagoni, tre ottagoni, ec.; dunque i corpi regolari non son più di cinque.

724. Chiameremo *simmetrici* quei poliedri che sono conformati nel modo medesimo da una parte e dalla sua opposta, e presentano come l'aggregato di due solidi eguali contrariamente appoggiati sopra una base comune. Condizione naturale di questi poliedri è che i vertici dei loro angoli solidi si trovino ad egual distanza dalla base comune. I poliedri che non sono regolari nè simmetrici forman la classe degl'irregolari.

725. I più notabili tra i poliedri sono i *prismatici* o i *prismi*; e i *piramidali* o le *piramidi*. Il *prisma* è un poliedro le cui faccie laterali sono altrettanti parallelogrammi, e le faccie superiore ed inferiore, che chiamansi basi del prisma, sono piani di due poligoni eguali e paralleli. Questo solido si può concepir come formato da una retta, che comunque inclinata sul piano di un poligono, scorra lungo il perimetro del medesimo mantenendosi sempre parallela a se stessa. In tal caso alla retta che col suo movimento genera il prisma si dà il nome di *generatrice*, e al perimetro lungo cui scorre si dà quello di *linea direttrice*. Il prisma è *retto*, se i piani delle sue faccie laterali son tutti perpendicolari a quelli delle sue basi; *obliquo* nel caso opposto. È *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagono*, ec. secondochè sono tre, quattro, cinque, ec. i lati del perimetro delle sue basi. Prende il nome di *parallelepipedo*, se ha per base un parallelogrammo, di *parallelepipedo rettangolo*, se ha basi e faccie rettangolari; finalmente di *cubo* se si compone di sei faccie ciascuna delle quali sia un quadrato, nel qual caso viene a confondersi con l'esaedro regolare (723).

726. Si chiama *altezza* del prisma la distanza dell'una all'altra delle sue basi; *apotema* la normale condotta dalla base superiore all'inferiore lungo il piano di una qualunque delle faccie; *lato* o *costola* del prisma ognuna delle intersezioni fra due contigue faccie laterali; *diagonale* qualunque retta che unisca

i vertici di due angoli solidi non adiacenti. Gli apotemi son tutti eguali fra loro (713). L'altezza è eguale al lato e all'apotema nel prisma retto, minore nell'obliquo. Due prismi o retti o egualmente inclinati son *simili* quando hanno per basi poligoni simili, e altezze proporzionali ai perimetri delle basi.

727. *In ogni parallelepipedo le faccie opposte sono parallele ed eguali.* Infatti le due basi superiore e inferiore essendo fra loro parallele ed eguali (725), saranno pure parallele ed eguali fra loro le quattro rette A*a*, D*d*, B*b*, C*c* (549). Gli angoli piani *a*AB,*d*DC, i cui lati son dunque paralleli, saranno essi pure eguali (716), come nel modo stesso saranno respettivamente eguali i tre rimanenti angoli delle due faccie opposte A*b*, D*c*. Queste due faccie, e per la ragione stessa le altre due A*d*, B*c*, son dunque parallele ed eguali.

Fig. 91.

728. Di quì si ha 1°. che date di lunghezza e di posizione le tre rette AB, AD, A*a*, che partano da un punto A, ed una delle quali sia in un piano diverso dalle altre due, si può sempre costruir con esse un parallelepipedo; il che si otterrà conducendo per le estremità B,D,*a* di ciascuna delle tre rette un piano parallelo a quello che passa per l'altre due. Gli incontri scambievoli di questi piani formeranno il parallelepipedo richiesto.

2°. *In ogni parallelepipedo gli angoli solidi opposti sono eguali, e le quattro diagonali si tagliano scambievolmente in parti eguali.* Infatti, attesa l'eguaglianza delle faccie opposte (727) e la loro qualità di parallelogrammi i tre angoli piani DAB,DA*a*,*a*AB sono respettivamente eguali ai tre angoli piani *dcb*, C*cb*, C*cd*. Dunque sono eguali altresì i due angoli solidi A, *c* formati da questi angoli piani (719). E se si conducano le diagonali A*c*, D*b*, queste dovranno ambedue trovarsi nel piano delle parallele DA, *cb* (692.6°), e quindi intersecarsi fra loro in qualche punto O. E poichè i triangoli DOA, O*cb* sono eguali (561.2°), dovrà aversi DO=O*b*, AO=O*c*, cioè le diagonali si taglieranno in parti eguali nel punto O, che potrà nominarsi *centro* del parallelepipedo. Sarà poi facile dimostrare che anche ogni altra retta, la quale parta da un punto qualunque d'una delle faccie e vada sull'opposta passando per O, resterà del pari divisa in due parti eguali nel punto O; come pure che ogni

piano condotto da un lato all'opposto passerà per il centro e dividerà il solido in due prismi triangolari eguali, ciascun dei quali sarà dunque metà del parallelepipedo. Può osservarsi che potendosi prendere Ab per base del parallelepipedo (727), e ABb, Aab per quelle dei due prismi, ciascuno di questi avrà dunque e la stessa altezza e la metà della base del parallelepipedo.

Fig. 91.

729. *Ogni parallelepipedo le cui quattro faccie laterali sieno oblique al piano della base, può cangiarsi in un altro della medesima base ed altezza, e di volume equivalente, e nel quale due delle faccie opposte sieno normali al piano della base.* Sia Ac il parallelepipedo dato: per i lati opposti BC, AD della base si alzino normalmente alla medesima i piani Bf, Ai, e sieno hf, ki le loro intersezioni col piano della base superiore ac; Bh, Ak quelle col piano della faccia anteriore Ab; e Cf, Di quelle col piano della faccia posteriore Dc. Il solido Bi sarà manifestamente un nuovo parallelepipedo con base ed altezza eguali a quelle del dato, con le faccie anteriore e posteriore Ab, Df egualmente che in quello inclinate sul piano della base, e con le altre due faccie Bf, Ai normali a questo piano. Inoltre i due parallelepipedi avran comune il solido $AChd$, e l'uno conterrà di più il prisma triangolare $BChc$, l'altro il prisma triangolare $ADkd$. Ma questi due prismi con tutti gli angoli solidi e tutti i lati e dimensioni eguali sono visibilmente eguali, avremo dunque $Ac = AChd + BChc = AChd + ADkd = Bi$, cioè i due parallelepipedi, oltre ad aver base e altezza eguale, sono fra loro equivalenti in volume.

92.

730. *Ogni parallelepipedo obliquo può cangiarsi in un parallelepipedo a faccie rettangolari con la stessa base e con la stessa altezza e di volume equivalente.* Col metodo precedente si cangi il parallelepipedo dato in un nuovo parallelepipedo Ac con due faccie opposte normali alla base, e sieno Ab, Dc queste due faccie. Fatta la stessa costruzione che sopra, il parallelepipedo Bi verrà ad avere normali alle due basi anche l'altre due faccie Bf, Ai, nel qual caso le intersezioni delle quattro faccie fra loro e con le due basi saranno normali, e le quattro faccie rettangolari. Si dimosterà poi come sopra che il parallele-

Fig. 92. pipedo B*i* è equivalente in volume al parallelepipedo Ac; e poichè questo è equivalente al dato, così il dato ed il nuovo parallelepipedo B*i* avranno e base e altezza eguale come è chiaro, e volume equivalente.

731. *Qualunque parallelepipedo può cangiarsi in un parallelepipedo rettangolo d'altezza eguale, e di base e di volume equivalente.* Si supponga che, applicati i due metodi precedenti, il dato parallelepipedo sia stato cangiato nel parallelepipedo AL a faccie rettangolari. Condotti per i lati AI, BK della faccia

101. anteriore AK due piani AQ, BP normali a quello della faccia posteriore MC, il nuovo parallelepipedo AP avrà non solo le faccie, ma anche le basi rettangolari, le quali saranno di più equivalenti a quelle del dato, perchè i triangoli rettangoli DAO e CBN, MIQ ed LKP essendo eguali (518.2°), danno DB=DAO+AC=CBN+AC=AN, ed MK=MIQ+IL=LKP+IL=IP. E poiche i due prismi triangolari AIDQ, BKCP con tutti gli angoli solidi e tutte le dimensioni eguali sono manifestamente tra loro eguali, avremo AL=AIDQ+BQ=BKCP+BQ=AP, cioè i due solidi, oltre ad avere un'eguale altezza AI e basi equivalenti, saranno equivalenti anche in volume. Diciamo adesso della piramide.

88. 732. La *piramide* è un solido composto di faccie triangolari tutte concorrenti con un loro vertice in un punto comune A, e che coi lati opposti terminano sul perimetro di un poligono GFDHE. Si può concepir generata da una retta che tenendosi ferma in A con un suo punto qualunque, si muova col rimanente di tutta se stessa sempre appoggiata al perimetro GFDHE. Il punto A si chiama vertice della piramide; il poligono GFDHE ne è la base; la normale calata dal vertice sul piano della base ne è l'altezza; quella condotta dal vertice lungo le faccie sul perimetro della base si chiama, come nel prisma, apotema.

733. La piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, ec. secondochè son tre, quattro, ec. le faccie che la compongono, o i lati della sua base. È *regolare* quando le faccie sono eguali, nel qual caso la normale calata dal vertice cade nel centro della base, e prende il nome di *asse* della piramide.

Superficie dei Poliedri

734. La superficie di qualunque poliedro corrisponde manifestamente all'aggregato di quelle delle sue faccie. Perciò 1°. se il poliedro è regolare, se ne avrà la superficie moltiplicando quella di una delle sue faccie per il numero totale delle medesime. 2°. *La superficie laterale d'un prisma qualunque equivale a quella del rettangolo* L×P *formato da uno qualunque dei lati* L, *e dal perimetro* P *della sezione fatta sul prisma da un piano normale al lato* L. Infatti tutti i lati del prisma essendo per natura del solido paralleli (725), il piano normale ad uno di essi è normale anche ai rimanenti (697). Ciascun lato del perimetro della sezione è dunque normale in ogni faccia ai due lati del prisma fra i quali è contenuto (693); determina quindi la distanza dell'uno all'altro, e moltiplicata per uno di essi dà la superficie della faccia corrispondente (633). Poichè dunque ciascun lato del prisma ha una stessa lunghezza L (713), se si rappresentino con A, B, C, D, ec. quelli del perimetro P della sezione, avremo per la superficie cercata $S = A\times L + B\times L + C\times L + D\times L +$ ec. $=$ (630.II) $L(A+B+C+D+$ec.$) = L\times P$. Che se il prisma è retto (725), la sezione sarà parallela (711) ed eguale alla base, e la superficie laterale equivarrà al rettangolo fatto dalla base e dall'altezza del prisma. Quindi 3°. le superficie laterali di due prismi retti d'egual base stanno come le altezze; d'eguale altezza stanno come le basi; sono eguali se hanno altezze eguali e basi di perimetro eguale, o se le basi stanno inversamente come le altezze; nei prismi simili stanno come i quadrati delle altezze, ec.; il che tutto si dimostra con i medesimi ragionamenti che ci condussero alle medesime conseguenze per le superficie piane (642).

735. La superficie laterale della piramide, risulta dalla somma delle sue faccie triangolari. Quindi se la piramide è regolare, e perciò con faccie tutte eguali, supposto n il loro numero, A l'apotema, L un lato del perimetro della base, avremo per la superficie $S = \frac{1}{2}nAL$; ma nL rappresenta tutto intero il detto perimetro, dunque *la superficie laterale della piramide*

regolare equivale alla metà del rettangolo fatto dall' apotema e da una retta eguale in lunghezza al perimetro della base.

736. Se la piramide sia troncata parallelamente alla base, le faccie si cangeranno in trapezj (594), che saranno tutti eguali quando la piramide sia regolare; nel qual caso, chiamato D il resto dell'apotema, L, L' uno dei lati delle due basi superiore ed inferiore, ed n il numero delle faccie, avremo per la superficie di una di queste $s=\frac{1}{2}D(L+L')$, e per quella della piramide troncata $S=\frac{1}{2}nD(L+L')$; dal che si ha che *la superficie della piramide regolare troncata equivale al rettangolo formato dal resto dell' apotema, e da una retta eguale alla semisomma dei perimetri delle due basi, o al perimetro medio proporzionale aritmetico fra l' uno e l' altro* (355). Si dimostrerà facilmente che questo perimetro è quello di una sezione fatta parallelamente alla base sulla metà dell'altezza del tronco. Del resto tutte le analogie accennate di sopra rapporto alle superficie dei prismi (734.3°) han luogo per quelle delle piramidi regolari.

Solidità o volume dei Poliedri

737. Per misurar la solidità o volume di un corpo bisogna prender per unità di misura il solido più semplice, quello cioè le cui tre dimensioni sono eguali all' unità di lunghezza: *il cubo* (725) *è perciò la misura naturale della solidità.* Quindi si dice indifferentemente o la *cubatura* o la *solidità* d'un corpo, la cui determinazione perciò si riduce a trovar quante volte il *cubo unità* si contenga nel dato corpo: così per valutare un solido in piedi cubici, basta determinar quante volte esso contenga il *piede cubico unità.*

738. *Misurare il cubo* AG$=C$ diverso da $ag=c$ *cubo unità.* Tagliato nel cubo un parallelepipedo HN con la base HM$=ac$, è chiaro che l'unità id o ad entra tante volte in DI o DA, quante entra c in HN; dunque $1:DA::c:HN=DA\times c$; ma l'unità ac o HM entra tante volte in AC, quante HN entra nel cubo C; dunque $1:AC::HN:C=HN\times AC$; e poichè $HN=DA\times c$ ed $AC=DA^2$, sarà $C=DA^3\times c$; cioè *il cubo è il pro-*

F. 93

dotto del cubo unità per il cubo delle unità di un de' suoi lati. Così un piede cubico $=1728$ pollici cubici: una tesa cubica $=216$ piedi cubici $=216\times 1728$ pollici cubici, ec. Fig. 93.

739. *Dunque la solidità del parallelepipedo equivale al prodotto della sua base per la sua altezza, o delle sue tre dimensioni in lunghezza, larghezza ed altezza*. Poichè, se è rettangolo, il cubo AG descritto sul maggior lato DI contien tante volte il parallelepipedo HN, quante AC contiene HM; dunque $AG : HN :: AC : HM$, e quindi $HM : HN :: AC : AG :: DI^2 : DI^3 :: 1 : DI$, e perciò $HN = HM \times DI =$ (629) $DH \times DM \times DI$. Siccome poi il volume di qualunque parallelepipedo obliquo equivale a quello di un parallelepipedo rettangolo che abbia la medesima altezza A ed una base B equivalente (731), così lo stesso prodotto $A\times B$, che dà il volume di questo, darà il volume anche di quello.

740. Parimente *la solidità di un prisma retto o obliquo equivale al prodotto della sua base per la sua altezza*. Infatti, se primieramente il prisma è triangolare, sappiamo che il suo volume è metà di quel'o di un parallelepipedo che ha la stessa altezza A e il doppio $2B$ della base (728, 2°). Dunque per la solidità di questo prisma avremo $S=\frac{1}{2}\times 2B\times A=B\times A$. Che se il prisma è qualunque, potremo decomporlo in tanti prismi triangolari, tutti d'altezza eguale a quella del dato prisma, quanti sono i triangoli in cui può decomporsi il poligono che gli serve di base. E come ciascun di questi equivale al prodotto della respettiva sua base nell'altezza comune, così l'intero prisma equivarrà al prodotto di quest' altezza nella somma di tutte le basi parziali, ossia nella sua base totale.

741. Di qui intanto si ha che *due prismi* P, p *stanno fra loro come i prodotti* $A\times B$, $a\times b$ *delle lor basi ed altezze*. Perciò se con altezze eguali hanno basi equivalenti, sono equivalenti; se han soltanto altezze eguali stanno come le basi; se han basi eguali o equivalenti stanno come le altezze; se sono equivalenti, e con basi e altezze ineguali, le loro basi stanno in ragione inversa delle altezze; se son simili (726) stanno come i cubi delle altezze, o come i cubi di due lati omologhi qualunque delle basi, o come

quelli d'ogni altra dimensione omologa. Poichè avendosi in tal caso $B : b :: L^2 : l^2$ (642), ed $A : a :: L : l$ (726), sarà $P : p :: A \times L^2 : a \times l^2 :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$, ec.

742. Abbiasi adesso una piramide qualunque, che per maggior semplicità della figura rappresenteremo soltanto con una delle sue faccie ABC; e per meglio fissar le idee, si supponga che la normale calata dal vertice cada sulla base, talchè ciascuna faccia sia inclinata sulla base al di dentro. Tagliata l'intera piramide con sezioni parallele alla base, e fra loro equidistanti, si circoscriva esternamente a ciascun dei tronchi compresi fra sezione e sezione un prisma retto, ed un altro se ne inscriva internamente, come vedesi praticato nella figura. Il secondo prisma esterno sarà eguale al primo interno, con cui ha comune la base ed eguale l'altezza; per la stessa ragione il terzo esterno sarà eguale al secondo interno, il quarto esterno al terzo interno, e così di seguito fino agli ultimi dell'un genere e dell'altro. Tutti i prismi esterni avran dunque i loro equivalenti negl' interni, a riserva del primo, che eguaglierà perciò la differenza tra la somma di tutti gli esterni e la somma di tutti gl' interni; differenza che deve necessariamente esser maggiore di quelle che passano fra le somme dei prismi tanto esterni, che interni e la piramide; essendo chiaro che questa è minore di tutti insieme i primi, tra i quali è contenuta, e maggiore di tutti insieme i secondi che totalmente contiene. Quest' osservazione fa strada a dimostrare la seguente luminosa proposizione.

F. 102.

743. *Due piramidi d' altezza eguale e di base equivalente sono eguali in volume.* Si dividano, come sopra, con egual numero di sezioni, sì l'una che l'altra piramide, e si inscrivano e circoscrivano all' una e all'altra i soliti prismi. Come le due piramidi hanno una altezza eguale e basi equivalenti, le sezioni fatte alle medesime altezze o distanze dal vertice saranno tutte equivalenti (716). Quindi i prismi sì interni che esterni corrispondenti alle stesse sezioni avranno respettivamente basi equivalenti; e come hanno in ipotesi altezze eguali, saranno respettivamente eguali in solidità (741). Perciò il primo prisma esterno, differenza fra le somme di tutti gl'interni ed esterni della

prima piramide, sarà egualmente differenza tra le somme di tutti gli esterni della prima e di tutti gl'interni della seconda, e reciprocamente. Or si chiamino P, p i volumi delle due piramidi, Π, π le somme dei prismi esterni dell'una ed interni dell'altra, d la differenza, se vi è, di volume tra le due piramidi, e ν quella fra Π e π, ossia il volume del primo prisma esterno d'una delle due piramidi (742). Supposto $P>p$ avremo $P-p=d$, $\Pi-\pi=\nu$; e poichè manifestamente si ha $\Pi>P$, $\pi<p$, perciò qualunque sia il valore di ν, dovrà sempre aversi $\nu>d$. Ma d, rappresentando la supposta differenza di volume fra le due piramidi, ha un valor determinato ed invariabile, mentre quello di ν, dipendendo particolarmente dall'altezza più o men grande che vorremo dare ai prismi (740), è arbitrario e variabile, e suscettivo di qualunque impiccolimento; dunque la condizione essenziale che qualunque sia il valore di ν debba aversi sempre $\nu>d$, non può sussistere se non si ammetta $d=0$, ossia se le due piramidi non siano equivalenti.

744. Da tutto ciò si ha che *il volume di una piramide è la terza parte di quello di un prisma di egual base e di eguale altezza*, ossia è *il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza*. Infatti abbiasi primieramente la piramide triangolare DABC. Elevate dagli angoli A,C della base le rette AF, CE parallele ed eguali al lato BD, e condotte le FE,FD,DE, sarà FDE parallelo ed eguale ad ABC (714), e quindi il solido BFCD un prisma triangolare della base stessa e della stessa altezza della piramide data. Condotta sulla faccia AE la diagonale FC, il solido si troverà diviso nelle tre piramidi triangolari DFAC, DFCE, DABC tutte eguali fra loro in volume, perchè le prime due hanno eguali le basi FAC, FCE e comune il vertice D, e quindi eguale anche l'altezza, e per la ragione stessa la seconda è eguale alla data DABC, poichè ambedue hanno eguali le basi FDE, ABC, ed inoltre i vertici C, D sui piani paralleli ABC, FDE, laonde hanno eguali anche le altezze. Dunque ognuna di queste tre piramidi, e in conseguenza la data, è il terzo del prisma triangolare BFCD; e perciò, siccome chiamata B la base, A l'altezza, si ha per il volume del prisma $V=A\times B$,

F.104.

avremo per quello della piramide triangolare $P = \frac{1}{3} A \times B$. Ora ogni piramide può visibilmente riguardarsi come l'aggregato di tante piramidi triangolari d'eguale altezza, quanti sono i triangoli in cui può decomporsi il poligono che serve ad essa di base. Se dunque ciascuna di quelle equivale alla terza parte del prodotto dell'altezza comune nella respettiva base, la somma di tutte o l'intera piramide equivarrà al terzo del prodotto dell' altezza comune, ossia dell' altezza della piramide data, nella somma di tutte le basi parziali, o nella base totale.

745. Dunque *due piramidi qualunque stanno tra loro come i prodotti delle altezze e basi respettive*; e quindi se hanno altezze eguali stanno come le basi; se basi eguali stanno come le altezze; se son simili, cioè se hanno e basi e faccie simili, stanno come i cubi delle altezze, o di due lati qualunque purchè omologhi, il che tutto si dimostra come per i prismi (741)

746. La solidità d'un tronco di piramide a basi parallele si ottiene assai speditamente per la via algebrica nel modo che segue. Sieno l^2, L^2 due quadrati equivalenti in superficie alle basi b, B superiore ed inferiore, a l'altezza del tronco, x l'altezza della piramide formata dalla porzione che manca, e per conseguenza $a+x$ quella della piramide totale; infine sieno s, S le solidità dell'una e dell'altra piramide, la cui differenza $S-s$ deve darci la solidità cercata del tronco. Avremo primieramente (716) $B : b :: (a+x)^2 : x^2 :: L^2 : l^2$; d'onde $x = \frac{al}{L-l}$, $a+x = \frac{aL}{L-l}$, $S = (744) \frac{1}{3} L^2 \times \frac{aL}{L-l} = \frac{aL^3}{3(L-l)}$, $s = \frac{1}{3} l^2 \times \frac{al}{L-l} = \frac{al^3}{3(L-l)}$. Dunque $S - s = \frac{a}{3}\left(\frac{L^3 - l^3}{L-l}\right) = \frac{a}{3}\left(L^2 + Ll + l^2\right) = \frac{a}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right)$.

747. Infine un poliedro regolare si divide in tante piramidi regolari quante sono le faccie. Supponendole n, e chiamata B la superficie d'una di esse, ed A la sua distanza dal centro, avremo per la solidità del poliedro regolare $S = \frac{1}{3} n A \times B$

Solidi di rivoluzione

748. I principali fra i solidi di rivoluzione, e quei soli dei

quali qui tratteremo, sono: il *cilindro*, generato dai tre lati CF, FE, AE di un rettangolo ACFE che sia fatto rivolgere intorno al quarto lato immobile AC; il *cono*, generato dall'ipotenusa CD e dal cateto AD d'un triangolo rettangolo CAD che si rivolge intorno all'altro cateto immobile AC; lo *sferoide*, generato dal semiperimetro di un poligono regolare, come SBAEIN, che si rivolge intorno ad un suo asse o diametro SN; e finalmente la *sfera*, generata dall'intera rivoluzione d'un semicircolo CBFA intorno al suo diametro CF, o dalla semirivoluzione di un circolo intorno ad uno qualunque dei suoi diametri. Fig. 94. 90. 98. 96.

749. In tutti questi solidi il lato o diametro immobile, intorno al quale si volge la linea generatrice si chiama *asse* del solido, o *asse di rivoluzione*. Nel cilindro i due lati adiacenti all'asse descrivono nella rivoluzione due circoli eguali e paralleli, che come nel prisma prendono il nome di *basi*. Parimente nel cono il cateto mobile descrive un circolo che è la base del cono. In generale, qualunque siasi il poligono generatore del solido, tutte le normali condotte da un punto qualunque del lato immobile o asse di rivoluzione fino al perimetro del poligono descrivono nella rivoluzione altrettanti circoli paralleli, che nel cilindro sono tutti eguali a quelli delle due basi, nel cono dalla base al vertice tutti successivamente minori gli uni degli altri; nello sferoide e nella sfera il massimo è descritto dalla normale che parte dalla metà dell'asse, e gli altri tutti tanto al di sopra che al di sotto vanno continuamente decrescendo, in modo però che da una parte e dall'altra gli equidistanti dal medesimo sono fra loro eguali. Nella sfera la normale che parte dalla metà dell'asse o dal centro, e che descrive il circolo massimo eguaglia il raggio del circolo genitore. Questo dunque e il circolo massimo sono eguali fra loro.

750. Da tutto ciò si ha, che ovunque si attraversino o si taglino questi solidi con piani normali all'asse le sezioni saranno sempre circolari. Nella sfera accade di più che ogni sezione piana, in qualunque senso si faccia, è sempre circolare; poichè condotta pel centro una retta normale al piano della sezione, questa sarà un diametro che potrà riguardarsi come asse della

sfera. D'onde si conclude che tutte le sezioni le quali si faran passare per il centro saranno circoli massimi, eguali perciò fra loro e al circolo genitore (749).

751. La sfera ha dunque un'immensità di circoli massimi, perchè immenso è il numero delle sezioni che posson farvisi passare per il centro; ed ha un numero sommamente più grande di circoli minori, perchè assai maggiore è il numero delle sezioni che posson farvisi in tutti i sensi evitando di passare per il centro. Tutti i circoli massimi hanno un centro comune che è quello della sfera; tutti i circoli minori lo han differente. Questi circoli, le inclinazioni degli uni di essi sugli altri, e le intersezioni delle loro circonferenze sulla superficie della sfera, godono di rimarchevoli proprietà, che ci riserbiamo ad esporre in luogo anche più di questo opportuno, specialmente in vista di non troppo interrompere il filo delle proposte materie.

752. Le sezioni fatte nel cilindro, nel cono, e nello sferoide lungo l'asse di rivoluzione riproducono manifestamente il poligono generatore. Quanto alle sezioni oblique, queste danno nascita a varie specie di curve, che differiscono secondo la diversa qualità del solido, e dell'angolo della sezione con l'asse. Nel cilindro, qualunque sia quest'angolo, risulta sempre una curva d'una sola e medesima specie, che prende il nome d'*ellisse*. Nel cono se la sezione attraversa l'asse e passa dall'una all'altra parte del solido, dà parimente nascita ad un'ellisse; se è parallela al lato o apotema opposto alla sua origine *O*, dà nascita ad una *parabola*, curva non *rientrante*, cioè i di cui rami OM, *om* non s'incontrano giammai qualunque sia l'altezza del cono, e quindi non chiudono spazio; finalmente se la sezione diverge dal lato o apotema opposto, genera un'*iperbola*, curva essa pure non rientrante. Queste tre curve che dal modo appunto con cui son generate si chiamano *sezioni coniche*, sono assai celebri nella Geometria, e noi ne parleremo estesamente altrove. Le sezioni oblique fatte nello sferoide producono una curva spezzata, cioè composta di frammenti di curve diverse che si succedono l'une all'altre e che tutte sono della specie delle precedenti.

Fig. 90.

753. Le superficie laterali del cilindro e del cono, e le su-

perficie totali degli altri solidi di rivoluzione si chiamano *convesse* se si riguardano dalla parte esteriore, *concave* se dall'interiore. La superficie convessa del cilindro, conformemente alla superficie laterale dei prismi (725), si può anche concepir generata dal movimento di una retta che normalmente elevata sul piano di un circolo, tutta ne percorra in giro l'intera circonferenza. Che se la retta generatrice non sia normale al piano del circolo, nasce allora il cilindro *obliquo*, il quale non può rigorosamente venir riguardato come solido di rivoluzione. E se la curva direttrice, quella cioè lungo la quale la generatrice si muove, non sia circolare, nasce allora una nuova specie di solido, a cui per analogia si dà il nome di *solido cilindrico*.

754. Medesimamente la superficie convessa del cono può supporsi generata, come la superficie laterale delle piramidi (732), da una retta che scorra lungo la circonferenza della base, tenendosi immobilmente appoggiata con una delle sue estremità ad un punto dell'asse. Che se il punto a cui è appoggiata l'estremità immobile della retta generatrice sia al di fuori dell'asse, nascerà allora il *cono obliquo*. E se la curva direttrice o della base non sia circolare, nascerà una nuova specie di solido a cui vien dato il nome di *conoide*, o solido *conoidale*.

755. Infine lo sferoide può aver per linea generatrice anche un poligono irregolare o una curva qualunque, nel qual caso o ritiene lo stesso nome di sferoide, o prende l'altro di solido *sferoidico* o *sferoidale*, o assume un vocabolo particolare derivato da quello che seco porta la linea o curva generatrice. Così chiamansi *ellissoide*, *paraboloide*, *iperboloide* quelli generati dalla rivoluzione d'un'ellisse, d'una parabola, d'un'iperbola (752).

756. Ad ogni cilindro può inscriversi e circoscriversi un prisma regolare che abbia per altezza l'altezza del cilindro, e per base un poligono regolare inscritto e circoscritto alla base di esso. Parimente ad ogni cono potrà inscriversi e circoscriversi una piramide regolare che abbia per altezza l'altezza del cono e per base un poligono regolare inscritto o circoscritto alla base del cono. E finalmente ad ogni sfera potrà inscriversi e

circoscriversi uno sferoide regolare, che abbia per linea generatrice un poligono regolare inscritto o circoscritto al circolo generatore. Tuttociò è per se stesso evidente.

757. *La superficie laterale del prisma circoscritto al cilindro è maggiore, e quella dell'inscritto è minore della superficie di un prisma della medesima altezza e con base di un perimetro equivalente alla circonferenza della base del cilindro*, il che pure è assai chiaro, perchè supposta a l'altezza, P, p, $2r\pi$ i perimetri delle basi, ed S, s, S' le superficie dei tre solidi, avremo (734) $S=aP$, $s=ap$, $S'=2ar\pi$; ma si ha (614) $P>2r\pi, p<2r\pi$, dunque altresì $S>S'$, ed $s<S'$. Lo stesso può dimostrarsi rapporto alle piramidi regolari circoscritte ed inscritte ad un cono, e quella il cui perimetro alla base sia eguale alla circonferenza della base del cono; come pure rapporto agli sferoidi inscritti e circoscritti alla sfera, e quello il cui poligono genitore avesse un perimetro eguale alla circonferenza del circolo generatore della sfera, del che dubitar non potremo, appreso che si sarà il modo di misurar la superficie d'uno sferoide (762).

Superficie dei solidi di rivoluzione

758. *La superficie convessa d'un cilindro* C, *del raggio* r *e dell'altezza* a, *corrisponde a quella del rettangolo fatto dalla circonferenza* $2r\pi$ *della base e dall'altezza* a. Infatti si supponga che il rettangolo $2ar\pi$ non dia la superficie S del cilindro C, ma la superficie S' d'un cilindro C' del raggio r'. Primieramente osserveremo che non potrà aversi $r'>r$; perchè in quest'ipotesi inscritto al circolo della base del cilindro C' un poligono regolare il cui perimetro p sia medio tra le due circonferenze $2r\pi$, e $2r'\pi$, e su di esso elevato un prisma dell'altezza a, la cui superficie laterale sia dunque $s=ap$, si avrebbe $p>2r\pi$, e quindi $ap>2ar\pi$, ossia $s>S'$, mentre dovrebbe aversi (757) $s<S'$. E in secondo luogo neppur potrà esser $r'<r$; perchè circoscritto alla base di C' il poligono p con le stesse condizioni del precedente, e su questo elevato il solito prisma, si avrebbe $p<2r\pi$, ed $ap<2ar\pi$, ossia $s<S'$, mentre in questo caso dovreb-

be aversi (757) $s>S'$. Se dunque non può sussistere nè che sia $r'>r$, nè che sia $r'<r$, dovrà esser perciò $r'=r$, e quindi $C'=C$; e $2ar\pi$, supposta superficie di C', sarà quella che effettivamente spetta al dato cilindro C.

759. Nel modo stesso troveremo che la superficie del cilindro obliquo ABCD è pure il prodotto della sua lunghezza AB nel contorno GMIM'G della sezione fatta da un piano normale ad AB, o al piano ABCD normale a quelli delle basi. Questa sezione è poi, come dicemmo (752) un'ellisse; poichè se per un punto P dell'asse GI passi il circolo LMK parallelo ad AD, e quindi normale al piano ABCD, la sua intersezione col piano GMI sarà la retta MPM' normale all'asse GI (706). Sia dunque $GP=x$, $PM=y$, $LP=z$, $GI=a$, $LK=BC=AD=b$, per la proprietà del circolo si avrà $y^2=bz-z^2$: ma i triangoli simili LPG, PKI danno $z=\frac{bx}{a}$; dunque $y^2=\frac{b^2}{a^2}(ax-x^2)$, equazione all'*ellisse*. Vedete le Sezioni Coniche. Fig. 95.

760. Con ragionamento del tutto simile al precedente (758) si trova che *la superficie convessa di un cono retto* C *equivale al rettangolo fatto dal semiapotema* a, *e da una retta eguale in lunghezza al perimetro* $2r\pi$ *della base*. S'immagini infatti, come sopra, che il rettangolo $\frac{1}{2}a\times2r\pi$ non dia la superficie S del cono C, ma la superficie S' del cono C', il cui raggio alla base sia r'; e si supponga parimente in primo luogo $r'>r$. Inscritto nella base del cono C' il solito poligono del perimetro p medio fra $2r\pi$ e $2r'\pi$, se ne formi la base di una piramide regolare col vertice al vertice del cono, e ne sia a' l'apotema, Π la superficie. Avremo $\Pi=(735)\ \frac{1}{2}a'p$; e siccome si ha per ipotesi $p>2r\pi$, ed inoltre $a'>a$ (696), sarà dunque $\Pi>\frac{1}{2}a\times2r\pi$, ossia $\Pi>S'$, mentre all'opposto dovrebbe esser $\Pi<S'$ (757). Il cono supposto C' non può aver dunque un raggio maggiore di quello del dato cono C. Continuando il ragionamento come sopra, si troverà che neppure può averlo minore; dovrà dunque averlo eguale, e siccome ha eguale anche l'altezza, sarà dunque in tutto eguale a C, e la sua supposta superficie $\frac{1}{2}a\times2r\pi$ sarà quella che effettivamente appartiene al cono C. La superficie convessa del cono è dunque la metà di quella del cilindro d'egual base ed apotema.

761. La superficie convessa del cono retto troncato ACED, a basi parallele si troverà in modo consimile a quello con cui trovammo la solidità della piramide regolare troncata (746). Fatta 97.

Fig. 97. $AC=2a$, $DE=2b$, EC (resto dell' apotema BC) $=d$, $BE=x$, sarà $x+d:a::x:b$, onde $x=\frac{db}{a-b}$, ed $x+d=BC=\frac{ad}{a-b}$; e poichè (622) $2a\pi$, $2b\pi$, son le circonferenze delle basi AC, DE, e $BC\times a\pi$, $BE\times b\pi$, le superficie de coni retti ABC, DBE (760), la lor differenza o la superficie del cono troncato sarà $\frac{ad}{a-b}\times a\pi-$... $\frac{bd}{a-b}\times b\pi=d\pi\times\frac{a^2-b^2}{a-b}=d\pi(a+b)$; ma $\pi(a+b)$ è la circonferenza media aritmetica tra quelle delle basi DE, AC (355); dunque *la superficie del cono troncato è eguale al prodotto del resto dell' apotema per la circonferenza media proporzionale aritmetica tra quelle delle basi.*

98. 762. Giri il semipoligono regolare SAN intorno all'asse SN, e cerchiamo la superficie dello sferoide che ne risulta. Condotte sull' asse SN le normali BQ, AR, EK, IL, è chiaro che i due lati BS, IN del poligono descrivono dei coni retti (748), il lato AE descrive un cilindro, e gli altri BA, IE descrivon tronchi di cono retto. Ora se dal centro C si conducano sui lati SB, BA, AE le normali CV, CM, CZ che gli dividono in mezzo e son tutte eguali (601), i triangoli rettangoli CVS, BQS con l'angolo in S comune, saranno simili, e si avrà $VS:QS::CV:BQ::2CV\pi:2BQ\pi$, e però $VS\times2BQ\pi$ (cioè la superficie del cono descritto da BS (760)) $=QS\times2CV\pi$. Di nuovo condotte da B, M sopra AR, SC le normali BD, MP, i triangoli CMP, ABD con tutti i lati omologhi normali, son simili (554), e però $AB:BD(=QR)::CM\ (=CV):MP::2CV\pi:2MP\pi$, ed $AB\times2MP\pi$ (superficie del cono troncato descritto da AB (762)) $=QR\times2CV\pi$. Infine il cilindro descritto da $AE=RK$ e da $EK=CV$, ha per superficie $RK\times2CV\pi$. Perciò *la superficie dello sferoide* $=(SQ+QR+RK+KL+LN)2CV\pi=SN\times2CV\pi$, cioè *è eguale al prodotto del suo asse, o del diametro del circolo circoscritto per la circonferenza del circolo inscritto.*

763. *La superficie della sfera del diametro* 2r *equivale al rettangolo del diametro* 2r *e della circonferenza* $2r\pi$ *del circolo massimo o genitore.* A dimostrar questa insigne verità valgono argomenti affatto analoghi a quelli che abbiamo prodot-

ti per il cilindro e per il cono (758 *e segg.*). Si chiami Σ la sfera data, e si supponga che il rettangolo $2r\times 2r\pi$ dia non la superficie S di Σ, ma la superficie S' di una nuova sfera Σ' di raggio r'; e sia in primo luogo $r'>r$. Se s'immagini inscritto al circolo del raggio r' generatore della sfera Σ', un tal poligono regolare che il circolo inscritto al medesimo abbia un raggio r'' medio fra r ed r', condizione a cui potremo sempre arrivare col noto mezzo della suddivisione degli archi (603), e se si chiami Π la superficie dello sferoide generato dalla rivoluzione di questo poligono, avremo $\Pi=2r'\times 2r''\pi$, (762) e poichè in ipotesi $2r'$ e $2r''$ sono maggiori di $2r$ sarà dunque $\Pi>2r\times 2r\pi$, cioè maggiore di S', mentre dovrebbe aversi (757) $\Pi<S'$ il che esclude dunque l'ipotesi di $r'>r$, essia quella che il rettangolo $2r\times 2r\pi$ possa rappresentar la superficie di una sfera Σ' più grande della data Σ.

Sia dunque $\Sigma'<\Sigma$, cioè si supponga che $2r\times 2r\pi$ rappresenti la superficie di una sfera di raggio $r'<r$. Circoscritto adesso a Σ' uno sferoide il cui asse $2a$ sia medio fra $2r$ e $2r'$, e chiamatane Π la superficie, avremo (762) $\Pi=2a\times 2r'\pi$, e ragionando come sopra, troveremo $\Pi<2r\times 2r\pi$, cioè minore di S', mentre dovrebbe aversi (757) $\Pi>S'$; per la qual cosa neppur dunque può ammettersi che il rettangolo $2r\times 2r\pi$ rappresenti una sfera minore della data. Rappresenterà dunque precisamente la data, ed avremo $S=2r\times 2r\pi$.

764. Poichè $2r\times 2r\pi=4r^2\pi$; perciò 1°. *la superficie della sfera è quadrupla della superficie* $r^2\pi$ *del suo circolo massimo* (637); 2°. *è eguale alla superficie convessa del cilindro circoscritto*, perchè questa corrisponde evidentemente al rettangolo $FA\times 2AK\pi$ (758) $=2r\times 2r\pi=4r^2\pi$; e siccome ambedue le basi del cilindro circoscritto hanno per superficie $r^2\pi$, e quindi la superficie totale di questo solido è $6r^2\pi$, perciò 3°. *la superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto come* $4r^2\pi : 6r^2\pi :: 2:3$. 4°. *Le superficie di due sfere stanno come i quadrati dei loro raggi*: infatti avendosi per l'una $S=4r^2\pi$ e per l'altra $S'=4r'^2\pi$, sarà $S:S'::r^2:r'^2$

Fig. 99.

765. *La superficie totale del cono equilatero* DIL *circoscritto alla sfera sta a quella della sfera come* 9 : 4. Infatti poichè il lato eguale ad r dell' esagono

Fig.99. (605) dà $r\sqrt{3}$ per quello del triangolo equilatero inscritto (680), e in conseguenza $2r\sqrt{3}$ per quello del triangolo equilatero circoscritto (605), sarà dunque $DI=2r\sqrt{3}$, $IK=\frac{1}{2}IL=\frac{1}{2}DI=r\sqrt{3}$, e $DK=\sqrt{(DI^2-IK^2)}=3r$; e avremo quindi $3r^2\pi$ per la base, $6r^2\pi$ per la superficie convessa (760), e $9r^2\pi$ per la superficie totale del cono DIL, e $9r^2\pi : 4r^2\pi :: 9 : 4$. Perciò le superficie totali della sfera, del cilindro e del cono equilatero circoscritto sono $:: 4 : 6 : 9$. Si proverebbe nel modo stesso che le superficie totali della sfera, del cilindro e cono equilateri inscritti stanno $:: 16 : 12 : 9$. E se, concepito il cono ACB e il solido scavato HAKBMKH, e presa $QK=x$, si conduca NQ parallela ad AB, sarà $NQ^2\pi=r^2\pi$, $OQ^2\pi=(2rx-x^2)\pi$ (657), ed $NQ^2\pi-OQ^2\pi=(r-x)^2\pi=CQ^2\pi=PQ^2\pi$, cioè la base del solido generato dalla rivoluzione del curvilineo HNO, eguaglierà la base del cono corrispondente PCR.

96. 766. *La superficie* S *di qualunque segmento sferico* BPMCB *eguaglia il rettangolo dell' altezza* CP *nella circonferenza* $2r\pi$ *del circolo massimo della sfera.* Poichè qualora si avesse $S<CP\times 2r\pi$, e questo rettangolo equivalesse piuttosto alla superficie S' di un segmento sferico della stessa altezza CP, ma preso in una sfera Σ' di raggio $r'>r$, se s' immagini inscritto nella sfera Σ' uno sferoide regolare con l' asse nella direzione di CP, e tale che la sfera inscritta al medesimo abbia un raggio r'' medio fra r ed r', la porzione di questo sferoide compresa nel supposto segmento dell' altezza CP, avrà per superficie $\Pi=CP\times 2r''\pi$ (762); e poichè in ipotesi abbiamo $r''>r$ e $<r'$, sarà $\Pi>CP\times 2r\pi$, cioè $>S'$, mentre dovrebbe visibilmente aversi $\Pi<S'$. Non può dunque ammettersi che sia $S<CP\times 2r\pi$. E neppur può ammettersi che sia $S>CP\times 2r\pi$; perchè in tal caso converrebbe che l' altro segmento BFAGM, il quale insieme col primo deve manifestamente formare l' intera superficie $AC\times 2r\pi$ della sfera, fosse $<AP\times 2r\pi$, il che si è dimostrato impossibile. Dovrà dunque aversi $S=CP\times 2r\pi$.

767. Come per il segmento BPMCB si ha la superficie $S=CP\times 2r\pi$, così per il segmento $NQnCN$ avremo $S'=CQ\times 2r\pi$. Togliendo dunque il primo dal secondo resterà per la *zona* sferica $NnMB$ la superficie $S''=(CQ-CP)\times 2r\pi=PQ\times 2r\pi$: perciò anche *la superficie della zona sferica eguaglia il rettangolo della circonferenza del circolo massimo per l' altezza della zona, ossia per la distanza delle sue basi parallele.*

Solidità o volume dei Solidi di rivoluio ne

768. *La solidità* S *del cilindro* C *eguaglia quella di un prisma della stessa altezza e di base equivalente, ossia il prodotto della sua base moltiplicata per la sua altezza.* Sia a l'altezza, r il raggio, e quindi $r^2\pi$ (637) la base del cilindro, e si supponga che il prodotto $a\times r^2\pi$ non dia la solidità S del cilindro C, ma la solidità S' di un cilindro C' del raggio r'. E per maggior facilità s'immaginino i due solidi inclusi l'uno nell'altro in modo che gli assi coincidano insieme, e le basi si soprappongano in un medesimo piano. Se nello spazio che passa tra loro s'includa un prisma retto dell'altezza a dei due cilindri, e se ne rappresenti la base con b, il volume con V, avremo $V=ab$ (740), e dovrà necessariamente esser V maggiore della solidità del cilindro interno, minore di quella dell'esterno. Ora se l'esterno e maggiore sia C', e per conseguenza $r'>r$, sarà altresì $b>r^2\pi$, e perciò $V>ar^2\pi$, cioè maggiore del cilindro C' esterno, entro il quale è contenuto, il che è assurdo; e se sia C' il cilindro minore ed interno, e per conseguenza $r>r'$, avremo $b<r^2\pi$, e perciò $V<ar^2\pi$, cioè il prisma V minore del cilindro contenuto C', il che è egualmente assurdo. Non potrà dunque aver luogo un cilindro C' della solidità $ar^2\pi$ e diverso da C; dunque questa solidità è quella del cilindro C.

769. Con argomenti di egual natura si prova che *la solidità* S *del cono retto* C *eguaglia il terzo di quella di un prisma della stessa altezza* a *e di base equivalente,* ossia *eguaglia il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.* Chiamata a l'altezza del cono, r il raggio, e quindi $r^2\pi$ la superficie della base, se il prodotto $\frac{1}{3}a\times r^2\pi$ non dà la superficie del cono C, potremo supporre che dia quella di un cono C' della medesima altezza a, ma con la base $r'^2\pi$. Inclusi i due solidi l'uno dentro l'altro in modo che i loro assi si confondano insieme, e le basi cadano sopra il medesimo piano, s'immagini che nell'intervallo che passa fra i perimetri di queste basi sia de-

scritto un poligono regolare della superficie b, e che serva di base ad una piramide P dell'altezza a dei due coni; avremo $P=\frac{1}{3}a\times b$ (744), volume che dovrà esser maggiore del cono interno, minore dell'esterno. Or sia $r'>r$, e in conseguenza il cono C' che ha la supposta solidità $\frac{1}{3}a\times r^2\pi$ sia l'esterno; sarà $b>r^2\pi$ base del cono interno, e quindi $P>\frac{1}{3}a\times r^2\pi$, cioè la piramide sarà maggiore in volume del cono esterno, il che è assurdo; e se $r'<r$, sarà C' il cono interno, ed avremo $b<r^2\pi$, e perciò $P<\frac{1}{3}a\times r^2\pi$, cioè la solidità della piramide minore di quella del cono interno, il che è assurdo. Il supposto cono C' diverso da C, e della solidità $\frac{1}{3}a\times r^2\pi$, non può dunque aver luogo, e perciò quel volume sarà il volume del dato cono C.

770. Quanto alla solidità del tronco di cono potrà aversi come quella del tronco di piramide (746); se non che supposti r, r' i raggi delle due basi superiore e inferiore, sarà $B=r^2\pi, b=r'^2\pi$, e quindi $S=\frac{\pi d}{3}(r^2+r'^2+rr')$, ove d rappresenta non più l'apotema (761), ma bensì l'altezza del dato tronco di cono.

771. La solidità d'uno sferoide regolare può aversi direttamente nel modo che segue. Si ritenga la costruzione fatta al parag. 762, e di più si prolunghino fino al loro incontro in O il semiasse CS e il lato AB, e si conducano CB, CA, e per M l'YX normale fra le parallele YQ, AR. La metà superiore del cercato volume S dello sferoide si comporrà dei tre solidi S', S'', S''' generati dalla rivoluzione dei triangoli BCS, ACB, ZCA. Il primo si compone di due coni opposti generati dai triangoli BQS, BQC, che avendo per comun base il circolo descritto da BQ e per altezza l'uno SQ, l'altro QC, daranno $S'=(769)\ \frac{1}{3}\pi\times BQ^2\times SQ+\frac{1}{3}\pi\times BQ^2\times QC=\frac{1}{3}\pi\times BQ^2\times CS$. Ma i triangoli simili BQS, SCV (763) danno $BQ^2 : BS^2 :: CV^2 : CS^2$, e immaginato un circolo circoscritto al poligono, ben si comprende che avremo (657) $BS^2=SN\times SQ=2CS\times SQ$, e perciò $BQ^2 : 2SQ :: CV^2 : CS$, e $BQ^2\times CS=2CV^2\times SQ$; dunque il valor già trovato del primo solido potrà cangiarsi in $S'=\frac{2}{3}\pi\times CV^2\times SQ$.

Fig. 98.

Quanto al secondo si noterà, che i triangoli CAO, CBO generano due solidi conformi al precedente, e dei quali S'' è differenza.

Dunque in primo luogo $S''=\frac{1}{3}\pi\times AR^2\times CO-\frac{1}{3}\pi\times BQ^2\times CO$ Fig.98
$=\frac{1}{3}\pi\times CO(AR^2-BQ^2)=$ (655) $\frac{1}{3}\pi\times CO\,(AR+BQ)\,(AR-BQ)$ Ma $AR=AX+XR=AX+MP$, $BQ=QY-BY=MP-BY$, e i triangoli rettangoli AXM, MYB nei quali $AM=MB$ (763) danno $AX=BY$, e quindi $AR+BQ=2MP$; ed in oltre $AR-BQ=AR-DR=AD$; dunque in secondo luogo $S''=\frac{2}{3}\pi\times CO\times MP\times AD$. Infine i triangoli simili ADB, CMO danno $AD:AB::CM:CO$ ed $AD\times CO=AB\times CM$, e dai triangoli parimente simili ADB, CMP abbiamo $AB:BD::CM:MP$, d' onde $AB\times MP=BD\times CM=QR\times CM$; dunque per ultimo $S''=\frac{2}{3}\pi\times CM^2\times QR$.

Quanto al terzo solido generato da CZA è desso visibilmente la differenza fra $\pi\times AR^2\times RC$, cilindro generato dal rettangolo CA, e $\frac{1}{3}\pi\times AR^2\times RC$, cono generato dal triangolo CRA; sarà dunque $S'''=\frac{2}{3}\pi\times AR^2\times RC$. Or poichè $AR=ZC=CM=CV$, avremo dunque per il semisferoide $\frac{1}{2}S=S'+S''+S'''=\frac{2}{3}\pi\times CV^2\times(SQ+QR+RC)=\frac{2}{3}\pi\times CV^2\times CS$; e quindi per lo sferoide intero $S=\frac{2}{3}\pi\times CV^2\times 2CS=\frac{2}{3}\pi\times CV^2\times SN$; e perciò *la solidità d' uno sferoide regolare eguaglia* $\frac{2}{3}$ *del prodotto della superficie del circolo inscritto per l' asse, o per il diametro del circolo circoscritto.*

772. Dopo ciò, e usando dello stesso tenore di raziocinj che abbiamo adoperati per il cilindro e per il cono, facilmente giungeremo a provare che la *solidità della sfera eguaglia il terzo del prodotto del suo raggio* r *per la sua superficie* $4r^2\pi$ (764). Si supponga infatti che il prodotto $\frac{r}{3}\times 4r^2\pi$ in luogo di dar la solidità S della sfera del raggio r, dia la solidità S' di una sfera del raggio r', onde si abbia $S'=\frac{r}{3}\times 4r^2\pi=\frac{2}{3}\times 2r\times r^2\pi$. Rese concentriche le due sfere, s' immagini circoscritto all' interna uno sferoide regolare il cui asse $2a$ sia medio fra $2r$ e $2r'$, onde il solido rimanga incluso tra l' una e l' altra sfera, e se ne rappresenti con Σ la solidità. Se si suppone $r'>r$, sarà S la sfera interna, ed avremo (771) $\Sigma=\frac{2}{3}\times 2a\times r^2\pi$; e poichè con $r'>r$ si ha $2a>2r$, sarà $\Sigma>\frac{2}{3}\times 2r\times r^2\pi$, cioè maggiore della solidità della sfera esterna S', il che è assurdo: e se si suppone all' opposto $r>r'$, sarà S' la sfera interna, ed avremo

$\Sigma = \frac{2}{3} \times 2a \times r'^2\pi$, e siccome in questo caso abbiamo $2a < 2r$, sarà $\Sigma < \frac{2}{3} \times 2r \times r^2\pi$, cioè il volume dello sferoide minore di quello della sfera a cui è circoscritto, assurdo eguale al precedente. Perciò la solidità $\frac{1}{3} \times 4r^2\pi$ non può appartenere ad altra sfera di raggio maggiore o minore della data; sarà dunque la solidità della data.

773. Dunque 1°. *l'espressione della solidità d'una sfera del raggio* r *è* $\frac{4}{3}r^3\pi$; e poichè quella del cilindro circoscritto è (768) $2r \times r^2\pi = 2r^3\pi$, perciò 2°. *le solidità della sfera e del cilindro circoscritto stanno fra loro nel rapporto di* 2 : 3, cioè nel rapporto medesimo delle loro superficie (764.3°); 3°. *due sfere stanno come i cubi dei raggi*; infatti avendosi per l'una $S = \frac{4}{3}r^3\pi$, per l'altra $S' = \frac{4}{3}r'^3\pi$ avremo, $S : S' :: r^3 : r'^3$.

774. Poichè il cono equilatero circoscritto ha $3r^2\pi$ per base, e $3r$ per altezza (765), avrà dunque $3r^3\pi$ per solidità (769), e perciò le tre solidità della sfera e del cilindro e cono equilatero circoscritto staranno fra loro :: 4 : 6 : 9, appunto come le superficie (765). Se il cono abbia l'altezza e base stessa del cilindro, sarà il terzo di esso (769), e il cilindro, la sfera e il cono staranno :: $2r^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi : \frac{2}{3}r^3\pi$ :: 6 : 4 : 2 :: 3 : 2 : 1; onde il cilindro AM meno l'emisfero HKM, cioè il solido scavato HAKBMKH, eguaglia il cono ACB. Fig. 99.

775. *La solidità* S *del settore sferico, generato dalla rivoluzione del settor circolare* CM*i*C, *è* $\frac{2}{3}$ *del prodotto della superficie* $r^2\pi$ *del circolo generator della sfera nell'altezza o ascissa* *i*P *del segmento sferico* M*i*U *che serve di base al settore*. Ciò si prova ragionando precisamente come abbiamo fatto per la sfera intera. Se il prodotto $\frac{2}{3} \times iP \times r^2\pi$ non dà il volume del proposto settore, può sempre supporsi che dia quello di un settore con base dell'altezza medesima iP, ma in una sfera differente Σ' di raggio r'. Rese concentriche le due sfere, e circoscritto il solito sferoide regolare alla sfera interna (772), il settore sferoidale generato dal settore poligono CMBSC avrebbe per solidità $V = (771)\ \frac{2}{3} \times SP \times r^2\pi$ se fosse $r' > r$ e quindi interna la sfera del raggio r, e $V = \frac{2}{3} \times SP \times r'^2\pi$ se fosse $r > r'$, e perciò interna la sfera del raggio r'. E poichè $SP > iP$ si avrebbe nel primo caso $\Sigma' > S'$; come si troverebbe nel secondo $\Sigma' < S'$, conseguenze, come in tutti i precedenti casi consimili, (Fig. 98.)

assurde e insussistenti, e dalle quali perciò si conclude in egual modo che il prodotto $\frac{2}{3}\times iP\times r^2\pi$ equivale realmente al volume del proposto settore.

776. La solidità del segmento sferico BCMP si avrà togliendo da $\frac{2}{3}r^2\pi\times CP$ solidità del settore sferico CBDM, la solidità $\frac{1}{3}\pi\times BP^2\times PD$ del cono BDM (769). E poichè $BP^2=CP\times PA$ (657) $=CP(2r-CP)$, e $PD=r-CP$, troveremo perciò $S=\pi\times CP^2(r-\frac{CP}{3})$. Posto CQ in luogo di CP, dalla stessa espressione avremo la solidità del segmento $NCnQ$, e la differenza fra l'uno e l'altro volume ci darà quello della zona sferica $NBMn$. Fig. 96.

777. Ecco alcuni Problemi per esercizio dei principianti, che potranno scioglierli o nel primo o nel secondo anno dei loro Studj, or per sintesi or per analisi, ed or nell'una e nell'altra maniera.

I. Data di posizione una retta e due punti fuori di essa, descrivere un circolo che passi per questi punti e sia tangente alla retta data.

II. Dati di posizione due circoli non concentrici, condurre una retta tangente ad ambedue.

III. Dati gli stessi due circoli, descriverne un terzo di grandezza data e che sia tangente ad ambedue.

IV. Condotta dal vertice di un triangolo non isoscele una normale sulla base, dimostrare che la differenza dei segmenti è maggiore della differenza dei lati.

V. Condotte da un punto qualunque di un dei lati di un rettangolo due rette all'estremità del lato opposto, determinare il rapporto del nuovo triangolo al rettangolo. *Ris.* Il triangolo è metà del rettangolo.

VI. Condotte da un punto qualunque d'un triangolo equilatero tre normali ai tre lati, assegnar la ragione della lor somma alla normale che dal vertice del triangolo va alla base. *Ris.* La ragione è d'egualità.

VII. Descritti tre quadrati sui lati d'un triangolo qualunque, e congiunte le loro estremità con linee rette, e di nuovo sopra queste descritti tre altri quadrati, e unite con due rette le quattro estremità corrispondenti di ciascuna lor coppia, assegnar la ragione del dato triangolo a ciascun dei nove che ne risulteranno. *Ris.* Ciascuno dei nove eguaglia il dato.

VIII. Costruire un rettangolo equivalente ad un dato quadrato e i cui lati adiacenti facciano una data somma o eguaglino in lunghezza una retta data.

IX. Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato dato, e i cui lati adiacenti abbian fra di loro una differenza data.

X. Condotte dai tre vertici di un triangolo tre rette sulle metà dei lati opposti, determinar la ragione della somma dei loro quadrati a quella dei quadrati dei lati. *Ris.* La ragione è di 3 : 4.

F.105. XI. Determinar la figura contenuta dalle quattro rette che partono dal mezzo di ciascun lato d' un quadrilatero, e la sua ragione al quadrilatero. *Ris.* La figura è un parallelogrammo, che è metà del quadrilatero.

106. XII. Nel parallelogrammo ABCD condotta la diagonale AC, e per un punto qualunque G di questa condotta EF parallela al lato AB, e in ultimo la diagonale FB del nuovo parallelogrammo ABEF, determinar la ragione delle tre rette GH, HA, HC. *Ris.* La ragione è continua.

74. XIII. Per un punto P preso dentro un angolo BAE condurre una retta BPE tale, che l'area BAE eguagli una data superficie m^2. *Ris.* Condotte PM,PN, l'una parallela, l' altra normale ad AE, e chiamandole a,b, si avrà $AE=x=$ . . . . . . $\frac{m^2\pm m\sqrt{(m^2-2ab)}}{b}$.

107. XIV. Prolungati i lati KI,IG d'un parallelogrammo HI, e da un punto qualunque come vertice descritti tre triangoli sui lati KI, IG e sulla diagonale HI condotta per l' angolo contenuto dai lati KI,IG, assegnar la ragione di quelli a questo 1°. quando il vertice è dentro l'angolo CIA o DIK; 2°. quando è dentro l'angolo KIG o DIA; 3°. quando è in uno dei due lati, o nella diagonale, o nel prolungamento degli uni o dell'altra. *Ris.* 1.° il triangolo sulla diagonale eguaglia la somma di quelli sui lati: 2°. ne eguaglia la differenza: 3°. i tre triangoli divengon due e sono eguali.

XV. Inscrivere in un dato triangolo un rettangolo che eguagli un poligono dato. *Ris.* Fatto ac il poligono, a la base del triangolo, d la sua normale dal vertice, b un suo lato, la parte cercata di esso, presa dal vertice, sarà $x=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-\frac{b^2c}{d}\right)}$.

XVI. Inscrivere un quadrato in un semicircolo. *Ris.* Chiamato $2a$ il diametro, l'incognita presa dall'estremità del diametro sarà $x=a\pm\sqrt{\frac{a^2}{5}}$.

59. XVII. Alzata nel semicircolo AMB l'ordinata PM per cui passi una corda NB condotta dall'estremità del diametro, trovar la ragione dei rettangoli AB$\times$BP ed NB$\times$BD. *Ris.* La ragione è d' egualità.

51. XVIII. Condotte da un punto M della circonferenza, il cui centro è C, la tangente MT e l' ordinata MP, assegnar la ragione delle quattro linee TA, TP, TC, TB prese sul diametro dall' origine della tangente. *Ris.* La ragione è geometrica.

53. XIX. Per un punto A dato in un circolo condurre la corda BAD tale che sia AD : AB :: m : n. *Ris.* Supposto $2r$ il raggio del circolo, e fatta $AC=b$, avremo $AB=x=\sqrt{\left(\frac{m}{n}(r^2-b^2)\right)}$.

XX. Condurre per lo stesso punto A una corda BAD eguale in lunghezza ad una data retta $c<2r$. *Ris.* Fatta come sopra AC$=b$, avremo AD$=x=$ . . . . . $\frac{c+\sqrt{(c^2+4b^2-4r^2)}}{2}$. Fig. 53.

XXI. Assegnare l'espressione o valore dei lati 1°. del triangolo equilatero inscritto. 2°. del decagono regolare inscritto; 3°. del pentagono regolare inscritto; 4°. del pentadecagono regolare inscritto. *Ris.* 1°. $x=r\sqrt{3}$; 2°. $x=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$; 3°. $x=\frac{r}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$; 4°. $x=\frac{r}{4}(\sqrt{(10+2\sqrt{5})}+\sqrt{3}-\sqrt{15})$.

XXII. Data l'altezza a di un triangolo, la somma b dei lati, e la differenza c dei segmenti della base, costruire il triangolo. *Ris.* Chiamato x il segmento minore sarà $x=-\frac{c}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{b^2-c^2-4a^2}{b^2-c^2}\right)}$.

XXIII. Supposto rettangolo il triangolo, e dato il minor cateto b, e la differenza c dei segmenti della base, costruire il triangolo. *Ris.* Se, come sopra, sia x il minor segmento, si avrà $x=-\frac{c}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{(8b^2+c^2)}$.

XXIV. Dato un lato a intorno all'angolo retto d'un triangolo rettangolo e l'aggregato b degli altri due, trovar questi lati. *Ris.* L'ipotenusa sarà $x=\frac{a^2+b^2}{2b}$.

XXV. I quadrati del lato del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari iscritti in un circolo, qual ragione hanno tra loro? *Ris.* Il quadrato dell'uno eguaglia quegli degli altri due.

XXVI. Qual ragione hanno tra loro le differenze degli esagoni regolari circoscritto ed inscritto ad un circolo, dell'esagono e triangolo inscritti, del triangolo ed esagono circoscritti, e dell'esagono circoscritto e triangolo inscritto? *Ris.* Continua aritmetica.

XXVII. Inscritto e circoscritto al circolo uno stesso poligono regolare, trovare il raggio del circolo a cui circoscrivendo o inscrivendo un poligono simile, il nuovo poligono eguagli la differenza dei dati. *Ris.* Il raggio cercato è nel primo caso la metà del lato del dato poligono inscritto, nel secondo la metà del lato del circoscritto.

XXVIII. Data l'area AN$=a$, ed il solo contorno laterale ALMNC$=c$ d'una figura, trovare un rettangolo che la eguagli in area, e con tre de' suoi lati anche in contorno. *Ris.* Se l, p sieno la larghezza e l'altezza del rettangolo cercato, si avrà $p=\frac{c+\sqrt{(a^2-8a)}}{4}$, $l=\frac{4a}{c+\sqrt{(c^2-8a)}}$. 81.

XXIX. Da un dato punto d'un lato dividere un triangolo in qualunque numero n di parti eguali. *Ris.* La soluzione dipende dal num°. 641.

XXX. Dividere un triangolo in n parti eguali con rette parallele ad un lato. *Ris.* Fatto a il lato contiguo, la parte di esso (dal vertice) da cui deve condursi la prima arallela, sarà $x=\sqrt{\frac{a^2}{n}}$.

XXXI. Trovare un circolo eguale alla superficie d'un dato cilindro o cono retto. *Ris.* Se a sia il lato del solido, r il raggio della sua base, x quello del circolo cercato, si avrà $x=\sqrt{2ar}$ per il cilindro, $x=\sqrt{ar}$ per il cono.

Fig. 97. XXXII. Dato un tronco di cono retto CD con le basi AC, DE parallele, farvi una sezione HI parallela alle basi in modo che la circonferenza di essa sia media proporzionale aritmetica tra le circonferenze delle basi. *Ris.* Se sia $EC=d$, $EI=x$, si avrà $x=\frac{d}{2}$.

XXXIII. Trovare un circolo eguale alla superficie d'un dato segmento sferico. *Ris.* Se sia a l'altezza del segmento, r il raggio della sua sfera, quello del circolo cercato sarà $x=\sqrt{2ar}$.

XXXIV. Trovare una sfera eguale in solidità ad un dato segmento sferico. *Ris.* Prese le denominazioni del passato problema, il raggio della sfera sarà $x=$. . . . $\sqrt[3]{\left(\frac{3a^2r-a^3}{4}\right)}$.

XXXV. Trovare una sfera eguale alla somma d'un cono e d'un tronco di cono retti. *Ris.* Se a, a' sieno l'altezza del cono e del tronco, ed r, r', r'' i raggi delle lor basi, quello della sfera cercata sarà $x=\sqrt[3]{\left(\frac{ar^2+a'(r'^2+r''^2+r'r'')}{4}\right)}$.

XXXVI. Data una sfera formarne un cono retto 1°. della data base, 2°. della data altezza, 3°. o un tronco di cono retto delle date basi, o d'una base e d'una altezza data. *Ris.* 1°. Se r, r' sieno i raggi della della sfera e del cono, l'altezza di esso sarà $x=\frac{4r^3}{r'^2}$: 2°. se sia a l'altezza del cono, il raggio della sua base sarà $y=2r\sqrt{\frac{r}{a}}$: 3°. se r', r'' sieno i raggi delle basi del tronco, la sua altezza sarà $x=\frac{4r^3}{r'^2+r''^2+r'r''}$; 4°. se sia r' il raggio della base del tronco, a la sua altezza, il raggio dell'altra base sarà $x=-\frac{r'}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4r^3}{a}-\frac{3r'^2}{4}\right)}$.

AGGIUNTE, VARIAZIONI E CORREZIONI

§. 10. Ai tre teoremi di questo paragrafo potranno aggiungersi i seguenti: 4.° Che il minimo numero di m cifre è 10^{m-1}; infatti perchè il numero sia minimo dovranno le sue cifre avere il minor valore possibile; quindi la prima non potrà essere che l'unità, e tutte le altre dovranno essere zero; condizioni che visibilmente riducono l'espressione generale del numero ad $N=10^{m-1}$. 5.° Che il massimo numero di m cifre è 10^m-1; infatti le cifre di questo numero dovranno tutte avere il massimo valore, e perciò ciascuna sarà eguale a 9: in tal caso l'espressione generale si cangerà in $N=9(10^{m-1}+10^{m-2}+10^{m-3}+ec.\ldots\ldots+1)$. Sommata la progressione decrescente contenuta nel fattor polinomio, per la quale si ha $\omega=1$, $q=\frac{1}{10}$, $n=m$, avremo (372) $N=9\frac{10^m-1}{9}=10^m-1$. 6.° Il prodotto di due fattori, l'uno di m l'altro di n cifre, non può avere nè più di $m+n$ cifre, nè meno di $m+n-1$: infatti potendo l'uno rappresentarsi con $10^{m-1}a+10^{m-2}b+ec.$, l'altro con $10^{n-1}a'+10^{n-2}b'+ec$, il loro prodotto verrà espresso da $10^{m+n-2}ab+10^{m+n-3}(a'b+qb')+ec.$; numero che non potrà avere meno di $m+n-1$ cifre, anche supposto che il prodotto ab non superi il 10: che se abbiasi $ab>10$, siccome dovrà sempre aversi $ab<100$, potremo dunque rappresentare questo prodotto con $10\alpha+\beta$, nel qual caso il prodotto generale diverrà $10^{m+n-1}\alpha+10^{m+n-2}\beta+ec.$ nè potrà avere più di $m+n$ cifre. 7.° Quindi un quadrato qualunque avrà sempre un numero di cifre doppio di quello della radice, o una meno del doppio, secondo che la cifra iniziale sarà >3, o <4.

§. 40. *v.* 10. « Si chiamano *prime tra loro* » In significato più esteso soglion chiamarsi primi tra loro due numeri che non abbiano verun divisore comune.

§. 92. Al termine di questo paragrafo si aggiunga « Qui frattanto gioverà osservare di passaggio che se nei valori generici di M_k ed N_k si cangi k in $k+1$ e quindi si faccia $k=1$ si avrà $M_2=p_2M_1+q_2M_0$, $N_2=p_2N_1+q_2N_0$; ma di sopra abbiamo $M_2=p_2M_1$, $N_2=p_2N_1+q_2$, dunque $M_0=0$, $N_0=1$. Ciò sia detto per tutti quei casi in cui possano incontrarsi le espressioni M_0 ed N_0.

§. 94. *v.* 4. « Ma dai superiori valori ec. » Prevalendoci dei valori trovati di sopra di $M_0=0$, ed $N_0=1$, potremo sostituire a quella del testo l'analisi seguente: « e cangiato k in $k+1$, $M_{k+1}N_k-M_{k+1}N_k=q_{k+1}(N_{k-1}M_k-N_kM_{k-1})$. E se in quest'ultima espressione porremo successivamente $k=1,=2,=3$, ec. avremo

$$M_1N_2-M_2N_1=q_2M_1=q_1q_2$$
$$M_2N_3-M_3N_2=q_3(M_2N_1-M_1N_2)=-q_1q_2q_3$$

e così di seguito come nel testo.

§. 109. Art. III. *v.* 1.°. A quanto vien dimostrato in quest' articolo può giungersi assai più chiaramente nel modo che segue. Poichè la convergente $\frac{N_k}{M_k}$ corrisponde al valore della frazione in cui si svolge il rotto improprio $\frac{A}{B}$, troncato a p_k, sarà dunque $\frac{N_k}{M_k}=p_1+\cfrac{1}{p_2+\cfrac{1}{p_3+\text{ec.}+\cfrac{1}{p_k}}}$, ove p_1 sono gl'interi contenuti in $\frac{A}{B}$, e il rimanente corrisponde, come è chiaro, ad un rotto proprio. Di qui risulta evidentemente che gl'interi contenuti in $\frac{N_k}{M_k}$ non possono essere nè più nè meno di quelli contenuti in $\frac{A}{B}$. Si eccettui la convergente $\frac{N_2}{M_2}$, per cui $k=2$, nel caso di $p_2=1$; poichè allora si ha $\frac{N_2}{M_2}=p_1+1$. Si osserverà poi che tolti gl'interi p_1, e ridotta la convergente ad $\frac{N_k-p_1M_k}{M_k}$, questa convergerà verso la frazione $\cfrac{1}{p_2+\cfrac{1}{p_3+\cfrac{1}{p_4}+\text{ec.}}}$ equivalente al rotto prorio $\frac{A}{B}-p_1$, cioè il residuo convergerà verso il rotto $\frac{A-p_1B}{B}$.

§. 110. *v.* 1.°. Perchè sull' esempio qui proposto possano verificarsi tutte quante le formule stabilite, sarà utile aver sott' occhio oltre i valori dei quozienti p_1, p_2, ec. quelli ancora dei resti R_1, R_2, R_3, ec. che sono i seguenti: $R_1=9294$, $R_2=1779$, $R_3=399$, $R_4=183$, $R_5=33$, $R_6=18$, $R_7=15$, $R_8=3$, $R_9=0$.

§§. 122. e 125. A illustrazione di questi due paragrafi aggiungeremo, che il chilogrammo equivale al peso dell'acqua stillata contenuta in un decimetro cubo o in un litro e ridotta alla sua maggior densità, il che ha luogo a 4° di temperatura; e che 100 litri formano un ettolitro, 1000 litri, o un metro cubo, formano un chilolitro.

§. 181 *in fine*. Per un esempio che abbracci tutti quanti i proposti casi potrà prendersi $\frac{x+2}{2^{10}x^2(x-1)(x^2+x+1)^4}$. Fatto $x=\frac{z-1}{2}$, il rotto si cangerà in $\frac{z+3}{(z-3)(z-1)^2(z^2+3)^4}$, e posto $\frac{z+3}{(z-3)(z-1)^2(z^2+3)^4}=\frac{A}{z-3}+\frac{A'}{(z-1)^2}+\frac{A''}{z-1}+\frac{Kz+L}{(z^2+3)^4}+\frac{K'z+L'}{(z^2+3)^3}+\frac{K''z+L''}{(z^2+3)^2}+\frac{K'''z+L'''}{z^2+3}$, si troverà $A=\frac{1}{3^3 \cdot 2^9}$ $A'=-\frac{1}{2^7}$, $A''=\frac{5}{2^9}$, $K=0$, $L=\frac{1}{2^2}$, $K'=-\frac{1}{3 \cdot 2^3}$, $L'=\frac{1}{2^4}$, $K''=-\frac{7}{3^2 \cdot 2^5}$, $L''=\frac{1}{3 \cdot 2^6}$, $K'''=-\frac{17}{3^3 \cdot 2^6}$, $L'''=-\frac{5}{3^2 \cdot 2^8}$

§. 195. *in fine.* Si osserverà che la seconda delle due regole date in questo paragrafo per le radici reali si estende anche alle immaginarie. Infatti $\left(\sqrt[2m]{-a}\right)^{2m}=\left((-a)^{\frac{1}{2m}}\right)^{2m}=\left(-a\right)^{\frac{2m}{2m}}=\left(-a\right)^{1}=-a$; cosicchè $\left(\sqrt{-1}\right)^{2}=-1$.

§. 388. Si perverrà con maggiore evidenza al teorema finale di questo paragrafo, se supposto m pari e invertendo il valore di d_m si scriva $d_m=a-ma_1+\frac{m(m-1)}{2}a_2-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a_3+\text{ec.}+a_m$; d'onde nel caso della serie proposta avremo $d_m=0^m-m1^m+\frac{m(m-1)}{2}2^m-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}3^m+\text{ec.}+m^m$, ove posto in luogo di d_m l'altro valore $1.2.3\ldots\ldots m$, se dalla nuova equazione si sottragga l'altra $0=1-m+\frac{m(m-1)}{2}-\text{ec.}+1$ (220), si trasporti nel primo membro il primo termine -1 della differenza, e quindi si cangi m in $p-1$, troveremo $1.2.3.4\ldots\ldots(p-1)+1=\frac{(p-1)(p-2)}{2}(2^{p-1}-1)-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3}(3^{p-1}-1)+\text{ec.}+(p-1)^{p-1}-1$; ove, se p è numero primo, il secondo membro è tutto multiplo di p (42).

§. 425. *v.* 12, 13. « Serie il cui termine generale è $T=$ec. » Deve avvertirsi che il valor qui dato di T non è quello di un termine qualunque n^{simo}, ma quello di un termine parimente qualunque $(n+1)^{simo}$, mentre a questo e non all'altro corrisponde il fattore $q^n x^n$.

§. 454. *v.* 8. Reciprocamente $l_1=\frac{l}{A}=2{,}302585\text{ec.}\times l$; e potrà di passaggio osservarsi che se per l si prenda il logaritmo ordinario del 10, cioè l'unità, avremo logaritmo iperbolico $10=\frac{1}{A}=2{,}302585$ ec.; e quindi stabiliremo che un logaritmo ordinario si riduce a logaritmo iperbolico moltiplicandolo per il logaritmo iperbolico di 10.

§. 479. *in fine.* A questo quesito si riduce l'altro « A creditore di una somma s esigibile fra t anni, domanda di esser pagato a rate eguali in ciascun anno con l'abbono o sconto di r per 1. Si cerca il valore della rata. » In questo caso la rata incognita x corrisponde alla pensione p che nel quesito già sciolto era rilasciata per gli anni t. Avremo dunque $s=\frac{1}{2}tx\left(2+r(t-1)\right)$, d'onde $x=\frac{2s}{t\left(2+r(t-1)\right)}$.

§. 485. La soluzione di questo problema merita correzione. Infatti se si presume che B impieghi annualmente la rendita p, si deve presumere nel modo stesso che egli farà altrettanto della rendita rx che ritrarrà annualmente dal capitale incognito x, che A gli offre in isconto dell'annua rendita o dell'annua prestazione. Ciò concesso è chiaro che come la rendita annua p, presupposta impiegata per

anni t ad r per 1 l'anno, forma al termine degli anni t un cumulo corrispondente a $pt+\frac{prt}{2}(t-1)=pt\left(1+\frac{r}{2}(t-1)\right)$, la rendita rx ne darà uno equivalente ad $rtx\left(1+\frac{r}{2}(t-1)\right)$. Talchè B col capitale x ricevuto da A al termine del tempo t si troverà ad aver la somma $x\left(1+rt\left(1+\frac{r}{2}(t-1)\right)\right)$, somma che evidentemente dovrà eguagliare l'altra $pt\left(1+\frac{r}{2}(t-1)\right)$. Istituita e sciolta l'equazione troveremo $x=\frac{pt\left(1+\frac{r}{2}(t-1)\right)}{1+rt\left(1+\frac{r}{2}(t-1)\right)}=\frac{p}{1:t\left(1+\frac{r}{2}(t-1)\right)+r}$.

Se poi B non vuole abbonare l'impiego che potrà fare della rendita rx neppure potrà esigere che A gli abboni quello che potrebbe fare della rendita p. In quest'ipotesi il quesito si riduce a trovare un tal capitale, che impiegato ad r per 1, ammonti coi suoi frutti in t anni alla somma pt, quantità corrispondente al numero delle rendite percepite in anni t. In tal caso la formula $p=\frac{s}{1+rt}$, fatto $p=x$ e posto $s=pt$, darà $x=\frac{pt}{1+rt}$. Che se la rendita fosse perpetua dovremo porre $t=\infty$, nel qual caso tanto nell'una ipotesi quanto nell'altra, avremo $x=\frac{p}{r}$.

§. 637. v. 4. Se la lunghezza lineare del supposto arco nel circolo del raggio 1 sia u, e quindi ru nel circolo del raggio r, avremo $ru : 2r\pi :: a : 1$, d'onde $a=\frac{u}{2\pi}$; e quindi per la superficie cercata $s=\frac{1}{2}ur^2$.

§. 693 *in fine*. Dalla proposizione dimostrata in questo paragrafo si conclude assai spontaneamente; 1.° Che se una retta è normale ad un piano sarà parimente normale a tutte le rette condotte sul piano per il di lei piede. 2.° Che se un piano HD sia normale a CR, intersezione comune dei due piani CT e PQ, le di lui intersezioni AB, ED con questi piani saranno pure normali alla retta CR. Fig. 85

FINE DEL TOMO PRIMO

INDICE

DEL TOMO PRIMO

ERRATA

				ERRORI	CORREZIONI
pag.	16	*vers.*	15	di 3×5 e di 3×5	di 3×5
»	*ivi*	»	24	il dividendo A	il divisore B
»	44	»	5	separatamente dal resto	separatamente dalla parte non periodica che la precede
»	45	»	*penult.*	del logaritmo	del logaritmo (451)
»	46	»	1	della circonferenza	della circonferenza (822)
»	*ivi*	»	5	$p-1$	$b-1$
»	*ivi*	»	8	di e^{-1}	di e^{-1} (461)
»	*ivi*	»	6 *risal.*	a^4	a^3
»	51	»	14	$N_k N_{k+2}$	$N_k N_{k+1}$
»	54	»	9 *risal.*	ap_1	ap_2
»	61	»	7	663,787	993,787
»	84	»	1	il fattore $x=a$	il fattore $x-a$
»	86	»	16	Dunque $P-AS$	Dunque $P-A_1S$
»	87	»	*penult.*	d'una, di due	di dne, di tre
»	96	»	13	conterrà b^2 e le diecine di $20ab$	conterrà le due cifre finali della somma di b^2 con le diecine di $20ab$
»	*ivi*	»	25	se questo, secondo la regola, si moltiplichi per p	se secondo la regola si moltiplichi $20a+p$ per p
»	97	»	11	fino a quel punto	fino a quel punto, e per a la porzione di radice fino a quel punto ottenuta.
»	102	»	11 *risal.*	è irrazionale	è radice irrazionale di 2.° grado
»	103	»	12 *risal.*	un cubo c	un cubo c^3
»	104	»	4	$\left(ab\right)^{\frac{1}{2}m-1}$	$\left(ab\right)^{\frac{1}{2}(m-1)}$
»	*ivi*	»	16	questo	l'uno e l'altro
»	110	»	6	eguali	eguali purchè positive
»	*ivi*	»	21	$n>a$	$n>b$
»	115	»	*ult.*	summultiplo di m	summultiplo o nn multiplo di m
»	116	»	12 *risal.*	fossero alla stessa dimensione	formassero in ciascun termine la stessa dimensione
»	122	»	4 *risal.*	$x+8x$	x^2+8x
»	127	»	10,9 *ris.*	$A=$, $C=$	$-A=$, $-C=$
»	*ivi*	»	*ult.*	$(x-1+A)x^{m-1}$	$(x-1+A)x^{m-1}$
»	130	»	14 *risal.*	h immaginario	h immaginario, o per lo meno irrazionale
»	*ivi*	»	*ivi*	reale	reale e razionale contro l'ipotesi (257)

pag 133	*vers.*	10 *risal.*	$-bcdx$		$-acdx$
»	*ivi*	»	9 *risal.*	$+bcx^2$	$+bcx^2-bcdx$
»	142	»	25	$9a^2b^2x^2$	$6a^2b^2x^2$
»	152	»	12	$15y$	15ω
»	169	»	*ult.*	b^{n-1}	q^{n-1}
»	176	»	23	second' ordine	terz' ordine
»	179	»	17	f, a, d_1, d_2, ec. in luogo di a, d_1, d_2, d_3, ec	f, a, d_1, d_2, ec. $n-1$ in luogo di a, d_1, d_2, d_3, ec. n
»	180	»	4 *risal.*	$m-4$	$m-3$
»	182	»	8 e 9	posto $m-q$ in luogo di p, e $m-p$ in luogo di q	posto $m-p$ in luogo di q nel numeratore, ed $m-q$ in luogo di p nel deuominatore
»	183	»	2	si troverà per il caso di quattro persone	se le persone sono quattro si troverà per la terza e quarta
»	*ivi*	»	3 *risal.*	ciascuno	ciascuna
»	186	»	17	un ambo	un ambo ai primi due estratti
»	195	»	2	$\frac{a}{(c+bx)b^{n+1}}$	$\frac{a}{(b+cx)b^{n+1}}$
»	198	»	4	In pari assurdi ec.	(*Si tolga tutto questo periodo*)
»	242	»	11	col raggio FG	col raggio FG e col centro in F
»	*ivi*	»	17	$BG-q=g^1$	$BG=q-g^1$
»	253	»	12		(*Si citi in margine la* Fig. 49)
»	262	»	10	(*ivi*)	(611)
»	265	»	16 *in marg.* Fig. 67		Fig. 66.
»	294	»	6 *risal.*	(702)	(711)
»	306	»	9 *risal.*		(*Si citi in margine* Fig. 103)
»	322	»	*penult.*	$2r$	r

T A V O L A

DEI NUMERI PRIMI

col più piccolo divisore dei numeri impari non primi fino a 100000

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
0	.	.	.	3	.	.	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
1	.	.	.	.	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.	3	11	3	.
2	3	7	3	11	.	3	7	3	13	.	.	.	3	.	3	.	.	3	13	3
3	7	3	.	3	.	.	.	11	3	17	3	7	.	3	.	3	11	7	.	.
4	.	13	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	19	.	3	.	3	.
5	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	17	23	3	13	3	7	.	3	.	3
6	.	3	.	3	13	.	.	.	3	7	3	17	.	3	7	3	.	.	.	11
7	.	19	7	.	3	23	3	.	7	3	.	3	17	.	11	.	3	.	3	7
8	3	11	3	.	.	3	19	3	.	.	.	.	3	7	3	.	29	3	7	3
9	17	3	.	3	.	11	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	.	23	.	13
10	7	17	19	.	3	.	3	.	.	3	13	3	.	.	17	.	3	7	3	.
11	3	.	3	.	11	3	.	3	19	.	7	.	3	11	3	17	7	3	31	3
12	.	3	17	3	7	.	.	23	3	.	3	.	.	3	.	3	17	11	29	.
13	.	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	11	31	7	13	3	17	3	19
14	3	23	3	.	17	3	13	3	7	.	.	.	3	.	3	.	11	3	.	3
15	19	3	11	3	.	17	37	7	3	.	3	11	.	3	29	3	23	.	7	.
16	.	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	23	.	11	3	31	3	17
17	3	13	3	.	29	3	17	3	.	.	11	7	3	.	3	37	.	3	.	3
18	.	3	13	3	.	7	23	17	3	.	3	31	.	3	11	3	7	19	.	43
19	.	11	.	23	3	.	3	19	17	3	41	3	.	.	13	7	3	29	3	.
20	3	.	3	7	.	3	.	3	43	7	.	.	3	19	3	.	13	3	23	3
21	11	3	7	3	.	.	29	13	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	19	7
22	31	.	.	47	3	.	3	7	.	3	17	3	23	7	.	.	3	.	3	13
23	3	7	3	.	.	3	7	3	11	23	13	17	3	.	3	.	.	3	.	3
24	7	3	29	3	.	19	.	41	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	31
25	41	.	23	13	3	7	3	11	.	3	7	3	.	17	43	.	3	.	3	.
26	3	19	3	.	7	3	.	3	.	43	37	11	3	.	3	7	19	3	.	3
27	37	3	.	3	.	.	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	13	41	.
28	.	.	7	53	3	29	3	.	7	3	11	3	19	.	.	17	3	.	3	7
29	3	.	3	.	41	3	.	3	23	37	.	29	3	7	3	.	17	3	7	3
30	.	3	31	3	.	23	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3	.	17	11	.
31	7	29	13	.	3	11	3		.	3	53	3	31	13	.	43	3	7	3	47
32	3	.	3	.	13	3	.	3	.	11	7	.	3	53	3	41	7	3	17	3
33	.	3	.	3	7	.	31		3	.	3	.	.	3	47	3	13	.	.	17
34	19	41	.	7	3		3	13	11	3	23	3	47	.	7	19	3	11	3	.
35	3	31	3	11		3	.	3	7	13	.	.	.	.	3	.	.	3	.	3
36	13	3	.	3	23	.	.	7	3		3	19	.	3	.	3	11	.	7	41
37	.	7	11	.	3	47	3	.	61	3	.	3	7	.	37	.	3	19	3	23
38	3	.	3	13	37	3	11	3	.		43	7	3	.	3	11	23	3	.	3
39	47	3		3	.	7	.	.	3	.	3	.	.	3	31	3	7	.	.	11
40	.	.	.	19	3	.	3	.	.	3	.	3	29	37	11	7	3	13	3	.
41	3	11	3	7	.	3	23	3	13	7	.		3	.	3	.	41	3	11	3
42	.	3	7	3	.	11	.	.	3	41	3	.	.	3	19	3	.	.	31	7
43	11	13	59	31	3	19	3	7	29	3	.	3	61	7	.	.	3	43	3	.
44	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	19	43	3	11	3	23	.	3	.	3
45	7	3	.	3	13	.	.	.	3	.	3	7	23	3	13	3	19	7	.	.
46	43	.	17	11	3	7	3	31	.	3	7	3	11	41	.	.	3	.	3	.
47	3	.	3	17	7	3	53	3	.	.	29	.	3	.	3	7	11	3	47	3
48	.	3	11	3	17	.	.	61	3	7	3	11	.	3	7	3	47	29	37	13
49	13	.	7	.	3	17	3	.	7	3	13	3	.	.	.	11	3	.	3	7
50	3	.	3	.	.	3	29	3	.	.	11	47	3	7	3	.	71	3	7	3
51	.	3		3	19	.	7	.	3	47	3	23	7	3	11	3	53	37	.	19
52	7	11	41		3	13	3	17	23	3	.	3	.	.	.	13	3	7	3	29
53	3	.	3	.	47	3	13	3	17	.	7	23	3	.	3	19	7	3	.	3
54	11	3	.	3	7	.	.	.	3	11	3	61	.	3	.	3	.	.	13	.
55	.	.	.	7	3	37	3	.	.	3	.	3	.	11	7	29	3	23	3	31
56	3	13	3	71	31	3	41	3	7	.	17	13	3	43	3	.	.	3	.	3
57	.	3	13	3	.	29	.	7	3	59	3	17	11	3	.	3	.	.	7	.
58	.	7	.	37	3	.	3	11	.	3	.	3	7	19	13	.	3	.	3	.
59	3	.	3	19	23	3	61	3	31	.	.	7	3	17	3	.	13	3	19	3
60	17	3	.	3		7	11	13	3	19	3	.	37	3	.	3	7	.	.	23
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
0	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3
1	.	3	.	3	7	.	.	13	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	.	.
2	.	11	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	7	17	3	.	3	13
3	3	.	3	.	19	3	.	3	7	.	13	.	3	.	3	.	17	3	.	3
4	11	3	.	.	.	.	.	7	3	11	3	.	13	3	.	3	.	17	7	.
5	19	7	.	13	3	.	3	.	.	3	.	3	7	11	.	19	3	.	3	.
6	3	.	3	.	.	3	23	3	11	.	.	7	3	.	3	13	.	3	17	3
7	.	3	.	3	.	7	13	.	3	.	3	19	11	3	.	3	7	13	.	17
8	23	.	.	.	3	.	3	11	13	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	29
9	3	.	3	7	31	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	23	.	3	.	3
10	.	3	7	3	.	.	11	.	3	29	3	13	23	3	.	3	.	.	.	7
11	.	.	13	19	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	.	29	3	.	3	11
12	3	7	3	.	13	3	7	3	31	19	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
13	7	3	23	3	.	29	.	37	3	.	3	7	.	3	19	3	13	7	11	.
14	.	.	31	.	3	7	3	13	.	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	.
15	3	.	3	.	7	3	.	3	.	11	19	.	3	.	3	7	37	3	.	3
16	13	3	.	3	11	.	.	.	3	7	3	23	41	3	7	3	19	.	.	.
17	17	.	7	.	3	41	3	29	7	3	.	3	13	.	.	.	3	11	3	7
18	3	17	3	11	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	.	31	3	7	3
19	.	3	19	3	37	13	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3	11	.	.	.
20	7	.	11	29	3	.	3	.	19	3	31	3	.	.	.	.	3	7	3	.
21	3	.	3	17	.	3	11	3	13	41	7	.	3	37	3	11	7	3	13	3
22	.	3	37	3	7	31	.	.	3	.	3	43	.	3	.	3	29	.	.	11
23	.	13	.	7	3	17	3	23	.	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	.
24	3	11	3	.	23	3	.	3	7	.	.	37	3	13	3	19	47	3	11	3
25	.	3	.	3	13	11	17	7	3	31	3	.	29	3	13	3	.	.	7	23
26	11	7	.	.	3	.	3	17	.	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.
27	3	.	3	31	11	3	.	3	17	47	.	7	3	11	3	.	.	3	.	3
28	.	3	.	3	.	7	47	19	3	13	3	.	43	3	.	3	7	11	.	13
29	13	.	.	11	3	.	3	.	.	3	13	3	11	19	29	7	3	41	3	.
30	3	43	3	7	.	3	.	3	37	7	17	.	3	.	3	.	11	3	19	3
31	23	3	7	3	29	.	.	.	3	19	3	11	.	3	.	3	.	31	23	7
32	.	.	.	.	3	13	3	7	.	3	29	3	17	7	19	11	3	37	3	.
33	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	11	31	3	17	3	.	.	3	43	3
34	7	3	.	3	.	.	.	.	3	23	3	7	59	3	11	3	.	7	13	.
35	53	11	.	.	3	7	3	43	.	3	7	3	.	.	17	37	3	.	3	59
36	3	13	3	.	7	3	19	3	.	.	.	13	3	29	3	7	.	3	.	3
37	11	3	13	3	.	53	.	.	3	7	3	.	19	3	7	3	17	.	.	29
38	.	.	7	17	3	.	3	53	7	3	.	3	.	11	13	.	3	17	3	7
39	3	59	3	37	17	3	.	3	11	29	41	23	3	7	3	.	13	3	7	3
40	.	3	.	3	31	17	7	13	3	.	3	.	7	3	61	3	.	.	17	.
41	7	.	.	.	3	23	3	11	43	3	.	3	37	47	53	59	3	7	3	13
42	3	.	3	.	.	3	17	3	.	.	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3
43	19	3	.	3	7	.	11	17	3	.	3	29	13	3	41	3	.	23	.	53
44	.	61	.	7	3	.	3	41	17	3	11	3	.	.	7	67	3	.	3	11
45	3	29	3	47	.	3	.	3	7	17	23	19	3	.	3	13	.	3	.	3
46	.	3	.	3	59	.	13	7	3	.	3	.	31	3	43	3	.	13	7	37
47	.	7	67	.	3	11	3	19	13	3	17	3	7	.	.	.	3	.	3	.
48	3	23	3	43	.	3	31	3	.	11	.	7	3	19	3	.	67	3	59	3
49	.	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	13	17	3	.	3	7	.	19	.
50	.	31	13	.	3	61	3	37	11	3	.	3	.	13	.	7	3	11	3	.
51	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	31	.	3	71	3	.	29	3	.	3
52	59	3	7	3	.	19	23	11	3	.	3	.	.	3	17	3	11	67	.	7
53	.	53	11	23	3	31	3	7	41	3	19	3	.	7	.	17	3	.	3	.
54	3	7	3	53	43	3	7	3	.	13	.	.	3	.	3	11	17	3	23	3
55	7	3	.	3	67	.	19	.	3	.	3	7	.	3	37	3	.	7	29	11
56	.	.	.	.	3	7	3	.	53	3	7	3	13	.	11	.	3	.	3	41
57	3	11	3	13	7	3	73	3	29	23	53	.	3	.	3	7	.	3	11	3
58	.	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	43	71	.	17
59	11	.	7	59	3	67	3	47	7	3	43	3	.	31	.	53	3	13	3	7
60	3	.	3	73	11	3	.	3	13	.	59	.	3	7	3	.	.	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
61	.	17	31	41	3	.	3	29	.	3	11	3	.	.	17	7	3	.	3	11
62	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	13	.	3	23	3	17	79	3	.	3
63	.	3	7	3		59	.	71	3	.	3	.	13	3	.	3	17	.	11	7
64	37	19	43	13	3	11	3	7	.	3	.	3	59	7	41	47	3	17	3	.
65	3	7	3	23	17	3	7	3	.	11	61	.	3	47	3	13	31	3	.	3
66	7	3	.	3	11	17	13	.	3	37	3	7	19	3	.	3	29	7	17	61
67	.	.	19	.	3	7	3	.	11	3	7	3	53	.	.	23	3	11	3	17
68	3	.	3	11	7	3	17	3	19	.	.	.	3	.	3	7	.	3	41	3
69	67	3	.	3	.	31	.	11	3	7	3	13	29	3	7	3	11	53	.	.
70	.	47	7	43	3	.	3	.	7	3	.	3	79	13	31	.	3		3	7
71	3	.	3	.	13	3	11	3		17	.	.	3	7	3	11	37	3	7	3
72	19	3	.	3	.	.	7	.	3	31	3	.	7	3	.	3	13	.	.	11
73	7	67	.	.	3	71	3	13	.	3	17	3	.	.	11	41	3	7	3	.
74	3	11	3	31	.	3	.	3	41	13	7	17	3	.	3	43	7	3	11	3
75	13	3	.	3	7	11	.	73	3	.	3	.	17	3	.	3	.	19	.	.
76	11	.	.	7	3	23	3	19	.	3	29	3	13	17	7	.	3	.	3	.
77	3	.	3	13	11	3	.	3	7	.	.	59	3	11	3	71	.	3	61	3
78	29	3	37	3	73	13	.	7	3	.	3	.	41	3	17	3	.	11	7	47
79	.	7	.	11	3	41	3	.	89	3	.	3	7	.	.	17	3	13	3	.
80	3	53	3	.	.	3	.	3	13	71	23	7	3	29	3	.	11	3	13	3
81	.	3	11	3	.	7	.	23	3	.	3	11	47	3	79	3	7	17	.	29
82	59	13	29	.	3	43	3	.	.	3	19	3	.	.	.	7	3	.	3	73
83	3	19	3	7	.	3	.	3	53	7	11	.	3	13	3	31	19	3	17	3
84	31	3	7	3	13	47	19	.	3	.	3	.	.	3	11	3	23	.	.	7
85	.	11	47	67	3	.	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	.	3	83
86	3	7	3	.	79	3	7	3	37	.	.	.	3	89	3	53	.	3	.	3
87	7	3	.	3	31	.	23	.	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13
88	13	.	.	23	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	.	3	37	3	.
89	3	29	3	59	7	3	37	3	11	.	79	.	3	.	3	7	.	3	23	3
90		3	.	3	.	.	71	29	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	83	.
91	19	.	7	.	3	13	3	11	7	3	.	3	23	.	.	13	3	41	3	7
92	3	.	3	.	61	3	13	3	.	23	.	11	3	7	3	.	.	3	7	3
93	71	3	41	3	.	67	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	.	.	13	.
94	7	.	23	97	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	.	.	3	7	3	11
95	3	13	3	37	.	3	31	3	.	89	7	13	3	.	3	.	7	3	.	3
96	.	3	13	3	7	.	59	.	3	.	3	.	.	3	23	3	31	.	11	.
97	89	31	17	7	3	11	3	.	.	3	71	3	37	.	7	.	3	.	3	.
98	3	.	3	17	.	3	.	3	7	11	31	.	3	.	3	.	13	3	43	3
99	.	3	.	3	11	23	47	7	3	.	3	.	.	3	19	3	.	61	7	.
100	73	7	.	.	3	17	3	43	11	3	37	3	7	29	.	.	3	11	3	13
101	3	.	3	11	.	3	67	3	29	53	13	7	3	.	3	.	.	3	73	3
02	101	3	59	3	.	7	17	11	3	.	3	53	13	3	29	3	7	.	.	37
03	.	.	11	13	3	.	3	17	.	3	23	3	.	.	.	7	3	.	3	79
04	3	101	3	7	29	3	11	3	17	7	.	.	3	.	3	11	53	3	31	3
05	.	3	7	3	23	.	13	67	3	17	3	.	.	3	41	3	83	13	53	7
106	.	23	.	103	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	11	.	3	29	3	23
07	3	7	3	.	.	3	7	3	71	.	17	.	3	.	3	.	23	3	11	3
08	7	3	101	3	19	11	29	31	3	79	3	7	.	3	.	3	37	7	.	19
09	11	.	13	.	3	7	3	61	67	3	7	3	17	13	.	.	3	31	3	.
10	3	.	3	101	7	3	23	3	103	73	.	41	3	11	3	7	61	3	.	3
111	17	3	29	3	41	.	.	.	3	7	3	31	.	3	7	3	13	11	71	.
12	23	17	7	11	3	.	3	13	7	3	103	3	11	47	17	.	3	.	3	7
13	3	89	3	43	.	3	.	3	.	13	47		3	7	3	17	11	3	7	3
14	13	3	11	3	.	101	7	19	3	.	3	11	7	3	.	3	17	.	.	107
15	7	.	37	17	3	29	3	.	41	3	.	3	13	19	83	11	3	7	3	.
116	3	41	3	13	17	3	.	3	.	59	7	29	3	.	3	103	7	3	19	3
17	.	3	23	3	7	13	.	.	3	19	3	37	.	3	11	3	59	.	17	31
18	.	11	.	7	3	.	3	53	.	3	.	3	.	.	7	.	3	13	3	17
19	3	.	3	.	43	3	17	3	7	.	.	79	3	.	3	.	.	3	13	3
120	11	3	.	3	.	41	61	7	3	11	3	23	53	3	.	3	.	.	7	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
61	.	3	47	3	61	.	7	31	3	.	3	37	7	3	23	3	41	11	.	.
62	7	13	.	11	3	.	3	.	.	3	.	3	11	61	.	19	3	7	3	.
63	3	.	3	.	.	3	.	3	23	.	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3
64	.	3	11	3	7	23	29	.	3	.	3	11	.	3	13	3	.	43	73	67
65	.	.	79	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	29	7	11	3	19	3	.
66	3	.	3	.	.	3	59	3	7	.	11	.	3	41	3	.	.	3	37	3
67	43	3	29	3	.	.	67	7	3	13	3	.	.	3	11	3	.	.	7	13
68	13	7	.	19	3	.	3	.	.	3	13	3	7	.	71	83	3	61	3	.
69	3	17	3	.	.	3	.	3	.	19	.	7	3	.	3	29	.	3	.	3
70	11	3	.	3	23	7	37	.	3	11	3	.	73	3	19	3	7	41	47	31
71	.	23	17	.	3	13	3	67	71	3	.	3	43	11	.	7	3	.	3	23
72	3	.	3	7	53	3	13	3	11	7	19	29	3	.	3	37	23	3	.	3
73	.	3	7	3	17	37	53	.	3	73	3	47	11	3	83	3	19	.	13	7
74	.	29	.	.	3	17	3	7	31	3	.	3	.	7	.	.	3	59	3	.
75	3	7	3	.	.	3	7	3	67	.	.	11	3	.	3	.	.	3	71	3
76	7	3	13	3	47	79	11	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	43	.
77	23	.	.	.	3	7	3	17	19	3	7	3	31	43	13	.	3	.	3	11
78	3	.	3	29	7	3	.	3	17	.	.	.	3	.	3	7	13	3	53	3
79	.	3	73	3	19	.	31	13	3	7	3	79	23	3	7	3	61	.	11	19
80	83	.	7	.	3	11	3	.	7	3	41	3	.	59	.	.	3	.	3	7
81	3	31	3	41	.	3	.	3	.	11	13	.	3	7	3	19	.	3	7	3
82	37	3	23	3	11	.	7	.	3	.	3	17	7	3	.	3	.	.	.	43
83	7	.	61	13	3	.	3	.	11	3	.	3	17	83	.	.	3	7	3	37
84	3	79	3	11	.	3	.	3	43	37	7	61	3	17	3	13	7	3	29	3
85	17	3	43	3	7	.	13	11	3	.	3	23	.	3	31	3	11	13	.	.
86	41	17	11	7	3	.	3	.	13	3	.	3	.	19	7	.	3	.	3	.
87	3	.	3	19	.	3	11	3	7	31	67	.	3	.	3	11	59	3	19	3
88	53	3	17	3	.	.	.	7	3	19	3	13	83	3	.	3	17	.	7	11
89	.	7	13	17	3	.	3	.	.	3	47	3	7	13	11	89	3	17	3	.
90	3	11	3	.	13	3	.	3	47	43	29	7	3	31	3	61	.	3	11	3
91	.	3	.	3	.	7	89	53	3	.	3	67	.	3	.	3	7	29	17	.
92	11	19	.	47	3	59	3	13	73	3	.	3	.	.	37	7	3	.	3	17
93	3	47	3	7	11	3	17	3	.	7	.	83	3	11	3	41	.	3	.	3
94	13	3	7	3	.	.	.	17	3	.	3	.	19	3	53	3	.	11	.	7
95	.	41	19	11	3	73	3	7	17	3	61	3	11	7	.	43	3	53	3	29
96	3	7	3	13	.	3	7	3	19	17	.	.	3	23	3	.	11	3	.	3
97	7	3	11	3	43	13	.	.	3	29	3	7	.	3	.	3	.	7	97	41
98	.	59	.	.	3	7	3	71	.	3	7	3	41	.	.	11	3	13	3	19
99	3	37	3	23	7	3	.	3	13	.	11	17	3	67	3	7	97	3	13	3
100	19	3	89	3	.	29	.	.	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	23	.
101	.	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	.	17	61	23	3	.	3	7
02	3	.	3	.	31	3	.	3	.	.	43	19	3	7	3	.	41	3	7	3
03	11	3	.	3	13	43	7	.	3	11	3	97	7	3	13	3	.	19	37	.
04	7	.	.	.	3	.	3	19	37	3	.	3	47	11	.	17	3	7	3	.
05	3	61	3	.	59	3	.	3	11	97	7	71	3	19	3	.	7	3	.	3
106	.	3	.	3	7	.	.	47	3	13	3	59	11	3	.	3	.	17	19	13
07	13	.	31	7	3	47	3	11	.	3	13	3	.	41	7	.	3	43	3	.
08	3	.	3	.	.	3	.	3	7	83	73	11	3	.	3	.	.	3	17	3
09	47	3	.	3	97	19	11	7	3	.	3	.	79	3	.	3	29	.	7	17
10	43	7	.	.	3	13	3	.	.	3	11	3	7	.	.	13	3	.	3	11
111	3	19	3	.	.	3	13	3	.	.	.	7	3	53	3	67	19	3	.	3
12	.	3	.	3	.	7	19	59	3	.	3	.	29	3	.	3	7	23	11	.
13		.	41	37	3	11	3	.	83	3	31	3	19	.	59	7	3	.	3	.
14	3	13	3	7	73	3	.	3	.	7	23	13	3	.	3	.	.	3	.	3
15	.	3	7	3	11	31	43	23	3	71	3	.	37	3	.	3	67	.	.	7
116	61	43	.	89	3	107	3	7	11	3	.	3	.	7	13	.	3	11	3	.
17	3	7	3	11	19	3	7	3	79	61	.	.	3	.	3	.	13	3	47	3
18	7	3	71	3	29	.	.	11	3	31	3	7	109	3	.	3	11	7	.	37
19	17	.	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	.	19	3	67	3	13
120	3	17	3	31	7	3	11	3	.	.	13	47	3	43	3	7	107	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
121	.	7	.	.	3	.	3	.	17	3	67	3	7	11	53	61	3	.	3	.
22	3	.	3	29	.	3	19	3	11	17	.	7	3	13	3	.	.	3	37	3
23	.	3	31	3	13	7	109	97	3	.	3	.	11	3	13	3	7	.	.	53
24	.	79	19	.	3	.	3	11	.	3	17	3	31	.	.	7	3	23	3	59
25	3	.	3	7	.	3	.	3	19	7	.	11	3	83	3	.	.	3	.	3
126	.	3	7	3	.	.	11	.	3	13	3	73	17	3	.	3	.	47	.	7
27	13	.	97	71	3	.	3	7	.	3	11	3	29	7	47	.	3	.	3	11
28	3	7	3	.	23	3	7	3	.	.	101	.	3	41	3	37	.	3	29	3
29	7	3	.	3	.	37	.	.	3	.	3	7	67	3	17	3	.	7	11	23
30	.	.	.	.	3	7	3	47	29	3	7	3	83	.	.	13	3	.	3	.
131	3	.	3	.	7	3	13	3	.	11	.	19	3	23	3	7	17	3	.	3
32	43	3	47	3	11	73	.	.	3	7	3	.	101	3	7	3	.	17	13	.
33	47	53	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	.	67	.	.	3	11	3	7
34	3	13	3	11	.	3	.	3	.	31	29	13	3	7	3	89	.	3	7	3
35	23	3	13	3	59	.	7	11	3	.	3	83	7	3	.	3	11	29	19	17
136	7	61	11	31	3	.	3	.	53	3	.	3	43	.	13	23	3	7	3	.
37	3	71	3	.	.	3	11	3	.	.	7	.	3	31	3	11	7	3	59	3
38	37	3	.	3	7	19	41	13	3	23	3	.	.	3	101	3	.	109	61	11
39	.	.	.	7	3	.	3	31	.	3	19	3	.	.	7	53	3	73	3	13
40	3	11	3	.	.	3	107	3	7	37	13	.	3	.	3	101	19	3	11	3
141	59	3	.	3	103	11	19	7	3	29	3	71	13	3	67	3	79	.	7	.
42	11	7	.	13	3	61	3	59	.	3	41	3	7	43	23	29	3	.	3	.
43	3	.	3	41	11	3	103	3	.	.	.	7	3	11	3	13	.	3	.	3
44	.	3	.	3	.	7	13	.	3	.	3	47	.	3	.	3	7	11	.	.
45	17	.	89	11	3	23	3	.	13	3	73	3	11	.	.	7	3	.	3	.
146	3	17	3	7	19	3	47	3	.	7	.	.	3	.	3	.	11	3	97	3
47	61	3	7	3	47	.	.	41	3	.	3	11	.	3	.	3	.	23	.	7
48	19	113	13	59	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	37	11	3	.	3	31
49	3	7	3	17	13	3	7	3	43	.	11	.	3	109	3	.	67	3	.	3
50	7	3	43	3	17	.	.	23	3	83	3	7	.	3	11	3	13	7	41	101
151	.	11	.	29	3	7	3	13	.	3	7	3	.	37	.	.	3	19	3	.
52	3	23	3	67	7	3	.	3	31	13	.	97	3	.	3	7	.	3	79	3
53	11	3	.	3	61	.	17	.	3	7	3	.	.	3	7	3	23	67	103	.
54	.	73	7	19	3	.	3	17	7	3	.	3	13	11	43	.	3	.	3	7
55	3	37	3	13	.	3	59	3	11	19	.	53	3	7	3	41	.	3	7	3
156	.	3	.	3	67	13	7	.	3	17	3	.	7	3	19	3	.	.	.	.
57	7	41	113	23	3	19	3	11	79	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	.
58	3	.	3	.	97	3	.	3	13	.	7	11	3	71	3	47	7	3	13	3
59	.	3	.	3	7	.	11	.	3	.	3	17	89	3	.	3	19	107	37	41
60	.	13	.	7	3	67	3	83	37	3	11	3	17	.	7	43	3	61	3	11
161	3	.	3	89	.	3	71	3	7	23	.	127	3	13	3	.	.	3	67	3
62	17	3	19	3	13	31	.	7	3	.	3	.	.	3	13	3	109	37	7	.
63	.	7	23	47	3	11	3	.	19	3	29	3	7	.	17	.	3	59	3	.
64	3	47	3	61	.	3	.	3	.	11	.	7	3	.	3	17	41	3	.	3
65	29	3	17	3	11	7	83	.	3	13	3	.	61	3	23	3	7	71	.	13
166	13	.	.	17	3	37	3	.	11	3	13	3	.	.	127	7	3	11	3	.
67	3	.	3	7	17	3	73	3	23	7	43	.	3	29	3	19	.	3	.	3
68	53	3	7	3	.	17	67	11	3	.	3	.	.	3	113	3	11	.	17	7
69	.	.	11	37	3	13	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13	3	.	3	17
70	3	7	3	73	.	3	7	3	.	29	.	.	3	.	3	11	.	3	.	3
171	7	3	.	3	71	109	.	17	3	.	3	7	37	3	.	3	61	7	13	11
72	103	.	.	.	3	7	3	67	17	3	7	3	.	19	11	.	3	43	3	47
73	3	11	3	19	7	3	.	3	.	17	.	13	3	.	3	7	.	3	11	3
74	.	3	13	3	23	11	.	.	3	7	3	29	.	3	7	3	107	.	73	.
75	11	23	7	.	3	83	3	.	7	3	17	3	47	89	13	.	3	53	3	7
176	3	29	3	.	11	3	79	3	67	.	.	17	3	7	3	31	13	3	7	3
77	31	3	.	3	89	.	7	13	3	37	3	.	7	3	.	3	113	11	.	.
78	7	19	.	11	3	47	3	103	71	3	.	3	11	17	.	.	3	7	3	13
79	3	.	3	.	.	3	19	3	.	.	7	.	3	79	3	.	7	3	131	3
180	47	3	11	3	7	.	43	37	3	67	3	11	13	3	17	3	.	.	.	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
121	29	3	.	3	.	.	23	43	3	7	3	19	13	3	7	3	73	89	.	11
22	.	.	7	13	3	.	3	.	7	3	.	3	.	71	11	.	3	19	3	7
23	3	11	3	17	47	3	83	3	89	.	.	.	3	7	3	13	.	3	7	3
24	.	3	.	3	17	11	7	37	3	.	3	.	7	3	.	3	.	13	.	29
25	7	.	29	19	3	17	3	.	13	3	.	3	23	.	41	.	3	7	3	43
126	3	.	3	.	11	3	53	3	.	19	7	31	3	11	3	.	7	3	.	3
27	41	3	.	3	7	.	17	113	3	53	3	13	.	3	19	3	.	11	67	.
28	71	.	13	7	3	19	3	17	61	3	79	3	11	13	7	.	3	.	3	.
29	3	.	3	.	13	3	.	3	7	.	19	.	3	.	3	31	11	3	41	3
30	31	3	11	3	37	.	73	7	3	17	3	11	103	3	23	3	13	.	7	.
131	.	7	59	.	3	.	3	13	.	3	.	3	7	.	.	11	3	79	3	67
32	3	29	3	.	89	3	.	3	23	13	11	7	3	37	3	97	.	3	.	3
33	13	3	19	3	31	7	.	29	3	43	3	17	.	3	11	3	7	59	.	.
34	.	11	.	43	3	.	3	.	19	3	.	3	13	97	.	7	3	103	3	.
35	3	.	3	7	71	3	.	3	41	7	.	37	3	17	3	107	.	3	.	3
136	11	3	7	3	19	13	79	.	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
37	.	17	.	.	3	.	3	7	47	3	23	3	.	7	17	.	3	13	3	.
38	3	7	3	.	83	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	17	29	3	13	3
39	7	3	17	3	23	.	.	61	3	89	3	7	11	3	71	3	17	7	.	.
40	.	13	.	17	3	7	3	11	.	3	7	3	.	.	.	73	3	17	3	23
141	3	.	3	.	7	3	31	3	37	.	.	11	3	13	3	7	23	3	.	3
42	.	3	53	3	13	17	11	19	3	7	3	109	.	3	7	3	31	.	17	79
43	113	31	7	83	3	53	3	.	7	3	11	3	73	19	.	.	3	37	3	7
44	3	97	3	19	.	3	17	3	29	41	31	.	3	7	3	.	43	3	7	3
45	.	3	.	3	.	.	7	17	3	13	3	61	7	3	29	3	.	.	11	13
146	7	.	.	107	3	11	3	.	17	3	13	3	53	.	19	37	3	7	3	.
47	3	.	3	.	29	3	.	3	.	11	7	.	3	.	3	23	7	3	.	3
48	.	3	83	3	7	89	.	.	3	107	3	.	23	3	.	3	.	53	.	47
49	.	19	.	7	3	13	3	.	11	3	17	3	71	.	7	13	3	11	3	53
50	3	.	3	11	.	3	13	3	7	.	.	17	3	.	3	79	.	3	31	3
51	109	3	23	3	.	59	29	7	3	.	3	43	17	3	.	3	11	.	7	.
52	101	7	11	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	17	.	.	3	41	3	.
53	3	13	3	.	.	3	11	3	19	.	.	7	3	.	3	11	.	3	89	3
54	.	3	13	3	.	7	.	31	3	.	3	23	113	3	17	3	7	.	.	11
55	.	103	47	.	3	79	3	.	23	3	37	3	.	.	11	7	3	31	3	19
156	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	61	.	3	.	3	29	13	3	11	3
57	19	3	7	3	.	11	.	13	3	.	3	31	43	3	.	3	.	17	.	7
58	11	83	101	.	3	29	3	7	59	3	.	3	.	7	.	.	3	23	3	13
59	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	13	19	3	11	3	59	.	3	17	3
60	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	.	17
161	31	29	107	11	3	.	3	19	103	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	97
62	3	.	3	71	7	7	.	3	53	.	41	73	3	19	3	7	11	3	43	3
63	83	3	11	3	.	3	13	.	3	7	3	11	.	3	7	3	37	13	19	23
64	.	.	7	109	3	101	3	43	7	3	.	3	.	53	.	11	3	.	3	7
65	3	.	3	29	.	3	.	3	73	.	11	59	3	7	3	53	47	3	7	3
166	.	3	.	3	.	19	7	79	3	.	3	13	7	3	11	3	.	.	59	.
67	7	11	13	.	3	.	3	41	31	3	19	3	97	13	.	103	3	7	3	107
68	3	19	3	23	13	3	101	3	.	47	7	.	3	.	3	.	7	3	61	3
69	11	3	31	3	7	.	19	71	3	11	3	.	.	3	.	3	13	.	23	89
70	17	.	37	7	3	113	3	13	43	3	.	3	19	11	7	23	3	.	3	.
171	3	17	3	.	131	3	.	3	7	13	89	41	3	.	3	.	.	3	29	3
72	13	3	.	3	41	61	31	7	3	23	3	37	11	3	59	3	.	.	7	.
73	.	7	17	.	3	97	3	11	29	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	127
74	3	31	3	13	19	3	.	3	.	101	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3
75	.	3	97	3	17	7	11	.	3	.	3	.	.	3	43	3	7	73	.	.
176	19	127	.	.	3	17	3	.	41	3	11	3	.	.	23	7	3	13	3	11
77	3	41	3	7	.	3	109	3	13	7	29	23	3	.	3	.	.	3	13	3
78	.	3	7	3	53	.	17	107	3	61	3	19	.	3	31	3	.	29	11	7
79	29	13	.	.	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.	3	19	3	41
80	3	7	3	.	.	3	7	3	17	11	.	101	3	13	3	.	79	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	96

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
181	23	43	19	7	3	59	3	.	.	3	.	3	.	.	7	11	3	.	3	.
82	3	109	3	131	.	3	.	3	7	.	11	.	3	.	3	13	17	3	71	3
83	.	3	.	3	.	.	13	7	3	73	3	.	23	3	11	3	.	13	7	59
84	.	7	79	41	3	.	3	113	13	3	.	3	7	.	103	.	3	.	3	19
85	3	.	3	83	107	3	.	3	.	.	97	7	3	43	3	.	.	3	17	3
186	11	3	23	3	37	7	.	43	3	11	3	13	31	3	.	3	7	103	29	17
87	.	59	13	53	3	.	3	.	97	3	61	3	.	11	41	7	3	.	3	.
88	3	.	3	7	13	3	31	3	11	7	67	19	3	37	3	.	83	3	47	3
89	41	3	7	3	.	.	.	.	3	127	3	23	11	3	29	3	13	19	.	7
90	.	31	83	.	3	.	3	7	23	3	53	3	.	7	.	79	3	137	3	43
191	3	7	3	97	29	3	7	3	.	13	31	11	3	19	3	.	.	3	41	3
92	7	3	.	3	.	.	11	.	3	47	3	7	.	3	.	3	71	7	19	.
93	.	97	43	.	3	7	3	.	139	3	7	3	13	.	61	83	3	23	3	11
94	3	.	3	13	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7	.	3	.	3
95	.	3	.	3	109	13	29	131	3	7	3	59	.	3	7	3	.	.	11	113
196	17	.	7	.	3	11	3	23	7	3	19	3	67	9	73	41	3	13	3	7
97	3	17	3	.	23	3	.	3	13	11	.	109	3	7	3	.	19	3	7	3
98	.	3	29	3	11	.	7	.	3	43	3	79	7	3	83	3	.	.	89	23
99	7	13	17	43	3	.	3	.	11	3	.	3	19	31	.	127	3	7	3	.
200	3	83	3	11	.	3	37	3	.	.	7	.	3	13	3	29	7	3	.	3
201	.	3	.	3	7	.	.	11	3	.	3	.	41	3	13	3	11	.	.	.
02	.	89	11	7	3	17	3	.	73	3	113	3	.	.	7	37	3	31	3	.
03	3	79	3	23	19	3	11	3	7	.	.	29	3	.	3	11	.	3	.	3
04	23	3	.	3	.	137	17	7	3	13	3	31	.	3	107	3	.	.	7	11
05	13	7	.	.	3	73	3	17	.	3	13	3	7	.	11	19	3	.	3	.
206	3	11	3	37	.	3	53	3	17	41	.	7	3	47	3	.	.	3	11	3
07	127	3	.	3	139	7	.	.	3	17	3	19	.	3	89	3	7	.	.	.
08	11	71	.	.	3	13	3	109	47	3	59	3	37	83	67	7	3	19	3	.
09	3	.	3	7	11	3	13	3	.	7	17	.	3	11	3	.	43	3	.	3
10	.	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	17	.	3	109	3	53	11	13	7
211	.	47	.	11	3	43	3	7	.	3	37	3	11	7	23	.	3	.	3	.
12	3	7	3	127	.	3	7	3	.	19	.	13	3	17	3	67	11	3	.	3
13	7	3	11	3	101	.	.	.	3	.	3	7	83	3	19	3	.	7	.	37
14	.	17	.	79	3	7	3	.	31	3	7	3	29	.	13	11	3	41	3	89
15	3	.	3	137	7	3	.	3	.	.	11	.	3	61	3	7	13	3	29	3
216	.	3	17	3	.	.	.	13	3	7	3	43	97	3	7	3	17	23	.	.
17	.	11	7	17	3	.	3	37	7	3	.	3	31	103	.	.	3	17	3	7
18	3	.	3	113	17	3	.	3	.	139	13	83	3	7	3	.	.	3	7	3
19	11	3	19	3	.	17	7	23	3	11	3	.	7	3	.	3	37	.	17	47
20	7	.	59	13	3	.	3	97	19	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	17
221	3	23	3	.	.	3	17	3	11	.	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3
22	149	3	53	3	7	97	13	17	3	71	3	.	11	3	37	3	23	13	.	19
23	29	.	.	7	3	83	3	11	13	3	83	3	137	23	7	89	3	.	3	.
24	3	43	3	.	73	3	29	3	7	17	41	11	3	.	3	19	.	3	.	3
25	.	3	71	3	.	47	11	7	3	101	3	13	.	3	31	3	.	.	7	.
226	97	7	13	23	3	.	3	.	.	3	11	3	7	13	.	.	3	.	3	11
27	3	73	3	.	13	3	.	3	.	31	.	7	3	127	3	.	.	3	23	3
28	151	3	.	3	.	7	.	19	3	29	3	37	17	3	41	3	7	53	11	73
29	.	37	.	31	3	11	3	13	.	3	101	3	23	17	.	7	3	.	3	53
30	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.	3	31	3	.	.	3	19	3
231	13	3	7	3	11	29	.	61	3	19	3	101	.	3	17	3	73	.	79	7
32	.	.	23	.	3	139	3	7	11	3	.	3	13	7	19	17	3	11	3	67
33	3	7	3	11	.	3	7	3	.	83	.	41	3	.	3	.	17	3	37	3
34	7	3	89	3	41	13	.	11	3	59	3	7	.	3	23	3	11	7	.	131
35	71	19	11	.	3	7	3	29	43	3	7	3	.	101	.	.	3	13	3	.
236	3	.	3	.	7	3	11	3	13	.	.	.	3	.	3	7	47	3	13	3
37	137	3	151	3	131	23	37	.	3	7	3	61	19	3	7	3	.	.	.	11
38	.	13	7	29	3	.	3	.	7	3	.	3	.	.	11	31	3	113	3	7
39	3	11	3	.	.	3	.	3	19	47	71	.	3	7	3	37	89	3	7	3
240	.	3	.	3	13	11	7	.	3	.	3	.	7	3	13	3	29	.	139	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
181	7	3	67	3	11	41	37	.	3	17	3	7	.	3	13	3	.	7	31	.
82	.	.	.	19	3	7	3	.	11	3	7	3	101	47	.	.	3	11	3	29
83	3	.	3	11	7	3	.	3	.	19	17	.	3	31	3	7	53	3	.	3
84	.	3	.	3	.	37	59	11	3	7	3	17	.	3	7	3	11	.	53	13
85	13	.	7	67	3	19	3	31	7	3	13	3	17	.	.	29	3	.	3	7
186	3	23	3	47	.	3	11	3	.	71	19	.	3	7	3	11	.	3	7	3
87	17	3	.	3	73	29	7	137	3	.	3	89	7	3	.	3	19	.	.	11
88	7	17	109	.	3	13	3	.	113	3	43	3	79	23	11	13	3	7	3	.
89	3	11	3	.	67	3	13	3	61	.	7	.	3	41	3	17	7	3	11	3
90	.	3	17	3	7	11	23	.	3	.	3	.	.	3	.	3	17	61	13	71
191	11	107	.	7	3	.	3	29	19	3	127	3	.	.	7	31	3	17	3	73
92	3	13	3	.	11	3	.	3	7	.	37	13	3	11	3	.	101	3	23	3
93	37	3	13	3	19	17	107	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	11	7	19
94	53	7	.	11	3	.	3	.	.	3	.	3	7	.	13	.	3	101	3	17
95	3	.	3	.	31	3	17	3	.	23	.	7	3	.	3	19	11	3	.	3
196	43	3	11	3	.	7	71	13	3	103	3	11	.	3	.	3	7	47	.	.
97	.	.	23	.	3	.	3	53	17	3	.	3	131	73	47	7	3	.	3	13
98	3	.	3	7	.	3	.	3	31	7	11	103	3	59	3	.	.	3	101	3
99	71	3	7	3	.	.	41	19	3	.	3	.	13	3	11	3	.	.	.	7
200	.	11	31	13	3	.	3	7	.	3	17	3	43	7	53	.	3	71	3	101
201	3	7	3	19	.	3	7	3	23	.	.	17	3	.	3	13	61	3	19	3
02	7	3	47	3	.	23	13	.	3	11	3	7	17	3	.	3	103	7	.	53
03	47	.	.	.	3	7	3	.	13	3	7	3	89	11	19	.	3	.	3	.
04	3	113	3	41	7	3	97	3	11	59	.	.	3	.	3	7	31	3	103	3
05	.	3	61	3	29	.	131	67	3	7	3	13	11	3	7	3	59	.	43	.
206	107	19	7	73	3	.	3	11	7	3	23	3	.	13	137	17	3	.	3	7
07	3	.	3	.	13	3	19	3	3	.	79	11	3	7	3	.	17	3	7	3
08	29	3	.	3	23	31	7	41	.	.	3	.	7	3	.	3	13	17	.	.
09	7	23	19	.	3	.	3	13	67	3	11	3	.	.	31	139	3	7	3	11
10	3	37	3	.	.	3	.	3	19	13	7	107	3	29	3	.	7	3	17	3
211	13	3	.	3	7	.	61	.	3	31	3	.	59	3	.	3	.	107	11	17
12	79	53	29	7	3	11	3	.	89	3	.	3	13	.	7	61	3	3	3	19
13	3	131	3	13	41	3	23	3	7	11	.	.	3	.	3	73	.	.	.	3
14	19	3	43	3	11	13	.	7	3	109	3	47	.	3	.	3	.	.	7	.
15	23	7	.	.	3	.	3	.	11	3	.	3	7	113	.	.	3	11	3	.
216	3	59	3	11	.	3	47	3	13	.	53	7	3	.	3	23	109	3	13	3
17	.	3	.	3	47	7	.	11	3	.	3	29	23	3	.	3	7	19	71	.
18	.	13	11	.	3	.	3	19	.	3	131	3	.	79	43	7	3	.	3	61
19	3	29	3	7	.	3	11	3	127	7	.	31	3	13	3	11	.	3	.	3
20	.	3	7	3	13	.	.	29	3	.	3	.	71	3	13	3	.	.	19	7
221	17	.	.	.	3	37	3	7	.	3	67	3	41	7	11	.	3	.	3	79
22	3	7	3	.	113	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	31	.	3	11	3
23	7	3	79	3	59	11	.	.	3	13	3	7	.	3	61	3	.	7	.	13
24	11	.	17	37	3	7	3	.	23	3	7	3	.	.	113	43	3	83	3	149
25	3	19	3	17	7	3	.	3	.	.	107	67	3	11	3	7	19	3	59	3
226	.	3	139	3	17	131	19	.	3	7	3	.	37	3	7	3	.	11	.	.
27	.	61	7	11	3	13	3	.	7	3	.	3	11	.	.	13	3	23	3	7
28	3	.	3	.	.	3	13	3	.	89	.	137	3	7	3	47	11	3	7	3
29	59	3	11	3	.	.	7	103	3	.	3	11	7	3	127	3	83	.	13	109
30	7	.	.	.	3	.	3	17	.	3	47	3	.	41	.	11	3	7	3	.
231	3	13	3	.	19	3	.	3	17	.	7	13	3	97	3	.	7	3	.	3
32	.	3	13	3	7	43	53	.	3	17	3	.	31	3	11	3	.	.	.	23
33	19	11	.	7	3	61	3	.	.	3	97	3	103	67	7	19	3	149	3	.
34	3	47	3	.	29	3	31	3	7	.	17	53	3	23	3	83	13	3	.	3
35	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	17	.	3	103	3	31	.	7	.
236	67	7	41	59	3	.	3	.	.	3	.	3	7	11	.	.	3	19	3	13
37	3	.	3	23	.	3	.	3	11	.	13	7	3	17	3	.	37	3	53	3
38	17	3	.	3	107	7	29	.	3	.	3	.	11	3	.	3	7	.	23	.
39	43	17	.	13	3	31	3	11	.	3	.	3	.	29	17	7	3	.	3	103
240	3	67	3	7	.	3	41	3	.	7	.	11	3	.	3	13	.	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
241	7	.	.	.	3	.	3	89	.	3	23	3	59	.	.	101	3	7	3	19
42	3	.	3	43	11	3	61	3	53	.	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3
43	19	3	109	3	7	41	.	83	3	13	3	.	29	3	.	3	101	11	97	13
44	13	23	.	7	3	.	3	.	.	3	13	3	11	53	7	.	3	.	3	23
45	3	107	3	.	127	3	.	3	7	137	.	19	3	.	3	53	11	3	.	3
246	73	3	11	3	.	151	103	7	3	.	3	11	.	3	71	3	41	19	7	157
47	17	7	31	.	3	13	3	19	59	3	79	3	7	.	29	11	3	109	3	.
48	3	17	3	.	43	3	13	3	.	103	11	7	3	19	3	59	.	3	.	3
49	37	3	.	3	29	7	.	.	3	.	3	97	107	3	11	3	7	.	13	61
50	23	11	17	89	3	.	3	127	131	3	29	3	.	.	.	7	3	29	3	37
251	3	13	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13	3	41	3	23	31	3	.	3
52	11	3	7	3	17	19	151	.	3	11	3	.	23	3	.	3	43	.	.	7
53	.	.	.	.	3	17	3	7	.	3	19	3	73	7	13	.	3	.	3	.
54	3	7	3	.	.	3	7	3	11	.	47	59	3	29	3	.	13	3	.	3
55	7	3	23	3	97	31	17	13	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	59	29
256	.	.	29	.	3	7	3	11	.	3	7	3	19	.	31	.	3	.	3	13
57	3	.	3	47	7	3	.	3	17	29	13	11	3	.	3	7	.	3	.	3
58	.	3	131	3	53	83	11	.	3	7	3	23	13	3	7	3	.	43	.	.
59	59	.	7	13	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	37	.	3	.	3	7
60	3	.	3	31	19	3	.	3	.	53	17	.	3	7	3	13	.	3	7	3
261	43	3	.	3	.	.	7	.	3	151	3	17	7	3	59	3	.	13	11	79
62	7	.	73	.	3	11	3	157	13	3	.	3	17	37	.	19	3	7	3	.
63	3	29	3	.	83	3	.	3	.	11	7	113	3	17	3	.	7	3	.	3
64	17	3	.	3	7	61	.	29	3	.	3	13	.	3	.	3	137	31	53	.
65	.	17	13	7	3	.	3	23	11	3	41	3	43	13	7	.	3	11	3	139
266	3	37	3	11	13	3	43	3	7	79	.	31	3	.	3	17	.	3	.	3
67	.	3	17	3	.	.	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3	11	47	7	23
68	.	7	11	17	3	.	3	13	.	3	139	3	7	.	47	.	3	17	3	.
69	3	.	3	71	17	3	11	3	.	13	.	7	3	23	3	11	29	3	.	3
70	13	3	113	3	.	7	.	41	3	61	3	151	.	3	19	3	7	.	17	11
271	41	.	.	.	3	19	3	47	37	3	.	3	13	43	11	7	3	.	3	17
72	3	11	3	7	.	3	17	3	163	7	19	73	3	113	3	.	.	3	11	3
73	23	3	7	3	31	11	59	17	3	89	3	.	151	3	.	3	19	37	23	7
74	11	67	.	.	3	79	3	7	17	3	.	3	.	7	.	23	3	13	3	.
75	3	7	3	.	11	3	7	3	13	17	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3
276	7	3	19	3	.	53	.	71	3	23	3	7	.	3	29	3	131	7	.	43
77	.	13	103	11	3	7	3	53	19	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	.
78	3	.	3	.	7	3	.	3	43	.	.	17	3	13	3	7	11	3	.	3
79	.	3	11	3	13	103	.	.	3	7	3	11	17	3	7	3	.	.	.	19
80	.	41	7	37	3	109	3	.	7	3	.	3	.	17	23	11	3	29	3	7
281	3	157	3	.	.	3	31	3	61	.	11	23	3	7	3	19	107	3	7	3
82	.	3	67	3	.	89	7	.	3	13	3	.	7	3	11	3	31	61	47	13
83	7	11	.	.	3	23	3	.	127	3	13	3	41	29	43	17	3	7	3	.
84	3	.	3	.	.	3	157	3	97	43	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3
85	11	3	29	3	7	.	.	19	3	11	3	47	103	3	.	3	.	17	.	.
286	37	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	.	11	7	13	3	.	3	.
87	3	.	3	19	.	3	13	3	7	.	23	.	3	59	3	29	41	3	17	3
88	83	3	.	3	47	.	.	7	3	19	3	127	11	3	.	3	151	.	7	17
89	.	7	137	.	3	29	3	11	.	3	.	3	7	.	19	43	3	103	3	.
90	3	13	3	.	67	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	71	113	3	31	3
291	.	3	13	3	43	7	11	37	3	.	3	.	.	3	.	3	7	151	.	103
92	.	19	.	.	3	131	3	61	.	3	11	3	.	23	13	7	3	.	3	11
93	3	.	3	7	.	3	19	3	109	7	3	139	3	.	3	.	13	3	.	3
94	.	3	7	3	.	67	23	13	3	.	.	.	19	3	.	3	59	.	11	7
95	.	163	19	23	3	11	3	7	53	3	.	3	.	7	.	109	3	31	3	13
296	3	7	3	29	.	3	7	3	19	11	13	.	3	.	3	107	.	3	23	3
97	7	3	61	3	11	43	.	113	3	.	3	7	13	3	131	3	.	7	151	71
98	17	.	41	13	3	7	3	.	11	3	7	3	23	.	.	53	3	11	3	19
99	3	17	3	11	7	3	.	3	.	23	.	173	3	37	3	7	79	3	.	3
300	19	3	37	3	.	.	13	11	3	7	3	.	59	3	7	3	11	13	.	151
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
241	.	3	7	3	37	73	11	.	3	23	3	.	.	3	19	3	17	13	.	7
42	.	79	127	17	3	19	3	7	13	3	11	3	.	7	149	107	3	17	3	11
43	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	19	.	3	37	3	29	.	3	31	3
44	7	3	37	3	61	17	43	.	3	.	3	7	.	3	47	3	19	7	11	.
45	.	43	13	41	3	7	3	79	.	3	7	3	47	13	23	67	3	.	3	17
246	3	89	3	.	7	3	17	3	.	11	.	23	3	.	3	7	.	3	.	3
47	53	3	19	3	11	.	.	17	3	7	3	71	.	3	7	3	13	.	137	.
48	.	29	7	.	3	23	3	13	7	3	.	3	139	149	41	.	3	11	3	7
49	3	.	3	11	109	3	.	3	.	13	.	.	3	7	3	.	67	3	7	3
50	13	3	.	3	19	71	7	11	3	.	3	31	7	3	.	3	11	23	.	19
251	7	.	11	139	3	.	3	.	.	3	17	3	13	.	89	.	3	7	3	113
52	3	.	3	13	.	3	11	3	37	127	7	17	3	131	3	11	7	3	41	3
53	101	3	.	3	7	13	.	23	3	.	3	41	17	3	53	3	.	67	109	11
54	31	.	.	7	3	.	3	.	.	3	73	3	83	17	7	71	3	13	3	43
55	3	11	3	61	.	3	37	3	7	107	.	.	3	.	3	.	157	3	11	3
256	113	3	.	3	67	11	.	7	3	.	3	.	61	3	17	3	23	.	7	31
57	11	7	43	.	3	.	3	73	.	3	149	3	7	19	107	17	3	.	3	.
58	3	103	3	19	11	3	.	3	41	.	113	7	3	11	3	.	17	3	19	3
59	.	3	101	3	13	7	23	.	3	19	3	83	.	3	13	3	7	11	.	.
60	109	.	71	11	3	67	3	131	29	3	89	3	11	.	19	7	3	97	3	.
261	3	.	3	7	.	3	137	3	.	7	.	47	3	.	3	.	11	3	17	3
62	.	3	7	3	.	.	.	109	3	13	3	11	41	3	97	3	61	.	.	7
63	13	19	.	43	3	41	3	7	.	3	13	3	23	7	.	11	3	.	3	.
64	3	7	3	.	47	3	7	3	103	23	11	.	3	71	3	.	59	3	.	3
65	7	3	.	3	.	101	31	163	3	.	3	7	19	3	11	3	.	7	.	67
266	29	11	19	53	3	7	3	.	149	3	7	3	.	.	.	13	3	.	3	.
67	3	31	3	.	7	3	13	3	19	41	.	61	3	.	3	7	73	3	127	3
68	11	3	107	3	.	.	67	97	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	13	37
69	.	.	7	.	3	59	3	149	7	3	53	3	.	11	.	137	3	.	3	7
70	3	13	3	.	.	3	.	3	11	.	.	13	3	7	3	103	.	3	7	3
271	19	3	13	3	157	23	7	101	3	29	3	.	7	3	31	3	.	71	.	59
72	7	.	97	.	3	137	3	11	.	3	.	3	.	.	13	29	3	7	3	.
73	3	17	3	109	.	3	.	3	101	31	7	11	3	139	3	61	7	3	.	3
74	97	3	.	3	7	29	11	13	3	83	3	.	.	3	.	3	37	19	31	107
75	.	59	17	7	3	43	3	19	79	3	11	3	.	.	7	47	3	41	3	11
276	3	.	3	17	139	3	73	3	7	.	13	89	3	19	3	.	.	3	.	3
77	.	3	41	3	17	.	.	7	3	.	3	.	13	3	37	3	.	.	7	.
78	.	7	89	13	3	11	3	29	47	3	61	3	7	.	79	167	3	.	3	23
79	3	.	3	73	.	3	.	3	83	11	101	7	3	.	3	13	23	3	.	3
80	.	3	.	3	11	7	13	.	3	67	3	43	.	3	.	3	7	13	.	.
281	.	47	37	29	3	.	3	17	11	3	19	3	.	.	71	7	3	11	3	163
82	3	19	3	7	59	3	23	3	17	7	.	.	3	.	3	.	19	3	.	3
83	.	3	7	3	79	113	19	11	3	17	3	13	101	3	.	3	11	.	73	7
84	23	37	11	149	3	.	3	7	71	3	.	3	19	7	61	31	3	.	3	.
85	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	17	.	3	101	3	11	.	3	.	3
286	7	3	.	3	.	.	109	.	3	53	3	7	23	3	.	3	13	7	.	11
87	.	.	149	.	3	7	3	13	.	3	7	3	17	107	11	.	3	.	3	31
88	3	11	3	.	7	3	.	3	.	13	67	.	3	17	3	7	167	3	11	3
89	13	3	23	3	.	11	83	59	3	7	3	.	73	3	7	3	53	79	107	47
90	11	17	7	.	3	.	3	41	7	3	.	3	13	127	17	19	3	47	3	7
291	3	.	3	13	11	3	.	3	31	.	163	.	3	7	3	17	.	3	7	3
92	.	3	17	3	29	13	7	.	3	73	3	19	7	3	.	3	17	11	.	83
93	7	149	31	11	3	.	3	43	23	3	29	3	11	.	.	.	3	7	3	.
94	3	.	3	89	17	3	79	3	13	.	7	41	3	.	3	37	7	3	13	3
95	29	3	11	3	7	17	.	.	3	.	3	11	.	3	.	3	127	101	17	.
296	149	13	47	7	3	.	3	.	.	3	59	3	67	.	7	11	3	23	3	17
97	3	.	3	.	.	3	17	3	7	19	11	97	3	13	3	.	31	3	83	3
98	.	3	73	3	13	.	.	7	3	.	3	.	.	3	11	3	71	167	7	29
99	61	7	29	.	3	19	3	23	17	3	31	3	7	.	157	.	3	89	3	131
300	3	41	3	.	23	3	107	3	.	17	19	7	3	67	3	.	.	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
301	31	.	7	.	3	.	3	.	7	3	47	3	29	.	.	.	3	43	3	7
02	3	.	3	17	.	3	11	3	47	.	167	19	3	7	3	11	.	3	7	3
03	157	3	.	3	17	.	7	.	3	.	3	13	7	3	23	3	.	19	.	11
04	7	.	13	47	3	17	3	19	29	3	.	3	.	13	11	61	3	7	3	.
05	3	11	3	.	13	3	.	3	23	131	7	.	13	19	3	.	7	3	11	3
306	71	3	127	3	7	11	17	67	3	113	3	109	.	3	.	3	13	.	19	.
07	11	.	.	7	3	.	3	13	31	3	.	3	79	73	7	59	3	71	3	97
08	3	.	3	.	11	3	.	3	7	13	29	.	3	11	3	.	.	3	109	3
09	13	3	31	3	.	19	43	7	3	17	3	157	.	3	.	3	.	11	7	.
10	29	7	101	11	3	.	3	.	67	3	19	3	7	.	41	.	3	37	3	61
311	3	19	3	13	53	3	29	3	.	.	17	7	3	163	3	.	11	3	.	3
12	41	3	11	3	23	7	19	.	3	.	3	11	.	3	.	3	7	157	.	.
13	113	23	.	31	3	173	3	.	.	3	.	3	17	.	.	7	3	13	3	23
14	3	31	3	7	101	3	89	3	13	7	11	53	3	17	3	149	23	3	13	3
15	17	3	7	3	.	.	.	43	3	29	3	41	.	3	11	3	.	.	.	7
316	.	11	.	73	3	101	3	7	103	3	.	3	47	7	17	29	3	.	3	.
17	3	7	3	37	19	3	7	3	.	.	.	.	3	13	3	17	.	3	53	3
18	7	3	17	3	13	29	.	47	3	11	3	7	139	3	13	3	17	7	.	.
19	19	61	.	17	3	7	3	59	137	3	7	3	37	11	109	19	3	17	3	43
20	3	.	3	.	7	3	101	3	11	31	.	.	3	103	3	7	179	3	73	3
321	47	3	97	3	163	17	.	.	3	7	3	19	11	3	7	3	.	.	17	13
22	13	.	7	31	3	.	3	11	7	3	13	3	167	.	.	103	3	19	3	7
23	3	.	3	.	79	3	17	3	.	.	.	11	3	7	3	73	.	3	7	3
24	.	3	23	3	.	.	7	17	3	.	3	.	7	3	163	3	.	.	71	37
25	7	.	.	19	3	13	3	31	17	3	11	3	.	.	.	13	3	7	3	11
326	3	.	3	.	.	3	13	3	.	17	7	67	3	.	3	127	7	3	.	3
27	53	3	.	3	7	.	.	.	3	43	3	23	71	3	19	3	29	137	11	.
28	.	.	53	7	3	11	3	37	23	3	17	3	.	.	7	.	3	.	3	107
29	3	13	3	.	.	3	.	3	7	11	19	13	3	.	3	.	.	3	47	3
30	61	3	13	3	11	.	137	7	3	.	3	.	17	3	.	3	19	137	7	.
331	79	7	.	113	3	.	3	.	11	3	157	3	7	17	13	31	3	11	3	.
32	3	.	3	11	.	3	59	3	139	.	149	7	3	167	3	43	13	3	.	3
33	.	3	19	3	.	7	.	11	3	47	3	.	.	3	17	3	7	.	.	.
34	127	.	11	.	3	.	3	23	19	3	.	3	101	67	29	7	3	53	3	13
35	3	.	3	7	23	3	11	3	.	7	13	.	3	.	3	11	17	3	.	3
336	.	3	7	3	19	.	.	.	3	.	3	.	13	3	.	3	.	17	.	7
37	67	.	37	13	3	.	3	7	.	3	29	3	89	7	11	.	3	41	3	.
38	3	7	3	.	.	3	7	3	31	149	.	.	3	23	3	13	43	3	11	3
39	7	3	41	3	.	11	13	107	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	83	17
40	11	37	31	71	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	101	.	3	59	3	79
341	3	67	3	23	7	3	109	3	149	.	3	.	3	11	3	7	.	3	.	3
42	23	3	79	3	.	.	.	19	3	7	3	13	.	3	7	3	97	11	23	29
43	.	.	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3	11	13	.	23	3	61	3	7
44	3	.	3	19	13	3	127	3	.	29	173	.	3	7	3	.	11	3	7	3
45	.	3	11	3	.	.	7	.	3	19	3	11	7	3	.	3	13	.	179	.
346	7	.	.	53	3	.	3	13	89	3	31	3	.	59	19	11	3	7	3	.
47	3	.	3	61	103	3	149	3	.	13	7	.	3	47	3	.	7	3	.	3
48	13	3	.	3	7	31	37	.	3	97	3	29	61	3	11	3	.	.	.	.
49	17	11	67	7	3	.	3	.	47	3	53	3	13	181	7	.	3	83	3	.
50	3	17	3	13	157	3	19	3	7	.	.	23	3	53	3	37	67	3	101	3
351	11	3	.	3	.	13	.	7	3	11	3	.	19	3	41	3	.	113	7	.
52	.	7	17	137	3	23	3	41	.	3	.	3	7	11	167	131	3	13	3	101
53	3	43	3	17	.	3	.	3	11	.	.	7	3	89	3	.	59	3	13	3
54	.	3	.	3	17	7	107	.	3	.	3	71	11	3	.	3	7	23	.	.
55	131	13	.	.	3	17	3	11	.	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	19
356	3	.	3	7	149	3	.	3	179	7	23	11	3	13	3	157	29	3	43	3
57	19	3	7	3	13	71	11	23	3	139	3	.	.	3	13	3	103	31	.	7
58	.	.	61	.	3	59	3	7	113	3	11	3	.	7	.	.	3	73	3	11
59	3	7	3	149	.	3	7	3	17	.	37	19	3	.	3	83	127	3	103	3
360	7	3	.	3	.	.	.	181	3	13	3	7	137	3	.	3	23	7	11	13
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
301	11	3	53	3	.	7	97	.	3	11	3	103	.	3	.	3	7	109	.	13
02	13	.	79	.	3	53	3	.	.	3	13	3	107	11	31	7	3	.	3	41
03	3	127	3	7	97	3	.	3	11	7	37	17	3	23	3	.	.	3	113	3
04	37	3	7	3	83	41	.	.	3	31	3	29	11	3	43	3	.	.	.	7
05	137	.	.	.	3	13	3	7	19	3	.	3	53	7	73	13	3	.	3	37
306	3	7	3	23	.	3	7	3	.	37	.	11	3	61	3	.	47	3	.	3
07	7	3	.	3	19	.	11	29	3	.	3	7	.	3	17	3	41	7	13	19
08	.	.	59	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	89	67	17	3	.	3	11
09	3	13	3	83	7	3	173	3	.	47	.	13	3	.	3	7	17	3	139	3
10	.	3	13	3	89	.	47	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	17	11	137
311	.	.	7	.	3	11	3	71	7	3	.	3	.	.	13	.	3	.	3	7
12	3	.	3	.	43	3	.	3	.	11	.	31	3	7	3	67	13	3	7	3
13	107	3	.	3	11	79	7	13	3	137	3	.	7	3	.	3	.	.	.	17
14	7	71	83	163	3	73	3	.	11	3	.	3	.	19	23	.	3	7	3	13
15	3	139	3	11	37	3	.	3	131	.	7	23	3	.	3	31	7	3	19	3
316	31	3	.	3	7	.	.	11	3	19	3	79	13	3	.	3	11	41	29	.
17	.	113	11	7	3	23	3	.	.	3	43	3	61	37	7	83	3	.	3	.
18	3	53	3	.	151	3	11	3	7	.	127	71	3	.	3	11	.	3	167	3
19	89	3	.	3	31	.	13	7	3	.	3	113	.	3	29	3	.	13	7	11
20	.	7	.	.	3	.	3	.	13	3	.	3	7	.	11	.	3	67	3	.
321	3	11	3	.	29	3	19	3	53	.	23	7	3	.	3	.	.	3	11	3
22	.	3	.	3	.	7	41	23	3	59	3	13	19	3	83	3	7	43	.	.
23	11	.	13	.	3	.	3	.	.	3	.	3	.	13	139	7	3	29	3	179
24	3	17	3	7	11	3	.	3	19	7	47	.	3	11	3	53	.	3	.	3
25	43	3	7	3	.	.	29	.	3	.	3	.	31	3	.	3	13	11	37	7
326	103	.	17	11	3	89	3	7	37	3	41	3	11	7	.	97	3	.	3	19
27	3	7	3	17	181	3	7	3	.	13	73	.	3	.	3	.	11	3	.	3
28	7	3	11	3	17	59	23	.	3	71	3	7	131	3	.	3	31	7	67	167
29	83	31	.	23	3	7	3	.	.	3	7	3	13	.	.	11	3	.	3	.
30	3	.	3	13	7	3	43	3	.	.	11	19	3	.	3	7	.	3	23	3
331	.	3	71	3	.	13	17	41	3	7	3	.	.	3	7	3	.	19	89	.
32	41	11	7	79	3	29	3	17	7	3	107	3	23	83	.	.	3	13	3	7
33	3	.	3	.	73	3	61	3	13	23	.	29	3	7	3	173	.	3	7	3
34	11	3	.	3	.	109	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	107	.	19	139
35	7	13	23	37	3	.	3	.	59	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	.
336	3	73	3	97	41	3	131	3	11	151	.	.	3	13	3	59	7	3	31	3
37	.	3	.	3	7	19	.	.	3	.	3	17	11	3	13	3	.	47	.	73
38	.	97	.	7	3	.	3	11	.	3	19	3	17	31	7	.	3	.	3	109
39	3	19	3	29	.	3	.	3	7	53	61	11	3	17	3	41	19	3	.	3
40	17	3	.	3	.	23	11	7	3	13	3	53	173	3	89	3	73	103	7	13
341	13	7	.	.	3	127	3	47	.	3	11	3	7	.	17	179	3	31	3	11
42	3	.	3	.	.	3	.	3	43	.	151	7	3	.	3	17	53	3	.	3
43	.	3	17	3	.	7	3	.	3	37	3	31	.	3	137	3	7	163	11	41
44	47	131	.	17	3	11	.	.	.	3	23	3	29	.	.	7	3	17	3	.
45	3	109	3	7	17	3	13	3	181	7	71	151	3	.	3	.	.	3	29	3
346	.	3	7	3	11	17	.	37	3	.	3	.	79	3	.	3	113	.	13	7
47	19	23	.	.	3	.	3	7	11	3	83	3	.	7	43	19	3	11	3	17
48	3	7	3	11	71	3	7	3	.	43	.	13	3	.	3	139	23	3	.	3
49	7	3	13	3	.	.	73	11	3	41	3	7	.	3	59	3	11	7	79	31
50	.	.	11	.	3	7	.	.	17	3	7	3	.	.	13	.	3	19	3	.
351	3	.	3	.	7	3	11	3	.	17	29	127	3	151	3	7	13	3	61	3
52	.	3	.	3	37	179	.	13	3	7	3	.	.	3	7	3	.	29	47	11
53	23	.	7	19	3	.	3	113	7	3	17	3	.	41	11	43	3	.	3	7
54	3	11	3	59	.	3	29	3	79	19	13	17	3	7	3	23	.	3	7	3
55	73	3	31	3	43	11	7	.	3	.	3	47	7	3	19	3	.	.	.	97
356	7	101	181	13	3	19	3	53	.	3	.	3	31	17	127	89	3	7	3	29
57	3	.	3	.	11	3	47	3	.	83	7	37	3	11	3	13	7	3	.	3
58	.	3	23	3	7	.	13	.	3	29	3	.	53	3	17	3	19	11	.	.
59	.	157	41	7	3	.	3	.	13	3	.	3	11	.	7	17	3	.	3	.
360	3	31	3	107	.	3	.	3	7	.	43	109	3	.	3	151	11	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
361	13	79	.	.	3	7	3	19	41	3	7	3	.	23	.	71	3	47	3	37
62	3	41	3	.	7	3	.	3	29	11	17	.	3	19	3	7	.	3	67	3
63	31	3	.	3	11	.	23	.	3	7	3	17	47	3	7	3	.	.	19	163
64	89	59	7	23	3	13	3	79	7	3	73	3	17	.	83	13	3	11	3	7
65	3	173	3	11	29	3	13	3	59	.	.	.	3	7	3	61	.	3	7	3
366	17	3	.	3	31	19	7	11	3	53	3	.	7	3	.	3	11	.	13	67
67	7	17	11	.	3	.	3	73	.	3	19	3	23	109	17	.	3	7	3	.
68	3	13	3	.	131	3	11	3	.	23	7	13	3	.	3	11	7	3	.	3
69	.	3	13	3	7	.	19	.	3	.	3	.	.	3	43	3	17	.	.	11
70	163	.	23	7	3	.	3	.	.	3	61	3	19	29	7	.	3	17	3	.
371	3	11	3	43	17	3	.	3	7	.	137	107	3	71	3	.	13	3	11	3
72	.	3	29	3	127	11	.	7	3	.	3	59	31	3	23	3	167	.	7	193
73	11	7	.	.	3	.	3	67	.	3	163	3	7	37	.	.	3	107	3	13
74	3	113	3	.	11	3	17	3	23	.	13	7	3	11	3	29	.	3	.	3
75	.	3	.	3	.	7	.	17	3	157	3	.	13	3	.	3	7	11	.	.
376	19	31	.	11	3	29	3	.	17	3	191	3	11	.	61	7	3	.	3	.
77	3	37	3	7	43	3	.	3	67	7	31	29	3	97	3	13	11	3	.	3
78	103	3	7	3	.	.	13	59	3	109	3	11	.	3	157	3	79	13	.	7
79	151	29	.	167	3	31	3	7	13	3	17	3	83	7	59	11	3	19	3	137
80	3	7	3	191	.	3	7	3	193	47	11	17	3	73	3	.	109	3	.	3
381	7	3	53	3	23	.	47	.	3	67	3	7	17	3	11	3	43	7	37	.
82	.	11	13	19	3	7	3	.	37	3	7	3	.	13	.	.	3	167	3	23
83	3	.	3	29	7	3	.	3	.	19	.	.	3	.	3	7	23	3	31	3
84	11	3	193	3	71	107	41	103	3	7	3	83	.	3	7	3	13	37	.	.
85	.	139	7	97	3	19	3	13	7	3	59	3	53	11	89	17	3	.	3	7
386	3	.	3	.	.	3	23	3	11	13	19	.	3	7	3	.	17	3	7	3
87	13	3	.	3	.	.	7	31	3	.	3	.	7	3	.	3	19	17	.	.
88	7	.	151	197	3	37	3	11	.	3	41	3	13	.	71	.	3	7	3	53
89	3	.	3	13	167	3	.	3	.	.	7	11	3	.	3	23	7	3	17	3
90	43	3	19	3	7	13	11	.	3	.	3	31	23	3	103	3	.	.	.	17
391	61	.	.	7	3	.	3	.	19	3	11	3	109	.	7	.	3	13	3	11
92	3	197	3	.	113	3	.	3	7	61	.	.	3	.	3	.	.	3	13	3
93	.	3	23	3	19	.	.	7	3	.	3	67	37	3	139	3	.	.	7	19
94	31	7	157	.	3	11	3	.	79	3	89	3	7	47	113	.	3	.	3	103
95	3	.	3	.	.	3	43	3	.	11	29	7	3	13	3	19	.	3	71	3
396	199	3	.	3	11	7	173	.	3	.	3	23	.	3	13	3	7	29	41	31
97	29	.	59	.	3	151	3	.	11	3	.	3	67	.	79	7	3	11	3	.
98	3	53	3	7	41	3	29	3	.	7	.	.	3	61	3	.	.	3	.	3
99	.	3	7	3	107	167	179	11	3	13	3	.	73	3	.	3	11	59	43	7
400	13	109	11	.	3	.	3	7	31	3	13	3	.	7	.	.	3	23	3	29
401	3	7	3	19	.	3	7	3	53	.	.	.	3	67	3	11	137	3	19	3
02	7	3	31	3	79	.	131	37	3	19	3	7	.	3	.	3	.	7	167	11
03	191	41	17	173	3	7	3	23	61	3	7	3	31	53	11	13	3	.	3	157
04	3	11	3	17	7	3	13	3	83	.	.	.	3	.	3	7	37	3	11	3
05	101	3	.	3	17	11	31	.	3	7	3	.	.	3	7	3	71	.	13	23
406	11	19	7	.	3	17	3	151	7	3	.	3	41	179	.	.	3	97	3	7
07	3	13	3	.	11	3	19	3	43	193	139	13	3	7	3	.	131	3	7	3
08	.	3	13	3	37	.	7	.	3	.	3	.	7	3	97	3	.	11	.	.
09	7	.	19	11	3	163	3	17	151	3	.	3	11	.	13	.	3	7	3	.
10	3	131	3	23	.	3	.	3	17	.	7	89	3	37	3	.	7	3	.	3
411	23	3	11	3	7	.	.	13	3	17	3	11	.	3	31	3	.	.	23	.
12	.	.	89	7	3	.	3	47	.	3	.	3	.	.	7	11	3	.	3	13
13	3	103	3	101	109	3	79	3	7	31	11	37	3	.	3	67	.	3	173	3
14	19	3	47	3	.	.	83	7	3	23	3	17	13	3	11	3	29	.	7	181
15	47	7	.	13	3	.	3	.	.	3	131	3	7	41	73	.	3	.	3	.
416	3	.	3	.	.	3	.	3	.	107	.	7	3	17	3	13	.	3	.	3
17	11	3	179	3	53	7	13	.	3	11	3	.	29	3	.	3	7	13	109	83
18	.	17	97	.	3	.	3	19	13	3	151	3	59	11	17	7	3	.	3	.
19	3	.	3	7	.	3	167	3	11	7	.	23	3	19	3	17	.	3	.	3
420	97	3	7	3	43	.	.	.	3	.	3	13	11	3	127	3	17	.	19	7
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
361	.	3	11	3	.	29	59	7	3	61	3	11	97	3	.	3	.	17	7	53
62	.	7	13	101	3	.	3	.	19	3	.	3	7	13	131	11	3	.	3	.
63	3	.	3	103	13	3	41	3	37	.	11	7	3	.	3	.	151	3	17	3
64	.	3	.	3	19	7	.	.	3	.	3	.	191	3	11	3	7	.	.	17
65	.	11	139	.	3	.	3	13	.	3	79	3	157	.	.	7	3	23	3	.
366	3	.	3	7	61	3	37	3	.	7	.	43	3	.	3	19	.	3	.	3
67	11	3	7	3	.	97	.	83	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	31	7
68	43	137	.	29	3	191	3	7	.	3	.	3	13	7	.	37	3	79	3	.
69	3	7	3	13	23	3	7	3	11	.	103	.	3	31	3	47	71	3	.	3
70	7	3	.	3	.	13	101	19	3	131	3	7	11	3	.	3	29	7	.	23
371	97	53	73	.	3	7	3	11	.	3	7	3	.	19	41	.	3	13	3	.
72	3	.	3	19	7	3	83	3	13	.	.	11	3	23	3	7	89	3	13	3
73	41	3	.	3	.	.	11	.	3	7	3	.	29	3	7	3	139	61	.	149
74	17	13	7	47	3		3	89	7	3	11	3	37	.	19	.	3	.	3	7
75	3	17	3	23	.	3	.	3	.	.	53	.	3	7	3	.	.	3	7	3
376	23	3	.	3	13	.	7	139	3	101	3	41	7	3	13	3	.	.	11	.
77	7	19	17	61	3	11	3	179	107	3	37	3	.	.	29	23	3	7	3	.
78	3	.	3	17	.	3	19	3	.	11	7	.	3	43	3	.	7	3	.	3
79	.	3	.	3	7	.	.	43	3	13	3	163	19	3	.	3	.	.	.	13
80	13	.	19	7	3	17	3	.	11	3	13	3	113	.	7	41	3	11	3	31
381	3	.	3	11	31	3	.	3	7	59	.	73	3	.	3	.	181	3	.	3
82	29	3	67	3	.	83	17	7	3	.	3	101	.	3	.	3	11	149	7	.
83	.	7	11	89	3	13	3	17	.	3	.	3	7	131	23	13	3	.	3	19
84	3	.	3	.	.	3	11	3	17	79	109	7	3	29	3	11	61	3	137	3
85	19	3	.	3	.	7	.	.	3	17	3	173	41	3	47	3	7	.	13	11
386	.	.	29	67	3	23	3	.	.	3	.	3	47	101	11	7	3	.	3	.
87	3	11	3	7	83	3	.	3	137	7	17	13	3	.	3	79	.	3	11	3
88	.	3	7	3	.	11	.	47	3	.	3	17	59	3	37	3	.	19	97	7
89	11	.	163	.	3	47	3	7	.	3	.	3	17	7	13	127	3	.	3	59
90	3	7	3	139	11	3	7	3	89	41	23	.	3	11	3	.	13	3	.	3
391	7	3	.	3	.	.	53	13	3	43	3	7	.	3	149	3	.	7	19	.
92	.	17	37	11	3	7	3	107	173	3	7	3	11	163	17	101	3	.	3	13
93	3	23	3	.	7	3	.	3	.	.	13	53	3	.	3	7	11	3	.	3
94	.	3	11	3	.	19	61	29	3	7	3	11	13	3	7	3	17	73	127	.
95	.	37	7	13	3	.	3	.	7	3	19	3	.	23	31	11	3	17	3	7
396	3	19	3	.	17	3	.	3	.	97	11	.	3	7	3	13	19	3	7	3
97	137	3	83	3	.	17	7	.	3	31	3	.	7	3	11	3	.	13	17	.
98	7	11	.	23	3	.	3	.	13	3	.	3	19	.	.	113	3	7	3	17
99	3	.	3	31	89	3	17	3	.	71	7	.	3	.	3	.	7	3	23	3
400	11	3	41	3	7	.	103	17	3	11	3	13	149	3	.	3	47	.	101	.
401	.	.	13	7	3	.	3	.	17	3	.	3	23	11	7	.	3	.	3	61
02	3	.	3	127	13	3	67	3	7	17	.	47	3	.	3	.	43	3	59	3
03	.	3	.	3	.	181	37	7	3	47	3	149	11	3	.	3	13	31	7	71
04	19	7	23	.	3	43	3	11	.	3	17	3	.	.	.	19	3	.	3	.
05	3	107	3	.	47	3	113	3	29	13	.	7	3	.	3	37	.	3	.	3
406	13	3	139	3	73	7	11	67	3	89	3	19	17	3	23	3	7	.	.	.
07	.	83	53	.	3	.	3	59	.	3	11	3	13	17	.	7	3	19	3	11
08	3	.	3	7	29	3	.	3	23	7	41	.	3	.	3	31	103	3	.	3
09	31	3	7	3	.	13	71	53	3	.	3	43	107	3	17	3	179	.	11	7
10	.	61	.	19	3	11	3	7	67	3	.	3	.	7	181	17	3	13	3	73
411	3	7	3	79	.	3	7	3	13	11	.	.	3	.	3	.	17	3	13	3
12	7	3	.	3	11	.	29	.	3	149	3	7	.	3	19	3	157	7	61	.
13	.	13	.	59	.	7	3	41	11	3	7	3	.	29	.	.	3	11	3	.
14	3	.	3	11	7	3	.	3	113	67	19	.	3	13	3	7	.	.	17	3
15	37	3	29	3	13	89	197	11	3	7	3	.	43	3	7	3	11	.	.	17
416	.	23	7	.	3	61	3	.	7	3	71	3	.	73	.	47	3	173	3	7
17	3	43	3	.	.	3	11	3	.	37	.	41	3	7	3	11	23	3	7	3
18	.	3	19	3	41	.	7	149	3	13	3	.	7	3	.	3	163	.	.	11
19	7	.	.	.	3	29	3	.	19	3	13	3	.	.	11	199	3	.	3	.
420	3	11	3	137	.	3	23	3	.	.	7	29	3	.	3	.	7	3	11	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
421	.	71	13	17	3	23	3	7	73	3	103	3	.	7	29	.	3	17	3	113
22	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	.	11	3	157	3	.	53	3	83	3
23	7	3	.	3	29	17	11	101	3	.	3	7	.	3	.	3	13	7	17	.
24	109	.	.	.	3	7	3	13	59	3	7	3	151	.	.	31	3	.	3	11
25	3	19	3	.	7	3	17	3	101	13	23	71	3	.	3	7	19	3	157	3
426	13	3	137	3	.	43	19	17	3	7	3	47	89	3	7	3	.	.	11	.
27	.	.	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	13	151	.	79	3	.	3	7
28	3	23	3	13	31	3	47	3	.	11	113	.	3	7	3	.	.	3	7	3
29	.	3	107	3	11	13	7	167	3	.	3	.	7	3	.	3	23	.	67	29
30	7	.	29	41	3	.	3	.	11	3	17	3	37	23	.	193	3	7	3	.
431	3	.	3	11	19	3	.	3	13	29	7	17	3	.	3	179	7	3	13	3
32	.	3	.	3	7	79	23	11	3	.	3	139	17	3	.	3	11	83	59	61
33	19	13	11	7	3	.	3	.	.	3	37	3	.	17	7	19	3	89	3	67
34	3	.	3	83	.	3	11	3	7	173	.	137	3	13	3	11	.	3	23	3
35	41	3	139	3	13	53	.	7	3	71	3	19	101	3	13	3	.	.	7	11
436	59	7	.	.	3	.	3	53	181	3	.	3	7	.	11	17	3	19	3	.
37	3	11	3	109	.	3	.	3	.	23	73	7	3	101	3	191	17	3	11	3
38	.	3	71	3	193	7	43	29	3	13	3	41	53	3	59	3	7	17	163	13
39	11	43	23	19	3	.	3	37	167	3	13	3	197	.	53	7	3	.	3	71
40	3	79	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.	3	11	3	47	.	3	17	3
441	.	3	7	3	.	31	157	.	3	.	3	.	.	3	19	3	37	11	131	7
42	.	.	.	11	3	13	3	7	.	3	47	3	11	7	31	13	3	151	3	.
43	3	7	3	59	73	3	7	3	23	127	19	97	3	43	3	101	11	3	61	3
44	7	3	11	3	89	23	.	43	3	31	3	7	157	3	37	3	19	7	13	.
45	.	191	.	47	3	7	3	.	211	3	7	3	.	.	.	11	3	.	3	.
446	3	13	3	31	7	3	.	3	.	.	11	13	3	.	3	7	.	3	.	3
47	.	3	13	3	.	61	97	197	3	7	3	.	41	3	7	3	.	101	29	73
48	71	11	7	.	3	41	3	.	7	3	23	3	127	107	13	.	3	.	3	7
49	3	83	3	.	97	3	.	3	29	167	.	179	3	7	3	.	13	3	7	3
50	11	3	.	3	19	.	7	13	3	11	3	37	7	3	29	3	73	31	107	19
451	7	23	43	79	3	197	3	.	.	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	13
52	3	17	3	53	29	3	103	3	11	41	7	31	3	.	3	19	7	3	.	3
53	89	3	.	3	7	113	.	.	3	61	3	.	11	3	.	3	.	.	137	101
54	83	.	17	7	3	.	3	11	53	3	.	3	181	.	7	.	3	29	3	47
55	3	.	3	17	71	3	23	3	7	.	53	11	3	.	3	13	.	3	37	3
456	31	3	59	3	17	.	11	7	3	43	3	103	.	3	47	3	.	13	7	191
57	23	7	.	43	3	17	3	131	13	3	11	3	7	19	.	53	3	149	3	11
58	3	163	3	19	61	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	23	.	3	19	3
59	197	3	29	3	31	7	17	47	3	19	3	13	23	3	71	3	7	.	11	.
60	157	179	13	139	3	11	3	17	.	3	.	3	191	13	19	7	3	41	3	.
461	3	.	3	7	13	3	107	3	17	7	193	163	3	.	3	29	.	3	.	3
62	47	3	7	3	11	37	113	.	3	17	3	.	83	3	.	3	13	131	103	7
63	.	19	.	.	3	29	3	7	11	3	.	3	107	7	.	149	3	11	3	.
64	3	7	3	11	.	3	7	3	61	13	17	29	3	59	3	.	.	3	.	3
65	7	3	.	3	.	193	181	11	3	.	3	7	19	3	173	3	11	7	89	.
466	.	29	11	127	3	7	3	.	23	3	7	3	13	.	149	.	3	.	3	.
67	3	.	3	13	7	3	11	3	19	.	.	83	3	17	3	7	43	3	.	3
68	17	3	.	3	.	13	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	31	139	79	11
69	.	17	7	61	3	43	3	.	7	3	167	3	71	.	11	73	3	13	3	7
70	3	11	3	29	53	3	.	3	13	59	31	131	3	7	3	17	.	3	7	3
471	19	3	17	3	.	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	17	.	.	.
72	7	13	.	17	3	31	3	23	.	3	83	3	73	149	.	97	3	7	3	37
73	3	.	3	.	11	3	.	3	79	37	7	19	3	11	3	.	7	3	113	3
74	107	3	.	3	7	17	.	.	3	47	3	43	.	3	13	3	.	11	17	23
75	.	67	7	7	3	.	3	19	.	3	.	3	11	.	7	37	3	.	3	17
476	3	181	3	.	47	3	17	3	7	.	97	.	3	19	3	.	11	3	29	3
77	.	3	11	3	.	.	.	7	3	13	3	11	59	3	.	3	.	.	7	13
78	13	7	.	.	3	137	3	.	17	3	13	3	7	31	.	11	3	.	3	59
79	3	.	3	23	.	3	.	3	173	17	11	7	3	.	3	.	191	3	.	3
480	23	3	61	3	41	7	.	31	3	.	3	.	43	3	11	3	7	107	23	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
421	61	3	.	3	7	11	149	.	3	181	3	.	.	3	.	3	31	.	.	19
22	11	29	.	7	3	13	3	43	41	3	67	3	.	.	7	13	3	.	3	.
23	3	41	3	.	11	3	13	3	7	.	31	.	3	11	3	19	.	3	.	3
24	.	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	107	23	3	.	3	.	11	7	.
25	17	7	.	11	3	31	3	.	.	3	.	3	7	17	37	.	3	191	3	41
426	3	13	3	29	37	3	.	3	71	139	.	7	3	.	3	.	11	3	.	3
27	.	3	11	3	61	7	.	19	3	.	3	11	179	3	.	3	7	.	.	127
28	73	.	17	.	3	.	3	163	43	3	53	3	137	19	13	7	3	59	3	.
29	3	.	3	7	.	3	.	3	97	7	11	.	3	53	3	.	13	3	19	3
30	.	3	7	3	17	.	.	13	3	19	3	23	67	3	11	3	41	.	71	7
431	.	11	103	.	3	17	3	7	23	3	.	3	29	7	19	.	3	47	3	13
32	3	7	3	181	.	3	7	3	.	109	13	113	3	.	3	73	.	3	29	3
33	7	3	191	3	131	103	17	31	3	11	3	7	13	3	43	3	.	7	.	.
34	.	19	.	13	3	7	3	17	29	3	7	3	.	11	.	157	3	23	3	.
35	3	97	3	43	7	3	19	3	11	.	.	.	3	41	3	7	.	3	.	3
436	.	3	149	3	.	47	13	.	3	7	3	31	11	3	7	3	.	13	37	89
37	67	.	7	.	3	107	3	11	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7
38	3	.	3	61	23	3	.	3	19	73	17	11	3	7	3	.	.	3	7	3
39	.	3	113	3	.	.	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3	.	29	.	23
40	7	.	13	.	3	139	3	127	.	3	11	3	17	13	.	.	3	7	3	11
441	3	67	3	.	13	3	29	3	.	163	7	.	3	17	3	.	7	3	193	3
42	17	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.	.	3	67	3	13	.	11	31
43	.	17	.	7	3	11	3	13	.	3	199	3	.	.	7	.	3	103	3	29
44	3	.	3	23	173	3	53	3	7	11	79	19	3	.	3	17	.	3	.	3
45	13	3	17	3	11	.	41	7	3	29	3	.	109	3	.	3	17	19	7	103
446	.	7	.	17	3	59	3	19	11	3	43	3	7	.	.	23	3	11	3	.
47	3	.	3	11	17	3	89	3	.	.	.	7	3	19	3	.	47	3	.	3
48	.	3	31	3	113	7	.	11	3	23	3	.	37	3	.	3	7	.	17	59
49	79	.	11	.	3	.	3	193	.	3	41	3	31	.	.	7	3	13	3	17
50	3	.	3	7	.	3	11	3	13	7	.	61	3	.	3	11	67	3	13	3
451	163	3	7	3	.	19	31	17	3	199	3	.	.	3	73	3	.	43	.	7
52	37	13	167	.	3	.	3	7	17	3	19	3	.	7	11	.	3	.	3	97
53	3	7	3	67	.	3	7	3	53	17	.	23	3	19	3	.	19	3	11	3
54	7	3	131	3	13	11	19	41	3	37	3	7	.	3	13	3	.	7	.	173
55	11	.	.	29	3	7	3	.	199	3	7	3	19	29	.	.	3	127	3	.
456	3	71	3	.	7	3	.	3	109	.	.	17	3	11	3	7	.	3	.	3
57	.	3	.	3	67	.	.	37	3	7	3	.	17	3	7	3	29	11	41	13
58	13	.	7	11	3	.	3	.	7	3	13	3	11	17	.	109	3	.	3	7
59	3	.	3	.	19	3	43	3	.	31	23	.	3	7	3	.	11	3	7	3
60	.	3	11	3	.	73	7	23	3	.	3	11	7	3	17	3	.	.	31	.
461	7	.	101	31	3	13	3	137	.	3	61	3	.	.	.	11	3	7	3	.
62	3	23	3	167	.	3	13	3	.	.	7	.	3	31	3	41	7	3	67	3
63	.	3	151	3	7	71	199	89	3	79	3	19	.	3	11	3	23	17	13	.
64	.	11	.	7	3	97	3	31	.	3	.	3	53	23	7	.	3	19	3	.
65	3	13	3	.	101	3	.	3	7	.	47	13	3	37	3	.	.	3	17	3
466	11	3	13	3	29	.	23	7	3	11	3	.	.	3	.	3	.	53	7	17
67	.	7	.	19	3	101	3	.	.	3	29	3	7	11	13	71	3	73	3	53
68	3	.	3	47	.	3	.	3	11	19	.	7	3	173	3	.	13	3	23	3
69	29	3	.	3	151	7	67	13	3	107	3	109	11	3	19	3	7	.	.	43
70	.	211	.	.	3	19	3	11	103	3	179	3	23	197	.	7	3	.	3	13
471	3	61	3	7	.	3	101	3	43	7	13	11	3	29	3	.	41	3	109	3
72	.	3	7	3	167	151	11	.	3	41	3	.	13	3	.	3	19	.	.	7
73	.	.	23	13	3	.	3	7	127	3	11	3	.	7	.	.	3	83	3	11
74	3	7	3	.	31	3	7	3	37	29	197	79	3	103	3	13	.	3	.	3
75	7	3	19	3	199	.	13	.	3	113	3	7	.	3	23	3	.	7	11	.
476	17	.	.	.	3	7	3	73	13	3	7	3	.	41	43	103	3	37	3	.
77	3	17	3	163	7	3	37	3	23	11	.	.	3	71	3	7	.	3	.	3
78	109	3	.	3	11	23	151	.	3	7	3	13	.	3	7	3	83	47	211	19
79	.	79	7	199	3	.	3	.	7	3	.	3	.	13	47	37	3	11	3	7
480	3	29	3	11	13	3	71	3	53	.	131	.	3	7	3	19	.	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
481	103	11	73	.	3	13	3	.	.	3	17	3	.	127	37	7	3	31	3	89
82	3	19	3	7	37	3	13	3	.	7	29	17	3	139	3	.	19	3	.	3
83	11	3	7	3	.	.	19	211	3	11	3	31	17	3	.	3	.	29	13	7
84	29	97	.	.	3	.	3	7	41	3	79	3	19	7	.	59	3	193	3	.
85	3	7	3	179	139	3	7	3	11	.	.	13	3	.	3	.	.	3	43	3
486	7	3	13	3	.	173	61	.	3	.	3	7	11	3	17	3	127	7	.	.
87	31	113	53	67	3	7	3	11	83	3	7	3	.	.	13	17	3	79	3	29
88	3	37	3	.	7	3	.	3	.	.	157	11	3	47	3	7	13	3	.	3
89	79	3	.	3	59	41	11	13	3	7	3	113	167	3	7	3	109	17	.	31
90	19	.	7	.	3	23	3	.	7	3	11	3	.	.	.	19	3	.	3	7
491	3	.	3	.	67	3	.	3	.	.	13	73	3	7	3	.	157	3	7	3
92	.	3	.	3	.	29	7	83	3	.	3	19	7	3	53	3	41	23	11	17
93	7	47	.	13	3	11	3	149	31	3	107	3	.	.	103	.	3	7	3	61
94	3	127	3	.	.	3	.	3	73	11	7	.	3	.	3	13	7	3	197	3
95	59	3	31	3	7	67	13	23	3	.	3	.	.	3	.	3	107	13	.	.
496	193	.	113	7	3	.	3	29	11	3	.	3	31	.	7	.	3	11	3	131
97	3	23	3	11	.	3	83	3	7	19	.	223	3	41	3	.	.	3	.	3
98	.	3	.	3	.	109	31	7	3	.	3	13	.	3	19	3	11	.	7	79
99	139	7	11	29	3	19	3	.	.	3	.	3	7	13	.	.	3	.	3	199
500	3	31	3	43	13	3	11	3	.	.	19	7	3	.	3	11	163	3	.	3
501	.	3	89	3	.	7	23	.	3	.	3	.	.	3	181	3	7	41	.	11
02	17	61	.	23	3	149	3	13	.	3	.	3	.	191	11	7	3	47	3	109
03	3	11	3	7	.	3	67	3	.	7	59	.	3	.	3	71	.	3	11	3
04	13	3	7	3	.	11	.	127	3	.	3	211	29	3	31	3	.	73	61	7
05	11	.	17	53	3	.	3	7	19	3	.	3	13	7	97	.	3	.	3	.
506	3	7	3	13	11	3	7	3	223	23	.	197	3	11	3	79	89	3	.	3
07	7	3	.	3	17	13	41	67	3	.	3	7	97	3	113	3	.	7	31	19
08	37	101	23	11	3	7	3	89	.	3	7	3	11	.	29	.	3	13	3	.
09	3	109	3	.	7	3	59	3	13	.	127	.	3	31	3	7	11	3	13	3
10	.	3	11	3	29	139	17	163	3	7	3	11	.	3	7	3	43	.	.	71
511	137	13	7	.	3	79	3	17	7	3	29	3	.	.	.	11	3	199	3	7
12	3	.	3	41	83	3	.	3	17	181	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3
13	29	3	.	3	13	23	7	19	3	17	3	.	7	3	11	3	.	.	3	.
14	7	11	.	101	3	.	3	.	.	3	.	3	.	19	.	.	3	7	3	.
15	3	.	3	19	.	3	.	3	.	67	7	227	3	29	3	.	7	3	19	3
516	11	3	.	3	7	.	71	41	3	11	3	17	.	3	.	3	113	43	.	13
17	13	149	29	7	3	.	3	.	.	3	13	3	17	11	7	31	3	59	3	.
18	3	.	3	103	197	3	.	3	7	29	.	.	3	17	3	.	47	3	139	3
19	17	3	.	3	23	.	193	7	3	137	3	.	11	3	167	3	.	127	7	.
20	149	7	131	.	3	13	3	11	.	3	.	3	7	61	17	13	3	71	3	23
521	3	.	3	107	31	3	13	3	.	47	.	7	3	37	3	17	23	3	.	3
22	.	3	17	3	109	7	11	79	3	.	3	29	19	3	.	3	7	89	13	.
23	.	193	19	17	3	.	3	113	.	3	11	3	43	59	199	7	3	17	3	11
24	3	13	3	7	17	3	23	3	19	7	103	13	3	.	3	41	229	3	179	3
25	.	3	7	3	.	17	.	29	3	53	3	.	131	3	107	3	.	.	11	7
526	23	41	31	.	3	11	3	7	101	3	.	3	.	7	13	.	3	61	3	17
27	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	67	3	.	3	23	13	3	.	3
28	7	3	.	3	11	.	.	13	3	101	3	7	23	3	.	3	53	7	43	41
29	.	.	191	157	3	7	3	.	11	3	7	3	41	43	.	167	3	11	3	13
30	3	.	3	11	7	3	.	3	37	17	13	19	3	181	3	7	29	3	.	3
531	.	3	23	3	173	.	.	11	3	7	3	.	13	3	7	3	11	19	.	.
32	.	83	7	13	3	127	3	19	7	3	17	3	.	.	139	.	3	37	3	7
33	3	151	3	.	89	3	11	3	71	.	.	17	3	7	3	11	41	3	7	3
34	.	3	.	3	.	31	7	.	3	41	3	23	7	3	.	3	.	13	19	11
35	7	.	.	73	3	59	3	109	13	3	.	3	199	17	11	37	3	7	3	.
536	3	11	3	.	.	3	.	3	29	.	7	.	3	.	3	.	7	3	11	3
37	83	3	43	3	7	11	.	.	3	31	3	13	.	3	17	3	61	223	71	59
38	11	173	13	7	3	.	3	.	107	3	19	3	.	13	7	17	3	23	3	.
39	3	19	3	31	11	3	.	3	7	.	.	199	3	11	3	.	17	3	73	3
40	.	3	53	3	.	.	19	7	3	89	3	97	71	3	.	3	13	11	7	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
481	179	3	.	3	17	.	7	11	3	67	3	.	7	3	.	3	11	.	.	157
82	7	73	11	.	3	17	3	13	.	3	23	3	.	53	109	43	3	7	3	.
83	3	.	3	37	137	3	11	3	.	13	7	101	3	.	3	11	7	3	.	3
84	13	3	37	3	7	.	17	19	3	.	3	.	.	3	.	3	.	71	.	11
85	47	23	59	7	3	.	3	17	.	3	31	3	13	19	7	.	3	.	3	23
486	3	11	3	13	.	3	41	3	7	.	.	.	3	89	3	181	23	3	11	3
87	.	3	.	3	.	11	.	7	3	17	3	.	.	3	.	3	97	59	7	.
88	11	7	.	.	3	131	3	.	.	3	37	3	7	.	19	.	3	13	3	107
89	3	.	3	173	11	3	23	3	13	.	17	7	3	11	3	.	.	3	13	3
90	181	3	.	3	71	7	139	.	3	31	3	17	.	3	191	3	7	11	29	37
491	23	13	.	11	3	211	3	.	.	3	.	3	11	137	101	7	3	.	3	.
92	3	.	3	7	.	3	19	3	29	7	.	.	3	13	3	23	11	3	.	3
93	17	3	7	3	13	.	.	.	3	97	3	11	19	3	13	3	.	.	47	7
94	.	17	19	.	3	.	3	7	61	3	.	3	.	7	17	11	3	43	3	.
95	3	7	3	.	29	3	7	3	19	89	11	43	3	179	3	17	101	3	.	3
496	7	3	17	3	53	.	.	.	3	13	3	7	.	3	11	3	17	7	.	13
97	13	11	.	17	3	7	3	157	71	3	7	3	67	.	.	.	3	17	3	19
98	3	.	3	73	7	3	47	3	.	53	.	31	3	83	3	7	.	3	41	3
99	11	3	.	3	47	17	29	107	3	7	3	23	151	3	7	3	.	.	17	.
500	.	.	7	113	3	13	3	.	7	3	.	3	61	11	.	13	3	.	3	7
501	3	.	3	.	103	3	13	3	11	131	.	19	3	7	3	31	53	3	7	3
02	31	3	29	3	.	.	7	17	3	.	3	137	7	3	.	3	.	19	13	179
03	7	43	37	.	3	.	3	11	17	3	.	3	83	.	.	41	3	7	3	101
04	3	13	3	.	.	3	109	3	41	17	7	11	3	19	3	29	7	3	.	3
05	.	3	13	3	7	59	11	61	3	103	3	37	.	3	.	3	.	.	19	.
506	.	37	179	7	3	29	3	23	.	3	11	3	59	.	7	173	3	163	3	11
07	3	.	3	193	23	3	.	3	7	.	.	17	3	43	3	.	13	3	79	3
08	211	3	.	3	181	19	.	7	3	.	3	83	17	3	151	3	.	.	7	23
09	.	7	.	131	3	11	3	.	.	3	19	3	7	17	67	.	3	.	3	13
10	3	19	3	.	.	3	223	3	.	11	13	7	3	23	3	47	19	3	37	3
511	.	3	.	3	11	7	19	.	3	73	3	61	13	3	17	3	7	.	.	.
12	53	107	.	13	3	.	3	167	11	3	47	3	19	.	.	7	3	11	3	43
13	3	89	3	7	.	3	31	3	47	7	83	191	3	.	3	13	17	3	103	3
14	23	3	7	3	.	53	13	11	3	.	3	.	.	3	.	3	11	13	23	7
15	.	31	11	47	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	79	23	3	.	3	.
516	3	7	3	.	19	3	7	3	163	.	31	.	3	.	3	11	.	3	17	3
17	7	3	73	3	191	37	.	.	3	23	3	7	53	3	.	3	67	7	.	11
18	19	.	13	.	3	7	3	.	.	3	7	3	29	13	11	19	3	.	3	.
19	3	11	3	223	7	3	157	3	.	.	.	59	3	227	3	7	.	3	11	3
20	.	3	.	3	79	11	.	.	3	7	3	19	.	3	7	3	13	113	59	53
521	11	.	7	43	3	.	3	13	7	3	.	3	.	.	23	.	3	19	3	7
22	3	.	3	.	11	3	.	3	167	13	61	23	3	7	3	.	.	3	7	3
23	13	3	41	3	.	.	7	.	3	83	3	.	7	3	.	3	.	11	151	61
24	7	.	.	11	3	23	3	71	137	3	97	3	11	31	73	.	3	7	3	47
25	3	.	3	13	.	3	.	3	.	19	7	.	3	.	3	43	7	3	149	3
526	37	3	11	3	7	13	.	31	3	.	3	11	139	3	19	3	.	23	.	151
27	17	71	.	7	3	19	3	.	113	3	89	3	47	.	7	11	3	13	3	37
28	3	17	3	.	.	3	29	3	7	37	11	.	3	.	3	.	217	3	13	3
29	.	3	.	3	211	.	.	7	3	.	3	31	.	3	11	3	19	197	7	.
30	.	7	17	97	3	47	3	.	73	3	.	3	7	109	.	.	3	.	3	29
531	3	23	3	17	.	3	79	3	.	.	41	7	3	13	3	.	43	3	.	3
32	11	3	19	3	13	7	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3	7	137	223	.
33	31	.	229	.	3	17	3	83	19	3	.	3	.	11	197	7	3	107	3	67
34	3	.	3	7	193	3	127	3	11	7	53	.	3	79	3	89	149	3	61	3
35	.	3	7	3	19	29	17	.	3	13	3	131	11	3	41	3	.	.	.	7
536	13	.	.	23	3	103	3	7	191	3	13	3	.	7	37	53	3	.	3	.
37	3	7	3	.	37	3	7	3	17	.	.	11	3	.	3	19	.	3	23	3
38	7	3	.	3	.	61	11	103	3	17	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.
39	.	163	79	.	3	7	3	29	31	3	7	3	23	37	.	13	3	.	3	11
540	3	191	3	.	7	3	13	3	139	23	17	41	3	.	3	7	.	3	47	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
541	.	7	61	11	3	53	3	13	.	3	113	3	7	.	43	.	3	29	3	173
42	3	67	3	151	23	3	.	3	59	13	211	7	3	193	3	73	11	3	17	3
43	13	3	11	3	.	7	29	.	3	.	3	11	.	3	67	3	7	31	.	17
44	.	.	41	.	3	.	3	.	.	3	37	3	13	29	.	7	3	.	3	.
45	3	.	3	7	19	3	.	3	.	7	11	31	3	23	3	.	.	3	.	3
546	.	3	7	3	97	13	.	193	3	.	3	.	.	3	11	3	101	53	.	7
47	19	11	227	.	3	.	3	7	.	3	.	3	229	7	127	19	3	13	3	53
48	3	7	3	23	59	3	7	3	13	73	109	.	3	.	3	29	173	3	13	3
49	7	3	.	3	43	89	.	.	3	11	3	7	163	3	137	3	.	7	23	.
50	.	13	67	.	3	7	3	37	.	3	7	3	113	11	47	23	3	19	3	.
551	3	.	3	.	7	3	.	3	11	199	.	29	3	13	3	7	67	3	.	3
52	.	3	.	3	13	.	.	.	3	7	3	.	11	3	7	3	37	.	101	.
53	17	29	7	19	3	.	3	11	7	3	61	3	.	.	.	.	3	.	3	7
54	3	17	3	67	.	3	151	3	157	19	43	11	3	7	3	.	.	3	7	3
55	.	3	47	3	.	43	7	59	3	13	3	.	7	3	19	3	.	67	.	13
556	7	.	17	3	3	19	3	.	.	3	11	3	.	.	23	.	3	7	3	11
57	3	53	3	17	.	3	.	3	.	103	7	23	3	.	3	139	7	3	107	3
58	41	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.	31	3	.	3	19	.	11	.
59	.	.	37	7	3	11	3	199	.	3	.	3	.	.	7	13	3	43	3	.
60	3	.	3	.	79	3	13	3	7	11	179	43	3	137	3	.	.	3	41	3
561	.	3	19	3	11	.	17	7	3	.	3	37	.	3	73	3	31	23	7	.
62	43	7	.	.	3	67	3	17	11	3	59	3	7	53	.	.	3	11	3	.
63	3	13	3	11	.	3	199	3	17	151	23	7	3	.	3	53	103	3	29	3
64	.	3	13	3	19	7	.	11	3	17	3	73	.	3	.	3	7	.	47	19
65	.	.	11	.	3	31	3	.	29	3	.	3	.	.	13	7	3	.	3	193
566	3	23	3	7	.	3	11	3	41	7	17	.	3	.	3	11	13	3	37	3
67	.	3	7	3	.	.	43	13	3	131	3	17	.	3	.	3	23	179	.	7
68	79	43	.	.	3	.	3	7	.	3	.	3	17	7	11	113	3	.	3	13
69	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	13	.	3	17	3	97	.	3	11	3
70	7	3	109	3	47	11	23	19	3	127	3	7	13	3	.	3	.	7	.	89
571	11	17	.	13	3	7	3	.	239	3	7	3	.	19	17	.	3	.	3	.
72	3	.	3	19	7	3	29	3	.	.	89	151	3	11	3	7	.	3	19	3
73	.	3	17	3	223	37	13	31	3	7	3	.	.	3	7	3	17	11	.	.
74	61	137	7	11	3	.	3	67	7	3	.	3	11	79	19	71	3	17	3	7
75	3	.	3	131	17	3	113	3	97	23	.	.	3	7	3	163	11	3	7	3
576	.	3	11	3	53	17	7	157	3	29	3	11	7	3	.	3	.	59	17	.
77	7	19	13	.	3	.	3	.	197	3	.	3	.	13	.	11	3	7	3	17
78	3	.	3	.	13	3	17	3	67	53	7	.	3	151	3	.	7	3	.	3
79	.	3	79	3	7	29	.	17	3	.	3	53	19	3	11	3	13	.	.	167
80	31	11	19	7	3	.	3	13	17	3	.	3	.	131	7	127	3	.	3	.
581	3	97	3	.	.	3	89	3	7	13	37	.	3	61	3	47	53	3	.	3
82	11	3	.	3	.	23	.	7	3	11	3	.	.	3	.	3	139	.	7	31
83	173	7	199	.	3	.	3	29	.	3	17	3	7	11	.	227	3	41	3	19
84	3	.	3	13	.	3	.	3	11	37	.	.	3	71	3	.	.	3	211	3
85	19	3	41	3	.	7	163	139	3	43	3	107	11	3	.	3	7	.	127	.
586	.	.	103	29	3	.	3	11	31	3	23	3	.	17	191	7	3	13	3	223
87	3	47	3	7	.	3	71	3	13	7	.	11	3	.	3	151	.	3	13	3
88	127	3	7	3	23	103	11	131	3	59	3	89	.	3	17	3	29	19	83	7
89	.	13	.	.	3	.	3	7	.	3	11	3	31	7	.	17	3	.	3	11
90	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	67	.	3	13	3	43	17	3	137	3
591	7	3	.	3	13	.	31	.	3	.	3	7	29	3	13	3	.	7	11	.
92	53	73	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	61	.	37	.	3	.	3	179
93	3	31	3	127	7	3	23	3	137	11	41	79	3	.	3	7	.	3	17	3
94	191	3	.	3	11	19	.	.	3	7	3	67	103	3	7	3	.	.	.	13
95	13	157	7	.	3	.	3	53	7	3	13	3	59	37	29	.	3	11	3	7
596	3	19	3	11	.	3	.	3	.	109	.	.	3	7	3	23	19	3	7	3
97	227	3	.	3	29	211	7	11	3	.	3	.	7	3	31	3	11	.	.	149
98	7	79	11	.	3	13	3	41	163	3	29	3	19	.	53	13	3	7	3	97
99	3	37	3	139	181	3	11	3	.	31	7	.	3	73	3	11	7	3	151	3
600	29	3	23	3	7	.	.	47	3	193	3	.	173	3	.	3	.	97	13	11
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
541	.	3	31	3	41	.	.	19	3	7	3	17	.	3	7	3	47	.	11	83
42	.	227	7	29	3	11	3	.	7	3	.	3	17	19	.	233	3	.	3	7
43	3	13	3	19	.	3	.	3	.	11	.	13	3	7	3	137	109	3	7	3
44	17	3	13	3	11	107	7	.	3	19	3	157	7	3	23	3	29	.	.	.
45	7	17	89	.	3	.	3	197	11	3	.	3	.	.	13	79	3	7	3	71
546	3	31	3	11	47	3	.	3	23	.	7	.	3	149	3	17	7	3	83	3
47	.	3	17	3	7	23	.	11	3	.	3	.	29	3	.	3	11	157	37	.
48	.	19	11	7	3	83	3	.	37	3	.	3	.	71	7	131	3	17	3	13
49	3	179	3	.	17	3	11	3	7	.	13	.	3	.	3	11	127	3	43	3
50	.	3	.	3	.	17	53	7	3	.	3	.	13	3	31	3	89	37	7	11
551	131	7	19	13	3	.	3	43	.	3	23	3	7	139	11	229	3	97	3	17
52	3	11	3	.	73	3	17	3	19	31	167	7	3	59	3	13	.	3	11	3
53	.	3	197	3	23	7	13	17	3	.	3	79	.	3	97	3	7	13	31	.
54	11	23	.	31	3	37	3	.	13	3	29	3	109	113	.	7	3	211	3	19
55	3	73	3	7	11	3	181	3	61	7	149	.	3	11	3	.	23	3	53	3
556	19	3	7	3	.	.	.	179	3	.	3	13	.	3	233	3	.	11	.	7
57	197	127	13	11	3	.	3	7	43	3	17	3	11	7	.	47	3	.	3	.
58	3	7	3	83	13	3	7	3	.	59	71	17	3	29	3	.	11	3	.	3
59	7	3	11	3	107	191	.	97	3	223	3	7	17	3	.	3	13	7	.	29
60	23	.	29	61	3	7	3	13	47	3	7	3	.	17	.	11	3	.	3	.
561	3	233	3	89	7	3	.	3	.	13	11	.	3	19	3	7	83	3	.	3
62	13	3	101	3	127	.	.	.	3	7	3	167	23	3	7	3	181	41	19	.
63	37	11	7	.	3	157	3	.	7	3	.	3	13	.	113	17	3	.	3	7
64	3	.	3	13	131	3	.	3	149	.	.	.	3	7	3	.	17	3	7	3
65	11	3	23	3	163	13	7	.	3	11	3	29	7	3	71	3	.	17	.	.
566	7	181	53	.	3	.	3	61	.	3	19	3	.	11	.	83	3	7	3	31
67	3	19	3	211	31	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	109	7	3	13	3
68	139	3	.	3	7	101	19	29	3	.	3	23	11	3	163	3	.	.	.	17
69	.	13	.	7	3	.	3	11	23	3	227	3	19	.	7	.	3	.	3	.
70	3	59	3	.	43	3	149	3	7	.	.	11	3	13	3	.	37	3	.	3
571	67	3	61	3	13	.	11	7	3	.	3	.	211	3	13	3	.	.	7	47
72	.	7	31	.	3	173	3	.	.	3	11	3	7	.	.	59	3	23	3	11
73	3	83	3	41	19	3	.	3	103	.	181	7	3	.	3	.	29	3	.	3
74	73	3	.	3	37	7	.	101	3	13	3	229	47	3	.	3	7	.	11	13
75	13	67	.	.	3	11	3	23	.	3	13	3	71	89	.	7	3	.	3	239
576	3	.	3	7	23	3	.	3	101	7	137	.	3	37	3	.	31	3	.	3
77	.	3	7	3	11	47	61	41	3	.	3	19	.	3	.	3	.	.	29	7
78	17	.	47	.	3	13	3	7	11	3	31	3	.	7	107	13	3	11	3	.
79	3	7	3	11	149	3	7	3	29	.	.	37	3	23	3	103	.	3	59	3
80	7	3	.	3	.	31	.	11	3	.	3	7	241	3	29	3	11	7	13	.
581	.	.	11	19	3	7	3	.	.	3	7	3	73	83	31	.	3	.	3	.
82	3	13	3	17	7	3	11	3	.	19	101	13	3	167	3	7	71	3	97	3
83	23	3	13	3	17	.	.	.	3	7	3	.	79	3	7	3	.	.	23	11
84	.	.	7	53	3	17	3	59	7	3	.	3	.	233	11	23	3	29	3	7
85	3	11	3	31	157	3	.	3	37	.	19	.	3	7	3	41	13	3	7	3
586	89	3	.	3	.	11	7	13	3	23	3	.	7	3	.	3	19	.	79	.
87	7	41	.	67	3	.	3	17	.	3	53	3	43	29	.	.	3	7	3	13
88	3	229	3	71	11	3	37	3	17	113	7	97	3	11	3	.	7	3	.	3
89	167	3	19	3	7	.	.	109	3	17	3	.	13	3	61	3	.	11	.	41
90	.	.	73	7	3	.	.	.	19	3	.	3	11	.	7	37	3	.	3	113
591	3	149	3	.	67	3	.	3	7	47	17	23	3	.	3	13	11	3	.	3
92	193	3	11	3	19	.	13	7	3	.	3	11	.	3	101	3	211	13	7	19
93	.	7	.	.	3	23	3	.	13	3	.	3	7	43	.	11	3	.	3	.
94	3	.	3	37	97	3	.	3	.	.	11	7	3	17	3	19	41	3	.	3
95	17	3	.	3	.	7	.	71	3	41	3	13	.	3	11	3	7	23	61	107
596	.	11	13	.	3	.	3	.	.	3	83	3	37	13	17	7	3	.	3	.
97	3	.	3	7	13	3	59	3	.	7	23	.	3	191	3	17	.	3	.	3
98	11	3	7	3	31	.	131	19	3	11	3	.	233	3	.	3	13	101	89	7
99	.	167	.	17	3	61	3	7	.	3	37	3	.	7	223	239	3	17	3	.
600	3	7	3	19	17	3	7	3	11	13	.	73	3	.	3	.	.	3	19	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
601	.	.	.	7	3	47	3	79	59	3	.	3	157	.	7	.	3	137	3	.
02	3	11	3	.	19	3	.	3	7	.	229	13	3	29	3	59	107	3	11	3
03	47	3	13	3	41	11	.	7	3	179	3	23	.	3	.	3	83	.	7	29
04	11	7	29	193	3	.	3	31	23	3	.	3	7	223	13	19	3	.	3	.
05	3	17	3	.	11	3	73	3	.	29	.	7	3	11	3	.	13	3	191	3
606	.	3	.	3	.	7	.	13	3	.	3	19	.	3	.	3	7	11	.	.
07	101	.	17	11	3	109	3	.	41	3	.	3	11	.	.	7	3	19	3	13
08	3	41	3	7	.	3	61	3	.	7	13	59	3	127	3	83	11	3	71	3
09	.	3	7	3	17	.	.	.	3	.	3	11	13	3	.	3	149	.	59	7
10	.	53	.	13	3	17	3	7	139	3	.	3	.	7	67	11	3	.	3	41
611	3	7	3	53	23	3	7	3	.	19	11	.	3	113	3	13	.	3	47	3
12	7	3	97	3	.	41	13	29	3	.	3	7	.	3	11	3	47	7	73	23
13	59	11	101	37	3	7	3	17	13	3	7	3	.	.	83	.	3	.	3	31
14	3	.	3	.	7	3	.	3	17	239	19	47	3	23	3	7	.	3	43	3
15	11	3	.	3	.	137	227	.	3	7	3	13	37	3	7	3	19	.	.	61
616	229	.	7	.	3	.	3	43	7	3	.	3	.	11	.	53	3	.	3	7
17	3	.	3	23	13	3	.	3	11	.	17	.	3	7	3	107	29	3	7	3
18	23	3	19	3	113	.	7	.	3	211	3	17	7	3	.	3	13	.	23	127
19	7	103	31	.	3	101	3	11	19	3	.	3	17	.	241	23	3	7	3	.
20	3	.	3	59	.	3	.	3	109	13	7	11	3	17	3	.	7	3	.	3
621	13	3	173	3	7	179	11	.	3	23	3	.	.	3	.	3	.	.	29	19
22	.	17	.	7	3	.	3	.	43	3	11	3	13	.	7	109	3	67	3	11
23	3	.	3	13	.	3	101	3	7	.	.	157	3	83	3	17	31	3	.	3
24	.	3	17	3	139	13	.	7	3	.	3	163	149	3	29	3	17	41	7	197
25	.	7	.	17	3	11	3	101	103	3	31	3	7	.	23	.	3	13	3	.
626	3	.	3	137	17	3	.	3	13	11	.	7	3	.	3	.	37	3	13	3
27	.	3	73	3	11	7	59	19	3	.	3	149	.	3	43	3	7	.	17	131
28	.	13	181	107	3	23	3	.	11	3	.	3	83	19	31	7	3	11	3	17
29	3	.	3	7	53	3	17	3	.	7	.	.	3	13	3	.	113	3	19	3
30	251	3	7	3	13	61	29	11	3	19	3	.	.	3	13	3	11	23	67	7
631	89	.	11	223	3	.	3	7	17	3	.	3	.	7	19	103	3	233	3	.
32	3	7	3	31	.	3	7	3	191	17	23	53	3	37	3	11	.	3	.	3
33	7	3	29	3	.	.	.	23	3	13	3	7	.	3	.	3	97	7	.	11
34	13	19	163	.	3	7	3	.	.	3	7	3	137	229	11	.	3	.	3	67
35	3	11	3	41	7	3	19	3	.	139	.	17	3	.	3	7	.	3	11	3
636	.	3	.	3	.	11	.	113	3	7	3	.	17	3	7	3	23	31	.	.
37	11	.	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	101	17	.	13	3	.	3	7
38	3	.	3	.	11	3	13	3	19	.	83	29	3	7	3	.	.	3	7	3
39	.	3	.	3	79	.	7	41	3	97	3	.	7	3	17	3	43	11	13	.
40	7	29	.	11	3	.	3	.	73	3	43	3	11	.	.	17	3	7	3	19
641	3	13	3	.	61	3	97	3	37	.	7	13	3	59	3	31	7	3	23	3
42	19	3	11	3	7	157	.	149	3	.	3	11	.	3	.	3	227	17	41	47
43	.	.	107	7	3	73	3	.	131	3	.	3	23	.	7	11	3	37	3	229
44	3	.	3	29	41	3	37	3	7	23	11	19	3	.	3	.	13	3	17	3
45	53	3	251	3	31	.	149	7	3	113	3	173	47	3	11	3	233	19	7	17
646	.	7	23	.	3	.	3	19	.	3	.	3	7	.	109	37	3	127	3	13
47	3	89	3	.	163	3	.	3	61	59	13	7	3	19	3	41	101	3	.	3
48	11	3	229	3	.	7	.	53	3	11	3	241	13	3	23	3	7	61	19	.
49	.	41	47	13	3	139	3	.	.	3	.	3	29	11	.	7	3	101	3	107
50	3	.	3	7	.	3	79	3	11	7	.	.	3	.	3	13	193	3	29	3
651	.	3	7	3	.	19	13	.	3	.	3	.	11	3	53	3	.	13	.	7
52	113	.	197	61	3	.	3	7	13	3	19	3	37	7	89	.	3	53	3	71
53	3	7	3	.	241	3	7	3	83	.	.	11	3	79	3	223	19	3	101	3
54	7	3	.	3	149	.	11	.	3	.	3	7	59	3	.	3	31	7	.	.
55	17	31	13	109	3	7	3	.	.	3	7	3	19	13	.	.	3	.	3	11
656	3	17	3	.	7	3	.	3	211	137	29	.	3	.	3	7	41	3	.	3
57	.	.	.	3	23	.	.	.	3	.	3	.	.	3	7	3	13	29	11	37
58	29	23	7	.	3	11	3	13	7	3	.	3	.	43	.	.	3	.	3	7
59	3	59	3	17	19	3	29	3	.	11	.	.	3	7	3	233	23	3	7	3
660	13	3	149	3	11	251	7	107	3	103	3	.	7	3	.	3	.	211		257
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
601	7	3	43	3		17	.	.	3	19	3	7	11	3	139	3	23	7	17	37
02	.	89	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3	13	23	19	.	3	.	3	17
03	3	.	3	13	7	3	17	3	73	.	173	11	3	.	3	7	131	3	.	3
04	61	3	.	3	103	13	11	17	3	7	3	197	31	3	7	3	241	.	.	101
05	151	19	7	23	3	71	3	37	7	3	11	3	29	47	43	.	3	13	3	7
606	3	131	3	.	.	3	19	3	13	17	47	.	3	7	3	.	137	3	7	3
07	79	3	.	3	.	.	7	67	3	.	3	.	7	3	89	3	31	.	11	163
08	7	13	19	.	3	11	3	.	29	3	17	3	23	107	.	.	3	7	3	.
09	3	.	3	47	.	3	41	3	19	11	7	17	3	13	3	71	7	3	181	3
10	.	3	.	3	7	227	79	173	3	157	3	103	17	3	13	3	.	199	107	.
611	.	.	23	7	3	31	3	.	11	3	131	3	193	17	7	43	3	11	3	19
12	3	.	3	11	.	3	197	3	7	71	29	233	3	.	3	167	.	3	.	3
13	19	3	.	3	43	.	109	7	3	13	3	.	.	3	17	3	11	29	7	13
14	13	7	11	41	3	.	3	.	.	3	13	3	7	.	.	17	3	.	3	89
15	3	.	3	.	.	3	11	3	23	67	139	7	3	.	3	11	17	3	31	3
616	.	3	.	3	197	7	.	83	3	.	3	37	.	3	.	3	7	17	103	11
17	.	37	.	151	3	13	3	19	223	3	163	3	.	31	11	7	3	61	3	29
18	3	11	3	7	.	3	13	3	.	7	43	.	3	19	3	199	59	3	11	3
19	41	3	7	3	.	11	.	31	3	29	3	.	.	3	.	3	.	47	13	7
20	11	.	.	229	3	53	3	7	.	3	23	3	.	7	47	29	3	31	3	.
621	3	7	3	61	11	3	7	3	.	79	97	13	3	11	3	.	.	3	37	3
22	7	3	13	3	23	19	71	73	3	.	3	7	61	3	199	3	167	7	.	.
23	.	23	127	11	3	7	3	47	97	3	7	3	11	.	13	89	3	43	3	23
24	3	19	3	.	7	3	.	3	179	.	.	43	3	.	3	7	11	3	.	3
25	71	3	11	3	73	.	19	13	3	7	3	11	.	3	7	3	.	53	.	59
626	31	.	7	.	3	223	3	29	7	3	233	3	19	.	.	11	3	71	3	7
27	3	.	3	97	.	3	23	3	41	.	11	67	3	7	3	37	.	3	7	3
28	.	3	239	3	.	37	7	.	3	.	3	227	7	3	11	3	61	109	.	31
29	7	11	157	13	3	79	3	.	.	3	71	3	.	.	.	.	3	7	3	73
30	3	17	3	.	19	3	.	3	59	.	7	.	3	199	3	13	7	3	.	3
631	11	3	137	3	7	83	13	181	3	11	3	.	23	3	179	3	29	13	.	.
32	19	43	17	7	3	41	3	151	13	3	.	3	.	11	7	19	3	167	3	.
33	3	.	3	17	.	3	.	3	7	127	.	61	3	241	3	.	.	3	.	3
34	107	3	23	3	17	.	.	7	3	.	3	13	11	3	.	3	173	.	7	.
35	103	7	13	.	3	17	3	11	151	3	.	3	7	13	.	.	3	19	3	.
636	3	53	3	.	13	3	.	3	.	41	37	7	3	43	3	.	.	3	.	3
37	37	3	103	3	.	7	11	43	3	.	3	23	.	3	227	3	7	.	131	.
38	67	.	.	19	3	.	3	13	23	3	11	3	127	193	29	7	3	181	3	11
39	3	31	3	7	167	3	47	3	17	7	.	137	3	109	3	61	89	3	.	3
40	13	3	7	3	29	.	.	79	3	17	3	139	.	3	19	3	.	107	11	7
641	.	.	.	83	3	11	3	7	.	3	29	3	13	7	.	.	3	23	3	43
42	3	7	3	13	179	3	7	3	.	11	17	.	3	.	3	53	239	3	113	3
43	7	3	139	3	11	13	191	59	3	.	3	7	.	3	31	3	19	7	71	.
44	.	.	43	73	3	7	3	23	11	3	7	3	17	.	59	.	3	11	3	.
45	3	.	3	11	7	3	.	3	13	31	.	.	3	17	3	7	.	3	13	3
646	17	3	19	3	.	.	.	11	3	7	3	.	71	3	7	3	11	.	31	23
47	73	13	7	31	3	.	3	239	7	3	211	3	.	.	17	67	3	.	3	7
48	3	.	3	79	37	3	11	3	.	29	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3
49	.	3	17	3	13	167	7	.	3	43	3	181	7	3	13	3	17	103	.	11
50	7	.	67	17	3	.	3	31	.	3	59	3	151	37	11	.	3	7	3	.
651	3	11	3	23	17	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	19	7	3	11	3
52	23	3	.	3	7	11	.	.	3	13	3	29	97	3	.	3	109	.	17	13
53	11	.	.	7	3	163	3	131	.	3	13	3	.	151	7	23	3	.	3	17
54	3	29	3	67	11	3	17	3	7	233	41	.	3	11	3	43	79	3	.	3
55	.	3	.	3	53	.	173	7	3	23	3	.	.	3	.	3	107	11	7	.
656	.	7	.	11	3	13	3	97	17	3	.	3	7	19	.	13	3	179	3	.
57	3	47	3	19	.	3	13	3	89	17	.	7	3	157	3	.	11	3	19	3
58	.	3	11	3	67	7	.	199	3	19	3	11	.	3	41	3	7	131	13	.
59	.	101	.	71	3	.	3	41	37	3	17	3	.	.	19	7	3	.	3	31
660	3	13	3	7	31	3	.	3	.	7	11	13	3	.	3	.	29	3	157	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
661	7	.	.	.	3	17	3	37	11	3	89	3	13	41	.	19	3	7	3	29
62	3	239	3	11	73	3	23	3	.	47	7	103	3	107	3	.	7	3	31	3
63	.	3	61	3	7	13	17	11	3	29	3	19	113	3	.	3	11	.	.	43
64	23	.	11	7	3	.	3	17	127	3	181	3	.	31	7	29	3	13	3	.
65	3	73	3	.	227	3	11	3	7	.	71	.	3	.	3	11	.	3	13	3
666	.	3	43	3	59	29	.	7	3	17	3	.	23	3	37	3	103	.	7	11
67	.	7	41	19	3	.	3	137	.	3	53	3	7	.	11	.	3	31	3	.
68	3	11	3	.	71	3	109	3	.	19	17	7	3	13	3	89	.	3	11	3
69	149	3	23	3	13	7	61	.	3	.	3	17	.	3	13	3	7	.	.	.
70	11	.	37	113	3	19	3	29	.	3	97	3	17	.	43	7	3	.	3	.
671	3	.	3	7	11	3	41	3	.	7	19	.	3	11	3	.	.	3	83	3
72	17	3	7	3	.	.	.	.	3	13	3	23	.	3	71	3	19	11	.	7
73	13	17	.	11	3	83	3	7	23	3	13	3	11	7	17	.	3	.	3	.
74	3	7	3	.	.	3	7	3	.	191	.	.	3	.	3	17	11	3	.	3
75	7	3	11	3	.	181	107	251	3	.	3	7	.	3	.	3	17	7	.	31
676	.	67	.	17	3	7	3	.	19	3	7	3	.	47	239	11	3	17	3	61
77	3	79	3	.	7	3	13	3	241	.	11	89	3	.	3	7	.	3	37	3
78	.	3	.	3	19	17	73	.	3	7	3	.	29	3	7	3	179	.	13	19
79	.	11	7	59	3	113	3	23	7	3	.	3	.	.	41	.	3	.	3	7
80	3	13	3	47	23	3	17	3	251	.	59	13	3	7	3	19	.	3	7	3
681	11	3	13	3	.	.	7	17	3	11	3	193	7	3	61	3	.	83	.	23
82	7	241	.	.	3	.	3	.	17	3	.	3	31	11	13	.	3	7	3	139
83	3	167	3	83	.	3	53	3	11	17	7	.	3	23	3	37	7	3	41	3
84	73	3	67	3	7	37	31	13	3	53	3	41	11	3	.	3	89	.	.	.
85	.	61	.	7	3	131	3	11	.	3	17	3	.	19	7	.	3	.	3	13
686	3	31	3	19	.	3	59	3	7	163	13	11	3	.	3	.	83	3	19	3
87	23	3	127	3	.	.	11	7	3	19	3	.	13	3	.	3	53	.	7	.
88	107	7	83	13	3	.	3	.	.	3	11	3	7	17	19	23	3	43	3	11
89	3	.	3	.	137	3	.	3	41	157	.	7	3	29	3	13	71	3	.	3
90	.	3	151	3	.	7	13	.	3	23	3	.	.	3	17	3	7	13	11	29
691	43	19	29	.	3	11	3	.	13	3	.	3	73	257	47	7	3	.	3	.
92	3	.	3	7	67	3	19	3	.	7	37	107	3	.	3	.	17	3	.	3
93	37	3	7	3	11	.	.	103	3	181	3	13	19	3	.	3	.	17	31	7
94	.	.	13	31	3	41	3	7	11	3	.	3	.	7	23	.	3	11	3	37
95	3	7	3	11	13	3	7	3	19	37	251	23	3	31	3	.	197	3	17	3
696	7	3	47	3	151	67	43	11	3	.	3	7	179	3	83	3	11	7	257	17
97	47	43	11	.	3	7	3	13	113	3	7	3	103	137	.	.	3	97	3	19
98	3	29	3	.	7	3	11	3	.	13	.	.	3	.	3	7	211	3	.	3
99	13	3	53	3	.	151	139	29	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	113	11
700	.	.	7	.	3	53	3	.	7	3	239	3	13	59	11	.	3	89	3	7
701	3	11	3	13	.	3	.	3	.	.	23	19	3	7	3	.	.	3	7	3
02	.	3	.	3	61	11	7	23	3	.	3	.	7	3	.	3	.	19	199	.
03	7	229	167	.	3	.	3	19	.	3	.	3	53	61	37	31	3	7	3	103
04	3	23	3	181	11	3	67	3	13	.	7	.	3	11	3	.	7	3	13	3
05	.	3	.	3	7	107	151	97	3	109	3	.	251	3	.	3	23	11	19	.
706	17	13	.	7	3	241	3	.	.	3	.	3	11	23	7	.	3	41	3	31
07	3	17	3	.	31	3	.	3	7	197	107	.	3	13	3	127	11	3	263	3
08	101	3	11	3	13	19	23	7	3	.	3	11	193	3	13	3	.	.	7	.
09	.	7	17	23	3	.	3	.	.	3	19	3	7	89	.	11	3	61	3	.
10	3	19	3	17	.	3	47	3	29	.	11	7	3	251	3	.	19	3	23	3
711	97	3	211	3	17	7	19	.	3	13	3	.	83	3	11	3	7	.	.	13
12	13	11	31	.	3	17	3	229	67	3	13	3	19	.	.	7	3	191	3	.
13	3	113	3	7	29	3	.	3	73	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
14	11	3	7	3	.	.	17	.	3	11	3	.	61	3	.	3	199	.	37	7
15	127	.	23	43	3	13	3	7	37	3	.	3	233	7	.	13	3	29	3	.
716	3	7	3	101	19	3	7	3	11	67	41	83	3	.	3	71	31	3	.	3
17	7	3	.	3	.	.	29	.	3	17	3	7	11	3	23	3	.	7	13	157
18	19	59	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3	109	29	.	19	3	.	3	.
19	3	13	3	.	7	3	.	3	23	71	17	11	3	.	3	7	.	3	.	3
720	89	3	13	3	107	23	11	.	3	7	3	17	.	3	7	3	61	.	.	109
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
661	83	3	7	3	.	109	127	.	3	.	3	.	17	3	11	3	.	37	53	7
62	97	11	59	173	3	23	3	7	.	3	191	3	79	7	13	151	3	.	3	167
63	3	7	3	.	.	3	7	3	31	.	.	41	3	.	3	197	13	3	67	3
64	7	3	.	3	41	.	.	13	3	11	3	7	19	3	17	3	.	7	29	.
65	61	.	19	101	3	7	3	.	.	3	7	3	139	11	.	17	3	.	3	13
666	3	.	3	191	7	3	163	3	11	61	13	131	3	.	3	7	17	3	.	3
67	.	3	241	3	101	.	179	23	3	7	3	43	11	3	7	3	.	17	.	67
68	.	.	7	13	3	.	3	11	7	3	.	3	47	.	211	.	3	151	3	7
69	3	23	3	.	29	3	167	3	193	.	.	11	3	7	3	13	31	3	7	3
70	19	3	.	3	.	199	7	47	3	.	3	.	7	3	73	3	23	13	229	17
671	7	.	.	239	3	47	3	.	13	3	11	3	.	23	.	.	3	7	3	11
72	3	109	3	103	.	3	137	3	.	.	7	19	3	61	3	.	7	3	173	3
73	47	3	193	3	7	31	23	.	3	89	3	13	43	3	79	3	.	19	11	.
74	37	.	13	7	3	11	3	19	109	3	.	3	.	13	7	.	3	.	3	.
75	3	43	3	.	13	3	.	3	7	11	.	.	3	19	3	.	257	3	23	3
676	.	3	29	3	11	71	157	7	3	31	3	.	53	3	113	3	13	139	7	.
77	.	7	.	.	3	.	3	13	11	3	.	3	7	.	53	.	3	11	3	151
78	3	.	3	11	79	3	.	3	67	13	103	7	3	.	3	29	.	3	43	3
79	13	3	.	3	.	7	.	11	3	101	3	.	157	3	.	3	7	.	97	53
80	17	.	11	.	3	29	3	43	.	3	19	3	13	103	.	7	3	149	3	.
681	3	17	3	7	.	3	11	3	.	7	79	29	3	41	3	11	19	3	47	3
82	131	3	7	3	.	13	19	233	3	67	3	.	.	3	23	3	47	31	163	7
83	.	29	17	197	3	137	3	7	.	3	101	3	19	7	11	.	3	13	3	.
84	3	7	3	17	223	3	7	3	13	.	.	31	3	.	3	.	.	3	11	3
85	7	3	179	3	17	11	.	191	3	47	3	7	.	3	107	3	113	7	.	181
686	11	13	71	.	3	7	3	.	43	3	7	3	173	.	.	149	3	73	3	.
87	3	197	3	29	7	3	.	3	.	97	.	109	3	11	3	7	.	3	89	3
88	31	3	37	3	13	.	17	61	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	.
89	19	53	7	11	3	.	3	17	7	3	23	3	11	101	149	19	3	.	3	7
90	3	199	3	53	.	3	.	3	17	.	67	37	3	7	3	59	11	3	7	3
691	.	3	11	3	23	.	7	263	3	13	3	11	7	3	43	3	.	.	.	13
92	7	23	.	.	3	.	3	113	53	3	13	3	29	79	193	11	3	7	3	23
93	3	223	3	43	139	3	71	3	.	173	7	.	3	.	3	.	7	3	29	3
94	199	3	.	3	7	.	.	137	3	.	3	17	.	3	11	3	.	.	.	.
95	157	11	.	7	3	13	3	73	29	3	41	3	17	149	7	13	3	.	3	79
696	3	.	3	41	.	3	13	3	7	19	.	59	3	17	3	227	.	3	.	3
97	11	3	79	3	.	.	.	7	3	11	3	.	31	3	19	3	101	71	7	223
98	23	7	.	.	3	19	3	109	107	3	.	3	7	11	17	47	3	37	3	.
99	3	13	3	.	43	3	31	3	11	167	19	7	3	47	3	17	.	3	.	3
700	.	3	13	3	.	7	.	41	3	79	3	.	11	3	109	3	7	29	191	.
701	29	31	.	17	3	.	3	11	47	3	.	3	.	.	13	7	3	17	3	.
02	3	163	3	7	17	3	29	3	.	7	31	11	3	67	3	.	13	3	.	3
03	.	3	7	3	71	17	11	13	3	.	3	.	.	3	59	3	43	.	17	7
04	.	47	.	.	3	31	3	7	19	3	11	3	.	7	.	.	3	157	3	11
05	3	7	3	37	41	3	7	3	.	.	13	163	3	.	3	.	73	3	227	3
706	7	3	.	3	19	.	.	17	3	29	3	7	13	3	.	3	223	7	11	19
07	139	.	173	13	3	7	3	.	17	3	7	3	37	.	71	29	3	.	3	83
08	3	.	3	59	7	3	.	3	131	11	.	.	3	73	3	7	.	3	31	3
09	.	3	.	3	11	29	13	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	13	.	.
10	227	41	7	.	3	179	3	.	7	3	17	3	.	31	67	.	3	11	3	7
711	3	.	3	11	.	3	.	3	.	103	109	17	3	7	3	257	.	3	7	3
12	43	3	.	3	.	.	7	11	3	263	3	13	7	3	.	3	11	.	83	37
13	7	.	11	.	3	.	3	23	149	3	137	3	41	13	.	.	3	7	3	.
14	3	.	3	19	13	3	11	3	.	.	7	.	3	.	3	11	7	3	19	3
15	.	3	163	3	7	.	59	.	3	19	3	31	47	3	17	3	13	.	.	11
716	137	79	131	7	3	.	3	13	.	3	229	3	43	97	7	17	3	.	3	.
17	3	11	3	73	.	3	43	3	7	13	.	179	3	23	3	.	17	3	11	3
18	13	3	181	3	.	11	.	7	3	41	3	.	.	3	.	3	29	17	7	.
19	11	7	47	227	3	.	3	79	.	3	167	3	7	.	.	193	3	.	3	.
720	3	.	3	13	11	3	19	3	97	.	.	7	3	11	3	.	.	3	17	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
721	.	.	7	.	3	37	3	41	7	3	11	3	17	53	13	.	3	19	3	7
22	3	103	3	103	.	3	257	3	.	.	.	.	3	7	3	29	13	3	7	3
23	17	3	.	3	167	.	7	13	3	31	3	151	7	3	.	3	.	73	11	71
24	7	17	61	19	3	11	3	139	.	3	23	3	.	113	17	107	3	7	3	13
25	3	.	3	31	59	3	127	3	47	11	7	29	3	.	3	17	7	3	.	3
726	79	3	17	3	7	.	.	101	3	.	3	59	13	3	19	3	17	.	.	.
27	.	23	.	7	3	19	3	.	11	3	.	3	257	.	7	.	3	11	3	23
28	3	47	3	11	17	3	.	3	7	.	19	67	3	173	3	13	23	3	97	3
29		3	.	3	.	17	13	7	3	.	3	233	.	3	.	3	11	13	7	.
30	37	7	11	.	3	.	3	.	13	3	103	3	7	199	.	.	3	.	3	17
731	3	41	3	29	113	3	11	3		83	.	7	3	.	3	11	.	3	193	3
32	71	3	19	3	179	7	211	17	3	37	3	13	67	3	.	3	7	.	89	11
33	23	.	13	.	3	167	3	157	17	3	.	3	.	13	11	7	3	71	3	41
34	3	11	3	7	13	3	.	3	.	7	101	97	3	.	3	23	271	3	11	3
35	31	3	7	3	19	11	.	37	3	.	3	.	23	3	151	3	13	251	.	7
736	11	89	.	.	3	.	3	7	83	3	17	3	29	7	.	211	3	.	3	47
37	3	7	3	.	11	3	7	3	.	13	.	17	3	11	3	19	37	3	29	3
38	7	3	23	3	31	223	97	.	3	.	3	7	17	3	47	3	41	7	.	.
39	67	263	.	11	3	7	3	193	29	3	7	3	11	17	107	.	3	.	3	73
40	3	43	3	13	7	3	.	3	.	79	.	181	3	101	3	7	11	3	.	3
741	.	3	11	3	37	13	137	19	3	7	3	11	.	3	7	3	151	.	53	.
42	.	.	7	.	3	47	3	.	7	3	199	3	.	19	61	11	3	13	3	7
43	3	67	3	19	.	3	.	3	13	.	11	239	3	7	3	79	17	3	7	3
44	47	3	37	3	.	.	7	.	3	19	3	263	7	3	11	3	.	17	109	.
45	7	11	.	.	3	269	3	43	.	3	.	3	.	73	19	131	3	7	3	127
746	3	61	3	.	.	3	29	3	71	.	7	37	3	13	3	101	7	3	17	3
47	11	3	.	3	7	.	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3	31	41	.	17
48	131	19	239	7	3	79	3	23	.	3	.	3	.	11	7	67	3	.	3	29
49	3	.	.	173	23	3	19	3	7	.	31	.	3	.	3	137	.	3	149	3
50	179	3	107	3	.	.	.	7	3	13	3	.	11	3	.	3	.	101	7	13
751	13	7	19	.	3	31	3	11	43	3	13	3	7	.	227	29	3	163	3	.
52	3	157	3	.	.	3	.	3	19	.	.	7	3	23	3	.	67	3	47	3
53	257	3	.	3	127	7	11	109	3	.	3	.	71	3	.	3	7	59	.	151
54	.	.	.	73	3	13	3	53	199	3	11	3	.	241	.	7	3	37	3	11
55	3	.	3	7	.	3	13	3	.	7	.	47	3	.	3	.	.	3	31	3
756	19	3	7	3	.	83	.	.	3	47	3	.	53	3	43	3	.	67	11	7
57	17	.	.	.	3	11	3	7	.	3	41	3	.	7	53	23	3	.	3	211
58	3	7	3	41	47	3	7	3	.	11	191	13	3	.	3	181	149	3	73	3
59	7	3	13	3	11	.	89	31	3	23	3	7	.	3	.	3	.	7	173	53
60	.	.	17	29	3	7	3	19	11	3	7	3	.	139	13	.	3	11	3	113
761	3	.	3	11	7	3	103	3	163	.	269	.	3	19	3	7	13	3	.	3
62	181	3	.	3	17	.	199	11	3	7	3	31	.	3	7	3	11	.	19	.
63	41	.	7	137	3	17	3	167	7	3	127	3	37	.	23	97	3	.	3	7
64	3	.	3	109	43	3	11	3	.	.	13	23	3	7	3	11	.	3	7	3
65	113	3	.	3	.	19	7	.	3	59	3	103	7	3	.	3	.	.	41	11
766	7	.	.	13	3	23	3	17	193	3	19	3	.	197	11	173	3	7	3	.
67	3	11	3	79	41	3	.	3	17	73	7	277	3	.	3	13	7	3	11	3
68	.	3	89	3	7	11	13	.	3	17	3	.	.	3	.	3	43	13	.	31
69	11	53	.	7	3	.	3	.	13	3	43	3	19	107	7	47	3	.	3	.
70	3	.	3	53	11	3	.	3	7	.	17	.	3	11	3	41	.	3	.	3
771	.	3	83	3	29	59	67	7	3	233	3	13	137	3	.	3	.	11	7	179
72	.	7	13	11	3	.	3	37	31	3	29	3	7	13	.	.	3	.	3	.
73	3	23	3	97	13	3	.	3	167	.	53	7	3	17	3	.	11	3	.	3
74	17	3	11	3	199	7	.	.	3	139	3	11	.	3	211	3	7	43	.	41
75	19	17	179	.	3	.	3	13	.	3	.	3	31	23	17	7	3	.	3	.
776	3	71	3	7	.	3	.	3	.	7	11	149	3	29	3	17	.	3	.	3
77	13	3	7	3	.	.	23	.	3	.	3	19	.	3	11	3	17	.	.	7
78	.	11	29	17	3	.	3	17	59	3	223	3	13	7	277	.	3	17	3	.
79	3	7	3	13	17	3	7	3	67	29	149	.	3	.	3	59	41	3	23	3
780	7	3	.	3	181	13	.	61	3	11	3	7	.	3	73	3	.	7	17	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
721	23	3	59	3	.	7	.	.	3	.	3	89	19	3	37	3	7	11	23	17
22	.	.	19	11	3	127	3	.	.	3	.	3	11	41	.	7	3	13	3	197
23	3	.	3	7	269	3	.	3	13	7	157	.	3	.	3	191	11	3	13	3
24	53	3	7	3	.	233	.	.	3	23	3	11	.	3	173	3	71	.	.	7
25	.	13	37	.	3	149	3	7	31	3	.	3	181	7	29	11	3	229	3	19
726	3	7	3	113	.	3	7	3	.	.	11	.	3	13	3	.	157	3	139	3
27	7	3	31	3	13	.	.	53	3	61	3	7	73	3	11	3	83	7	.	43
28	263	11	41	.	3	7	3	.	.	3	7	3	31	.	23	.	3	.	3	269
29	3	.	3	.	7	3	131	3	43	.	.	19	3	59	3	7	47	3	.	3
30	11	3	43	3	.	.	31	89	3	7	3	.	107	3	7	3	.	19	67	13
731	13	191	7	149	3	23	3	19	7	3	13	3	.	11	163	.	3	53	3	7
32	3	17	3	.	61	3	41	3	11	47	.	127	3	7	3	83	.	3	7	3
33	.	3	109	3	.	.	7	.	3	239	3	.	7	3	.	3	79	23	19	29
34	7	.	17	.	3	13	3	11	.	3	.	3	197	.	43	13	3	7	3	67
35	3	.	3	17	.	3	13	3	.	29	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3
736	.	3	73	3	7	19	11	23	3	.	3	.	.	3	31	3	59	.	13	.
37	.	131	.	7	3	17	3	71	.	3	11	3	89	.	7	113	3	109	3	11
38	3	13	3	.	233	3	.	3	7	31	.	13	3	.	3	37	19	3	.	3
39	.	3	13	3	.	37	17	7	3	.	3	29	167	3	241	3	23	61	7	.
40	.	7	103	31	3	11	3	17	.	3	.	3	7	23	13	43	3	.	3	.
741	3	29	3	.	.	3	.	3	17	11	.	7	3	31	3	.	13	3	.	3
42	41	3	.	3	11	7	23	13	3	17	3	.	59	3	.	3	7	.	.	191
43	149	.	.	23	3	.	3	31	11	3	.	3	.	.	73	7	3	11	3	13
44	3	.	3	7	19	3	113	3	.	7	13	71	3	211	3	.	163	3	23	3
45	.	3	7	3	.	173	.	11	3	.	3	17	13	3	.	3	11	97	.	7
746	19	.	11	13	3	197	3	7	89	3	53	3	17	7	.	19	3	113	3	.
47	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	37	.	3	17	3	11	29	3	.	3
48	7	3	.	3	.	43	13	.	3	.	3	7	103	3	.	3	.	7	.	11
49	241	17	23	.	3	7	3	61	13	3	7	3	97	167	11	31	3	19	3	37
50	3	11	3	47	7	3	271	3	41	37	193	.	3	.	3	7	61	3	11	3
751	223	3	17	3	.	11	.	.	3	7	3	13	.	3	7	3	17	.	29	139
52	11	.	7	17	3	73	3	.	7	3	.	3	83	13	79	.	3	17	3	7
53	3	.	3	179	11	3	.	3	23	19	.	43	3	7	3	.	.	3	7	3
54	197	3	61	3	59	17	7	163	3	71	3	.	7	3	19	3	13	11	17	103
55	7	.	.	11	3	19	3	13	.	3	.	3	11	.	131	269	3	7	3	17
756	3	.	3	.	29	3	17	3	31	13	7	.	3	.	3	.	7	3	59	3
57	13	3	11	3	7	239	.	17	3	.	3	11	.	3	.	3	19	.	.	229
58	101	.	31	7	3	107	3	.	17	3	23	3	13	.	7	11	3	29	3	71
59	3	151	3	13	37	3	.	3	7	17	11	.	3	.	3	.	.	3	.	3
60	59	3	19	3	23	13	29	7	3	127	3	.	.	3	11	3	.	47	7	.
761	271	7	.	.	3	.	3	59	19	3	17	3	7	29	47	61	3	13	3	23
62	3	.	3	.	.	3	53	3	13	89	83	7	3	.	3	.	23	3	13	3
63	11	3	29	3	19	7	.	.	3	11	3	.	17	3	.	3	7	79	241	19
64	89	13	101	157	3	.	3	47	.	3	31	3	.	11	.	7	3	.	3	227
65	3	37	3	7	.	3	23	3	11	7	73	.	3	13	3	19	191	3	.	3
766	.	3	7	3	13	31	.	43	3	.	3	.	11	3	13	3	53	271	.	7
67	23	.	.	59	3	29	3	7	.	3	.	3	.	7	31	17	3	41	3	61
68	3	7	3	151	101	3	7	3	.	.	59	11	3	.	3	23	17	3	131	3
69	7	3	41	3	.	.	11	19	3	13	3	7	23	3	167	3	.	7	37	13
70	13	29	251	263	3	7	3	.	37	3	7	3	.	19	157	127	3	.	3	11
771	3	.	3	19	7	3	.	3	.	229	71	113	3	79	3	7	.	3	17	3
72	67	3	23	3	.	.	.	.	3	7	3	.	109	3	7	3	.	37	11	17
73	.	103	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	223	.	19	13	3	193	3	7
74	3	73	3	29	71	3	13	3	.	11	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3
75	.	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	23	7	3	.	3	.	31	13	73
776	7	19	79	.	3	37	3	101	11	3	173	3	.	131	.	.	3	7	3	.
77	3	13	3	11	.	3	19	3	83	.	7	13	3	.	3	107	7	3	.	3
78	127	3	13	3	7	.	.	11	3	43	3	47	19	3	71	3	11	.	61	.
79	.	137	11	7	3	53	3	.	103	3	.	3	29	.	7	167	3	23	3	.
780	3	89	3	.	251	3	11	3	7	101	163	.	3	113	3	11	13	3	29	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	9	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
781	.	83	37	19	3	7	3	191	.	3	7	3	23	11	.	.	3	13	3	17
82	3	.	3	197	7	3	17	3	11	19	137	.	3	.	3	7	.	3	13	3
83	.	3	.	3	.	71	.	17	3	7	3	29	11	3	7	3	.	157	.	47
84	.	13	7	89	3	19	3	11	7	3	.	3	107	41	.	.	3	47	3	7
85	3	29	3	.	.	3	.	3	233	17	19	11	3	7	3	.	.	3	7	3
786	83	3	.	3	13	127	7	29	3	.	3	61	7	3	13	3	19	.	31	.
87	7	211	.	31	3	.	3	223	.	3	11	3	131	43	.	71	3	7	3	11
88	3	.	3	.	53	3	269	3	23	.	7	17	3	31	3	.	7	3	37	3
89	.	3	19	3	7	23	53	.	3	13	3	.	17	3	193	3	.	89	11	13
90	13	199	41	7	3	11	3	31	19	3	13	3	.	17	7	.	3	.	3	137
791	3	.	3	239	.	3	61	3	7	11	67	53	3	.	3	.	29	3	.	3
92	.	3	103	3	11	113	37	7	3	227	3	.	.	3	17	3	.	109	7	19
93	.	7	71	.	3	13	3	.	11	3	23	3	7	.	.	13	3	11	3	.
94	3	271	3	11	.	3	13	3	43	.	.	7	3	.	3	19	17	3	53	3
95	107	3	43	3	23	7	131	11	3	281	3	67	.	3	.	3	7	17	13	.
796	.	23	11	.	3	.	3	103	.	3	.	3	.	.	97	7	3	73	3	23
97	3	13	3	7	79	3	11	3	29	7	61	13	3	71	3	11	23	3	17	3
98	.	3	7	3	.	.	.	19	3	.	3	.	97	3	29	3	.	.	.	7
99	.	.	.	41	3	157	3	7	229	3	257	3	67	7	11	.	3	.	3	31
800	3	7	3	19	29	3	7	3	.	43	79	191	3	163	3	.	13	3	11	3
801	7	3	.	3	.	11	113	13	3	19	3	7	227	3	127	3	.	7	.	.
02	11	139	.	.	3	7	3	97	.	3	7	3	.	.	19	.	3	29	3	13
03	3	131	3	.	7	3	.	3	31	47	13	.	3	11	3	7	.	3	.	3
04	37	3	.	3	191	97	29	137	3	7	3	.	13	3	7	3	257	11	.	.
05	79	19	7	11	3	.	3	73	7	3	.	3	11	29	.	43	3	239	3	7
806	3	.	3	149	.	3	19	3	.	37	.	.	3	7	3	13	11	3	7	3
07	.	3	11	3	43	.	7	53	3	89	3	11	7	3	.	3	263	13	.	.
08	7	.	19	.	3	211	3	.	13	3	131	3	.	.	229	11	3	7	3	.
09	3	17	3	.	.	3	.	3	19	.	7	.	3	.	3	29	7	3	61	3
10	.	3	59	3	7	.	.	.	3	.	3	13	.	3	11	3	.	.	.	.
811	.	11	13	7	3	29	3	.	23	3	31	3	.	13	7	41	3	53	3	19
12	3	.	3	17	13	3	241	3	7	.	43	29	3	.	3	.	137	3	113	3
13	11	3	.	3	17	31	233	7	3	11	3	167	.	3	163	3	13	.	7	.
14	.	7	127	.	3	17	3	13	.	3	107	3	7	11	31	.	3	23	3	79
15	3	149	3	.	37	3	.	3	11	13	.	7	3	.	3	67	73	3	.	3
816	13	3	79	3	.	7	17	.	3	31	3	.	11	3	.	3	7	19	.	.
17	.	.	.	101	3	41	3	11	71	3	.	3	13	37	.	7	3	43	3	.
18	3	179	3	7	23	3	.	3	17	7	47	11	3	19	3	.	223	3	.	3
19	.	3	7	3	101	13	11	.	3	17	3	.	.	3	.	3	67	.	19	7
20	43	.	.	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	.	.	3	13	3	11
821	3	7	3	47	157	3	7	3	13	41	17	.	3	23	3	.	.	3	13	3
22	7	3	.	3	229	19	.	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	11	233
23	.	13	.	53	3	7	3	263	191	3	7	3	17	281	137	.	3	67	3	.
24	3	19	3	23	7	3	73	3	.	11	139	31	3	13	3	7	19	3	29	3
25	17	3	.	3	11	109	19	179	3	7	3	.	.	3	7	3	59	197	23	.
826	.	17	7	.	3	.	3	.	7	3	53	3	19	.	17	23	3	11	3	7
27	3	191	3	11	107	3	181	3	.	.	.	.	3	7	3	17	97	3	7	3
28	31	3	17	3	.	.	7	11	3	13	3	113	7	3	.	3	11	37	.	13
29	7	.	11	17	3	.	3	283	101	3	13	3	127	239	197	.	3	7	3	109
30	3	.	3	.	17	3	11	3	61	.	7	79	3	43	3	11	7	3	.	3
831	.	3	41	3	7	17	.	43	3	101	3	97	59	3	.	3	71	29	17	11
32	19	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	.	.	7	13	3	.	3	17
33	3	11	3	227	.	3	13	3	7	97	103	23	3	167	3	.	.	3	11	3
34	.	3	.	3	239	11	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	181	.	7	.
35	11	7	113	37	3	23	3	47	17	3	101	3	7	103	.	139	3	19	3	29
836	3	13	3	.	11	3	.	3	.	17	241	7	3	11	3	.	.	3	233	3
37	.	3	13	3	97	7	.	.	3	29	3	101	31	3	.	3	7	11	83	89
38	47	181	43	11	3	.	3	79	109	3	17	3	11	.	13	7	3	.	3	191
39	3	.	3	7	.	3	31	3	.	7	23	17	3	.	3	.	11	3	127	3
40	167	3	7	3	.	29	.	13	3	73	3	11	17	3	19	3	31	229	.	7
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
781	31	3	.	3	47	.	.	7	3	.	3	.	37	3	41	3	.	.	7	11
82	17	7	139	.	3	61	3	23	29	3	.	3	7	.	11	79	3	59	3	13
83	3	11	3	127	23	3	.	3	109	181	13	7	3	103	3	43	277	3	11	3
84	19	3	67	3	31	7	.	131	3	97	3	.	13	3	.	3	7	53	.	23
85	11	.	17	13	3	251	3	.	.	3	.	3	179	.	89	7	3	.	3	53
786	3	.	3	7	11	3	97	3	151	7	29	19	3	11	3	13	.	3	.	3
87	61	3	7	3	17	79	13	227	3	37	3	.	.	3	.	3	.	11	.	7
88	29	.	.	11	3	17	3	7	13	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	257
89	3	7	3	23	281	3	7	3	157	151	.	.	3	19	3	.	11	3	197	3
90	7	3	11	3	173	.	17	37	3	107	3	7	31	3	.	3	139	7	19	83
791	.	.	13	.	3	7	3	17	41	3	7	3	.	13	.	11	3	.	3	29
92	3	41	3	.	7	3	31	3	17	.	11	.	3	.	3	7	37	3	179	3
93	73	3	.	3	61	19	.	139	3	7	3	.	163	3	7	3	13	.	.	.
94	.	11	7	181	3	229	3	13	7	3	19	3	.	61	101	29	3	.	3	7
95	3	19	3	.	.	3	251	3	47	13	17	.	3	7	3	.	19	3	7	3
796	11	3	.	3	37	29	7	.	3	11	3	17	7	3	.	3	.	.	.	.
97	7	173	.	47	3	31	3	.	241	3	.	3	13	11	23	73	3	7	3	199
98	3	47	3	13	.	3	.	3	11	.	7	23	3	17	3	.	7	3	109	3
99	17	3	37	3	7	13	.	211	3	.	3	.	11	3	.	3	41	167	.	.
800	.	17	223	7	3	23	3	11	.	3	.	3	73	53	7	283	3	13	3	173
801	3	.	3	71	19	3	.	3	7	.	.	11	3	181	3	17	.	3	13	3
02	.	3	17	3	83	.	11	7	3	.	3	.	43	3	.	3	17	23	7	59
03	19	7	107	17	3	.	3	.	179	3	11	3	7	31	.	19	3	7	3	11
04	3	43	3	61	17	3	67	3	.	.	23	7	3	13	3	.	.	3	101	3
05	109	3	.	3	13	7	.	23	3	197	3	19	61	3	13	3	7	83	11	.
806	.	59	.	79	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	17
07	3	23	3	7	.	3	17	3	37	7	.	.	3	.	3	.	173	3	43	3
08	233	3	7	3	11	.	193	17	3	13	3	31	29	3	47	3	23	41	.	7
09	13	.	73	19	3	.	3	7	11	3	13	3	47	7	109	.	3	11	3	107
10	3	7	3	11	103	3	7	3	.	17	.	89	3	.	3	131	83	3	.	3
811	7	3	.	3	277	.	23	11	3	.	3	7	.	3	19	3	11	7	.	.
12	31	193	11	23	3	7	3	181	67	3	7	3	.	.	29	13	3	.	3	.
13	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	19	17	3	97	3	7	199	3	23	3
14	47	3	.	3	29	.	41	257	3	7	3	59	17	3	7	3	19	227	13	11
15	.	.	7	.	3	.	3	.	7	3	29	3	23	17	11	83	3	139	3	7
816	3	11	3	37	127	3	.	3	.	23	.	13	3	7	3	.	151	3	7	3
17	29	3	13	3	.	11	7	.	3	.	3	53	7	3	17	3	89	263	157	.
18	7	.	23	109	3	71	3	.	19	3	41	3	37	.	13	17	3	7	3	.
19	3	.	3	41	11	3	.	3	.	.	7	73	3	11	3	163	7	3	167	3
20	.	3	31	3	7	137	.	13	3	.	3	211	79	3	23	3	103	11	53	19
821	113	.	29	7	3	.	3	127	.	3	37	3	11	.	7	.	3	.	3	13
22	3	83	3	43	.	3	.	3	7	29	13	.	3	107	3	19	11	3	17	3
23	.	3	11	3	.	23	31	7	3	.	3	11	13	3	.	3	47	.	7	17
24	41	7	.	13	3	.	3	.	.	3	67	3	7	.	.	11	3	.	3	.
25	3	31	3	.	.	3	.	3	.	71	11	7	3	269	3	13	.	3	151	3
826	.	3	.	3	131	7	13	19	3	47	3	29	89	3	11	3	7	13	41	.
27	83	11	.	.	3	.	3	37	13	3	23	3	.	19	.	7	3	.	3	.
28	3	29	3	7	41	3	173	3	79	7	179	67	3	.	3	.	.	3	19	3
29	11	3	7	3	23	.	163	29	3	11	3	13	.	3	31	3	37	149	.	7
30	53	23	13	.	3	.	3	7	.	3	.	3	251	7	19	.	3	.	3	23
831	3	7	3	137	13	3	7	3	11	31	.	223	3	193	3	41	23	3	271	3
32	7	3	.	3	139	53	.	.	3	.	3	7	11	3	37	3	13	7	31	.
33	17	19	.	31	3	7	3	11	263	3	7	3	199	.	61	.	3	89	3	.
34	3	17	3	.	7	3	19	3	.	13	.	11	3	31	3	7	29	3	.	3
35	13	3	.	3	.	.	11	193	3	7	3	.	19	3	7	3	.	179	.	41
836	23	.	7	269	3	.	3	31	7	3	11	3	13	67	53	.	3	127	3	7
37	3	61	3	13	.	3	211	3	19	.	.	199	3	7	3	23	.	3	7	3
38	71	3	.	3	17	13	7	.	3	.	3	37	7	3	149	3	.	43	11	53
39	7	37	59	113	3	11	3	.	131	3	79	3	137	.	.	47	3	7	3	19
840	3	.	3	.	.	3	.	3	13	11	7	83	3	47	3	.	7	3	13	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
841	37	31	151	241	3	19	3	7	.	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	13
42	3	7	3	107	.	3	7	3	.	.	11	.	3	131	3	.	61	3	.	3
43	7	3	.	3	59	.	.	.	3	37	3	7	13	3	11	3	19	7	.	.
44	.	11	.	13	3	7	3	29	.	3	7	3	.	23	.	17	3	.	3	.
5	3	.	3	.	7	3	223	3	.	.	181	137	3	.	3	7	17	3	59	3
846	11	3	19	3	211	191	13	37	3	7	3	.	.	3	7	3	53	13	47	.
47	.	71	7	23	3	.	3	.	7	3	193	3	.	11	.	101	3	83	3	7
48	3	137	3	.	.	3	89	3	11	271	.	41	3	7	3	43	37	3	7	3
49	59	3	197	3	19	.	7	.	3	163	3	13	7	3	157	3	29	173	.	17
50	7	167	13	.	3	151	3	11	.	3	.	3	23	13	.	277	3	7	3	.
851	3	.	3	.	13	3	47	3	.	23	7	11	3	.	3	19	7	3	.	3
52	.	3	139	3	7	.	11	31	3	.	3	.	29	3	.	3	13	.	.	163
53	197	.	23	7	3	.	3	13	41	3	11	3	.	.	7	61	3	31	3	11
54	3	41	3	223	.	3	229	3	7	13	.	.	3	37	3	.	43	3	.	3
55	13	3	37	3	233	.	.	7	3	.	3	31	.	3	23	3	113	131	7	.
856	.	7	.	59	3	11	3	.	.	3	.	3	7	19	29	.	3	.	3	41
57	3	.	3	13	.	3	.	3	23	11	59	7	3	.	3	83	179	3	19	3
58	139	3	53	3	11	7	.	.	3	19	3	.	.	3	.	3	7	.	.	293
59	17	.	271	.	3	53	3	151	11	3	29	3	.	.	19	7	3	11	3	61
60	3	17	3	7	.	3	.	3	13	7	.	.	3	227	3	97	139	3	13	3
861	29	3	7	3	.	.	.	11	3	71	3	43	.	3	.	3	11	.	277	7
62	.	13	11	.	3	73	3	7	151	3	23	3	53	7	83	.	3	.	3	.
63	3	7	3	17	.	3	7	3	37	.	173	131	3	13	3	11	.	3	79	3
64	7	3	71	3	13	.	103	89	3	.	3	7	19	3	13	3	.	7	137	11
65	.	23	19	.	3	7	3	241	31	3	7	3	.	.	11	.	3	37	3	23
866	3	11	3	257	7	3	37	3	19	29	.	.	3	41	3	7	23	3	11	3
67	277	3	31	3	.	11	17	.	3	7	3	.	43	3	7	3	127	.	223	13
68	11	61	7	47	3	.	3	17	7	3	13	3	31	71	.	37	3	.	3	.
69	3	43	3	233	11	3	23	3	17	.	.	.	3	7	3	.	227	3	7	3
70	19	3	167	3	.	.	7	173	3	17	3	29	7	3	.	3	.	11	61	.
871	7	.	.	11	3	13	3	.	.	3	151	3	11	.	79	13	3	7	3	.
72	3	29	3	37	.	3	13	3	.	.	7	19	3	83	3	23	7	3	43	3
73	67	3	11	3	7	.	.	29	3	.	3	11	23	3	.	3	167	19	13	113
74	71	.	.	7	3	61	3	19	.	3	.	3	17	.	7	11	3	.	3	157
75	3	13	3	.	.	3	.	3	7	.	11	13	3	17	3	.	.	3	.	3
876	17	3	13	3	79	.	41	7	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	7	.
77	.	7	229	139	3	239	3	.	.	3	37	3	7	59	13	.	3	.	3	47
78	3	.	3	277	.	3	137	3	53	31	71	7	3	.	3	17	13	3	107	3
79	11	3	17	3	.	7	.	13	3	11	3	23	.	3	47	3	7	.	31	37
80	.	.	.	17	3	283	3	.	23	3	19	3	47	11	.	7	3	17	3	13
881	3	19	3	7	17	3	.	3	11	7	13	.	3	31	3	53	19	3	181	3
82	193	3	7	3	.	17	19	47	3	.	3	83	11	3	.	3	.	79	17	7
83	.	227	233	13	3	47	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	23	3	17
84	3	7	3	211	.	3	7	3	29	.	.	11	3	191	3	13	59	3	241	3
85	7	3	67	3	61	.	11	17	3	.	3	7	223	3	29	3	37	7	.	73
886	41	251	.	.	3	7	3	23	13	3	7	3	263	61	151	137	3	.	3	11
87	3	107	3	43	7	3	79	3	.	17	83	.	3	89	3	7	.	3	.	3
88	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	13	211	3	7	3	73	.	11	23
89	19	.	7	67	3	11	3	.	7	3	17	3	113	13	.	19	3	29	3	7
90	3	.	3	.	13	3	.	3	.	11	127	17	3	7	3	269	.	3	7	3
891	.	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	13	97	239	59
92	7	.	37	.	3	.	3	13	11	3	.	3	.	17	.	233	3	7	3	31
93	3	.	3	11	31	3	.	3	179	13	7	.	3	157	3	41	7	3	47	3
94	13	3	29	3	7	.	.	11	3	223	3	37	.	3	17	3	11	.	23	.
95	.	37	11	7	3	.	3	.	.	3	.	3	13	.	7	17	3	151	3	149
896	3	.	3	13	.	3	11	3	7	19	.	47	3	.	3	11	17	3	157	3
97	271	3	109	3	283	13	73	7	3	23	3	53	61	3	19	3	43	17	7	11
98	89	7	31	.	3	19	3	.	.	3	43	3	7	.	11	.	3	13	3	.
99	3	11	3	.	47	3	.	3	13	.	19	7	3	139	3	.	53	3	11	3
900	.	3	.	3	.	7	.	.	3	.	3	197	.	3	179	3	7	127	53	17
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
841	19	3	213	3	7	.	17	73	3	41	3	.	.	3	29	3	.	59	269	.
42	173	13	109	7	3	.	3	17	11	3	71	3	271	89	7	31	3	11	3	.
43	3	67	3	11	29	3	239	3	7	139	.	19	3	13	3	.	.	3	37	3
44	79	3	.	3	13	.	.	7	3	17	3	23	.	3	13	3	11	19	7	.
45	.	7	11	.	3	103	3	19	23	3	83	3	7	41	251	.	3	29	3	31
846	3	.	3	.	31	3	11	3	127	.	17	7	3	19	3	11	.	3	.	3
47	.	3	131	3	.	7	29	103	3	13	3	17	149	3	.	3	7	.	19	11
48	13	53	.	.	3	113	3	.	.	3	13	3	17	29	11	7	3	23	3	73
49	3	11	3	7	.	3	.	3	31	7	.	.	3	17	3	37	.	3	11	3
50	17	3	7	3	.	11	257	97	3	241	3	149	.	3	.	3	.	.	43	7
851	11	17	31	.	3	13	3	7	53	3	19	3	103	7	17	13	3	.	3	.
52	3	7	3	.	11	3	7	3	71	269	53	107	3	11	3	17	19	3	.	3
53	7	3	17	3	.	.	19	.	3	59	3	7	.	3	103	3	17	7	13	23
54	.	.	97	11	3	7	3	.	127	3	7	3	11	73	.	53	3	17	3	193
55	3	13	3	67	7	3	41	3	.	83	.	13	3	23	3	7	11	3	.	3
856	97	3	11	3	.	17	.	.	3	7	3	11	47	3	7	3	.	67	17	43
57	.	29	7	191	3	139	3	199	7	3	31	3	.	109	13	11	3	.	3	7
58	3	.	3	23	19	3	17	3	43	79	11	157	3	7	3	.	13	3	7	3
59	23	3	43	3	67	31	7	13	3	149	3	127	7	3	11	3	.	113	23	.
60	7	11	47	41	3	89	3	.	17	3	.	3	59	.	31	19	3	7	3	13
861	3	101	3	29	.	3	199	3	.	17	7	.	3	.	3	79	7	3	.	3
62	11	3	.	3	7	.	281	.	3	11	3	19	13	3	.	3	.	.	.	211
63	.	.	.	7	3	67	3		.	3	17	3	.	11	7	.	3	19	3	.
64	3	.	3	31		3	.	3	7	43	.	17	3	197	3	13	.	3	67	3
65	41	3	101	3	.	107	13	7	3	.	3	.	11	3	.	3	131	13	7	.
866	73	7	193	19	3	79	3	11	13	3	.	3	7	17	23	.	3	.	3	181
67	3	.	3	101	53	3	.	3	.	19	107	7	3	.	3	59	229	3	29	3
68	.	3	.	3	.	7	11	.	3	109	3	13	283	3	17	3	7	31	113	67
69	.	89	13	.	3	19	3	.	29	3	11	3	.	13	37	7	3	.	3	11
70	3	263	3	7	13	3	83	3	.	7	19	31	3	.	3	73	17	3	251	3
871	.	3	7	3	43	101	67	61	3	179	3	.	.	3	.	3	13	17	11	7
72	.	.	.	71	3	11	3	7	197	3	.	3	.	7	191	41	3	.	3	.
73	3	7	3	.	199	3	7	3	41	11	23	59	3	.	3	31	281	3	17	3
74	7	3	19	3	11	149	47	23	3	.	3	7	.	3	89	3	.	7	59	17
75	29	.	.	.	3	7	3	67	11	3	7	3	13	.	.	.	3	11	3	251
876	3	23	3	11	7	3	29	3	.	73	43	.	3	.	3	7	.	3	.	3
77	.	3	127	3	19	13	.	11	3	7	3	61	41	3	7	3	11	.	.	19
78	59	.	7	103	3	41	3	.	7	3	.	3	.	23	.	179	3	13	3	7
79	3	281	3	.	.	3	11	3	13	.	.	97	3	7	3	11	.	3	7	3
80	191	3	173	3	107	83	7	.	3	29	3	.	7	3	59	3	137	.	37	11
881	7	13	199	23	3	131	3	.	37	3	.	3	109	163	11	29	3	7	3	89
82	3	11	3	.	.	3	61	3	103	41	7	43	3	13	3	.	7	3	11	3
83	53	3	149	3	7	11	97	19	3	67	3	.	31	3	13	3	157	37	.	109
84	11	197	53	7	3	.	3	.	.	3	103	3	23	19	7	107	3	.	3	.
85	3	17	3	19	11	3	31	3	7	23	101	283	3	11	3	.	.	3	19	3
886	.	3	.	3	.	.	.	7	3	13	3	71	.	3	131	3	31	11	7	13
87	13	7	17	11	3	37	3	29	.	3	13	3	7	47	19	.	3	.	3	.
88	3	.	3	17	.	3	.	3	181	.	31	7	3	.	3	103	11	3	.	3
89	.	3	11	3	17	7	43	.	3	193	3	11	101	3	23	3	7	.	.	61
90	.	19	.	29	3	13	3	.	.	3	281	3	229	.	.	7	3	41	3	139
891	3	.	3	7	163	3	13	3	23	7	11	257	3	101	3	.	79	3	191	3
92	149	3	7	3	.	23	17	.	3	.	3	73	19	3	11	3	29	.	13	7
93	199	11	19	193	3	.	3	7	.	3	139	3	.	7	.	71	3	.	3	.
94	3	7	3	.	137	3	7	3	17	131	.	13	3	43	3	109	.	3	31	3
95	7	3	13	3	.	.	.	43	3	11	3	7	29	3	101	3	.	7	.	.
896	37	.	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	13	.	3	257	3	19
97	3	.	3	.	7	3	.	3	11	107	17	.	3	.	3	7	13	3	.	3
98	19	3	59	3	23	73	.	13	3	7	3	17	11	3	7	3	.	241	.	.
99	293	23	7	.	3	.	3	11	7	3	.	13	17	.	29	.	3	31	3	7
900	3	.	3	.	113	3	.	3	.	.	13	11	3	7	3	.	2	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
901	11	13	.	251	3	97	3	227	.	3	.	3	193	173	23	7	3	109	3	.
02	3	.	3	7	11	3	.	3	83	7	.	23	3	11	3	.	31	3	.	3
03	73	3	7	3	13	.	37	181	3	41	3	59	103	3	13	3	61	11	167	7
04	.	.	.	11	3	23	3	7	19	3	31	3	11	7	.	.	3	149	3	151
05	3	7	3	29	.	3	7	3	131	.	.	.	3	.	3	37	11	3	.	3
906	7	3	11	3	19	31	.	.	3	13	3	7	.	3	233	3	.	7	.	13
07	13	.	61	.	3	7	3	83	257	3	7	3	.	41	31	11	3	103	3	.
08	3	.	3	71	7	3	197	3	.	.	11	61	3	.	3	7	.	3	.	3
09	.	3	.	3	.	229	.	23	3	7	3	79	.	3	7	3	211	199	.	103
10	17	11	7	.	3	13	3	.	7	3	227	3	29	.	59	13	3	181	3	7
911	3	17	3	31	179	3	13	3	.	293	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3
12	11	3	223	3	197	53	7	19	3	11	3	.	7	3	.	3	23	.	13	.
13	7	.	17	.	3	127	3	53	29	3	271	3	.	11	149	241	3	7	3	167
14	3	13	3	17	.	3	113	3	11	.	7	13	3	.	3	61	7	3	19	3
15	37	3	13	3	7	.	23	71	3	19	3	.	11	3	239	3	.	31	43	83
916	139	47	101	7	3	17	3	11	.	3	59	3	.	43	7	.	3	113	3	37
17	3	.	3	293	.	3	41	3	7	37	29	11	3	.	3	199	13	3	23	3
18	.	3	.	3	.	.	11	7	3	.	3	229	131	3	.		.	29	7	53
19	29	7	73	.	3	107	3	17	.	3	11	3	7	149	89	.	3	.	3	11
20	3	.	3	.	101	3	19	3	17	23	13	7	3	.	3	31	.	3	83	3
921	31	3	.	3	.	7	251	.	3	17	3	181	13	3	199	3	7	.	11	43
22	137	.	19	13	3	11	3	.	.	3	.	3	149	.	.	7	3	.	3	29
23	3	241	3	7	.	3	.	3	19	7	17	127	3	.	3	13	107	3	.	3
24	.	3	7	3	11	.	13	.	3	29	3	17	.	3	23	3	97	13	193	7
25	233	.	.	29	3	71	3	7	11	3	67	3	17	7	37	29	3	11	3	19
926	3	7	3	11	37	3	7	3	23	.	.	211	3	17	3	.	.	3	.	3
27	7	3	.	3	83	23	.	11	3	.	3	7	47	3	.	3	11	7	163	137
28	.	17	11	.	3	7	3	101	.	3	7	3	.	13	17	263	3	227	3	.
29	3	61	3	53	7	3	11	3	.	43	.	19	3	199	3	7	.	3	41	3
30	.	3	17	3	281	47	191	167	3	7	3	41	31	3	7	3	13	19	.	11
931	157	.	7	17	3	.	3	13	7	3	23	3	.	.	11	.	3	17	3	7
32	3	11	3	83	17	3	31	3	73	13	53	.	3	7	3	.	.	3	7	3
33	13	3	.	3	23	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	31	269	17	277
34	7	23	.	29	3	109	3	.	103	3	.	3	13	233	223	41	3	7	3	17
35	3	.	3	13	11	3	17	3	41	.	7	.	3	11	3	89	7	3	139	3
936	.	3	.	3	7	13	179	17	3	251	3	.	109	3	.	3	29	11	37	71
37	.	.	83	7	3	31	3	.	17	3	19	3	11	67	7	.	3	13	3	241
38	3	19	3	.	.	3	23	3	7	17	.	101	3	103	3	107	11	3	13	3
39	.	3	11	3	.	.	19	7	3	.	3	11	29	3	.	3	.	37	7	.
40	23	7	.	.	3	41	3	149	167	3	17	3	7	.	271	11	3	157	3	.
941	3	139	3	.	.	3	.	3	.	61	11	7	3	13	3	23	47	3	31	3
42	.	3	.	3	13	7	71	.	3	59	3	.	17	3	11	3	7	73	79	307
43	181	11	.	.	3	37	3	257	.	3	.	3	.	17	29	7	3	.	3	.
44	3	67	3	7	19	3	263	3	.	7	.	89	3	.	3	.	.	3	.	3
45	11	3	7	3	29	.	47	31	3	11	3	.	.	3	17	3	.	.	.	7
946	13	.	89	37	3	.	3	7	.	3	13	3	173	7	101	17	3	31	3	.
47	3	7	3	.	53	3	7	3	11	.	.	43	3	61	3	211	17	3	.	3
48	7	3	113	3	.	59	53	.	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.
49	43	.	.	107	3	7	3	11	23	3	7	3	59	.	139	13	3	19	3	.
50	3	.	3	.	7	3	13	3	.	167	.	11	3	29	3	7	101	3	17	3
951	.	3	.	3	.	227	11	73	3	7	3	251	.	3	7	3	89	.	13	17
52	31	.	7	19	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	131	.	3	23	3	7
53	3	13	3	191	.	3	.	3	199	19	.	13	3	7	3	.	67	3	7	3
54	.	3	13	3	73	.	7	.	3	37	3	.	7	3	19	3	.	.	11	31
55	7	43	.	149	3	11	3	23	59	3	.	3	.	83	13	.	3	7	3	.
956	3	.	3	67	23	3	.	3	.	11	7	.	3	.	3	59	7	3	101	3
57	.	3	.	3	7	.	.	13	3	.	3	29	.	3	.	3	19	67	.	23
58	.	.	149	7	3	.	3	.	11	3	79	3	61	47	7	239	3	11	3	13
59	3	29	3	11	.	3	.	3	7	.	13	.	3	23	3	197	37	3	.	3
960	.	3	19	3	67	.	.	7	3	131	3	109	13	3	137	3	11	.	7	139
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
901	17	3	89	3	29	.	7	37	3	.	3	31	7	3	.	3	.	19	.	.
02	7	17	43	13	3	.	3	19	.	3	11	3	.	137	113	.	3	7	3	11
03	3	.	3	.	109	3	23	3	.	.	7	.	3	19	3	13	7	3	.	3
04	29	3	17	3	7	61	13	.	3	.	3	173	.	3	41	3	17	13	11	.
05	23	83	137	7	3	11	3	41	13	3	53	3	239	.	7	157	3	17	3	.
906	3	269	3	.	17	3	71	3	7	11	.	.	3	29	3	23	89	3	.	3
07	151	3	47	3	11	17	139	7	3	43	3	13	23	3	.	3	103	.	7	29
08	47	7	13	43	3	.	3	89	11	3	19	3	7	13	.	97	3	11	3	17
09	3	19	3	11	13	3	17	3	.	29	.	7	3	37	3	.	19	3	.	3
10	83	3	23	3	41	7	19	11	3	61	3	.	.	3	79	3	7	71	.	.
911	.	.	11	.	3	.	3	13	17	3	73	3	19	.	67	7	3	.	3	.
12	3	.	3	7	263	3	11	3	107	7	97	37	3	.	3	11	.	3	.	3
13	13	3	7	3	103	211	.	.	3	.	3	23	.	3	.	3	59	.	.	7
14	109	.	.	.	3	.	3	7	23	3	17	3	13	7	11	191	3	.	3	.
15	3	7	3	13	19	3	7	3	.	.	.	17	3	.	3	67	.	3	11	3
916	7	3	151	3	71	11	31	29	3	.	3	7	17	3	277	3	.	7	47	107
17	11	.	.	89	3	7	3	163	.	3	7	3	.	17	263	19	3	13	3	41
18	3	31	3	97	7	3	.	3	13	.	79	139	3	11	3	7	43	3	13	3
19	.	3	.	3	.	41	.	.	3	7	3	19	59	3	7	3	67	11	.	197
20	.	13	7	11	3	43	3	23	7	3	.	3	11	.	71	17	3	19	3	7
921	3	.	3	157	23	3	37	3	61	.	.	.	3	7	3	.	11	3	7	3
22	.	3	11	3	13	257	7	.	3	53	3	11	7	3	13	3	41	17	.	23
23	7	.	.	19	3	.	3	.	71	3	.	3	.	.	.	11	3	7	3	.
24	3	59	3	.	.	3	.	3	89	19	7	.	3	23	3	.	7	3	17	3
25	.	3	.	3	7	151	.	.	3	13	3	43	.	3	11	3	53	.	29	13
926	13	11	.	7	3	19	3	.	.	3	13	3	.	.	7	59	3	.	3	.
27	3	.	3	23	.	3	.	3	7	113	19	.	3	31	3	.	.	3	71	3
28	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	131	293	3	29	3	19	.	7	.
29	.	7	.	.	3	13	3	31	239	3	109	3	7	11	.	13	3	.	3	113
30	3	.	3	.	29	3	13	3	11	163	.	7	3	.	3	.	127	3	.	3
931	.	3	19	3	59	7	151	.	3	23	3	.	11	3	.	3	7	41	13	.
32	.	.	.	179	3	.	3	11	19	3	37	3	.	.	.	7	3	29	3	79
33	3	13	3	7	89	3	73	3	.	7	.	11	3	.	3	47	61	3	59	3
34	113	3	7	3	19	.	11	151	3	211	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
35	17	.	.	.	3	.	3	7	137	3	11	3	.	7	13	31	3	173	3	11
936	3	7	3	73	229	3	7	3	47	283	113	23	3	.	3	19	13	3	43	3
37	7	3	29	3	.	.	41	13	3	79	3	7	191	3	.	3	71	7	11	97
38	.	127	17	47	3	7	3	37	.	3	7	3	269	223	.	.	3	.	3	13
39	3	47	3	17	7	3	.	3	.	11	13	.	3	.	3	7	193	3	.	3
940	163	3		3	11	.	109	19	3	7	3	.	13	3	7	3	37	23	73	.
941	.	.	7	13	3	17	3	.	7	3	41	3	53	19	97	131	3	11	3	7
42	3	.	3	11	.	3	107	3	31	.	23	29	3	7	3	13	.	3	7	3
43	.	3	157	3	127	197	7	11	3	19	3	.	7	3	37	3	11	13	.	.
44	7	29	11	59	3	.	3	17	13	3	.	3	107	.	19	61	3	7	3	53
45	3	23	3	.	.	3	11	3	17	.	7	271	3	.	3	11	7	3	.	3
946	.	3	103	3	7	181	137	41	3	17	3	13	73	3	.	3	23	.	281	11
47	41	19	13	7	3	193	3	97	.	3	.	3	.	13	7	.	3	.	3	47
48	3	11	3	29	13	3	19	3	7	.	17	79	3	239	3	.	31	3	11	3
49	.	3	269	3	.	11	23	7	3	73	3	17	19	3	43	3	13	.	7	.
50	11	7	19	23	3	.	3	13	.	3	31	3	7	.	.	.	3	.	3	61
951	3	.	3	43	11	3	59	3	19	13	.	7	3	11	3	.	.	3	23	3
52	13	3	.	3	.	7	.	47	3	.	3	.	151	3	.	3	7	11	233	157
53	97	17	167	11	3	47	3	.	283	3	127	3	11	.	17	7	3	.	3	19
54	3	53	3	7	.	3	.	3	.	7	307	.	3	.	3	17	11	3	29	3
55	19	3	7	3	.	13	227	.	3	31	3	11	.	3	61	3	17	109	.	7
956	.	41	23	17	3	271	3	7	29	3	241	3	163	7	103	11	3	13	3	83
57	3	7	3	31	17	3	7	3	13	.	11	19	3	.	3	.	.	3	13	3
58	7	3	.	3	257	17	37	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	17	41
59	239	11	.	.	3	7	3	19	.	3	7	3	41	53	.	.	3	59	3	17
960	3	.	3	.	7	3	17	3	23	191	29	.	3	13	3	7	307	3		3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
961	17	7	11	.	3	223	3	277	19	3	97	3	7	251		127	3	79	3	.
62	3	17	3	23	.	3	11	3		.	41	7	3	.	3	11	157	3	109	3
63	23	3	193	3	19	7	13	61	3	.	3	.	.	3	.	3	7	13	23	11
64	.	149	17	229	3	67	3	.	13	3	211	3	.	73	11	7	3	.	3	43
65	3	11	3	7	103	3	.	3	263	7	.	83	3	37	3	19	29	3	11	3
966	.	3	7	3	17	11	79	53	3	23	3	13	71	3	41	3	241	.	127	7
67	11	.	13	97	3	17	3	7	311	3	197	3	.	7	.	.	3	89	3	.
68	3	7	3	131	11	3	7	3	.	.	.	37	3	11	3	179	113	3	.	3
69	7	3	.	3	.	199	17	19	3	103	3	7	.	3	31	3	13	7	29	67
70	.	.	.	11	3	7	3	13	.	3	7	3	11	19	23	.	3	53	3	107
971	3	.	3	19	7	3	.	3	17	13	.	23	3	137	3	7	11	3	19	3
72	13	3	11	3	41	.	67	191	3	7	3	11	.	3	7	3	.	47	31	79
73	.	.	7	31	3	23	3	307	7	3	.	3	13	131	19	11	3	311	3	7
74	3	257	3	13	29	3	61	3	37	.	11	.	3	7	3	139	.	3	7	3
75	.	3	281	3	.	13	7	113	3	.	3	17	7	3	11	3	103	23	.	.
976	7	11	.	.	3	.	3	31	41	3	233	3	17	89	163	251	3	7	3	.
77	3	41	3	199	.	3	19	3	13	79	7	.	3	17	3	43	7	3	13	3
78	11	3	47	3	7	.	29	23	3	11	3	.	19	3	227	3	.	.	.	.
79	47	13	19	7	3	179	3	.	181	3	.	3	.	11	7	37	3	.	3	41
80	3	23	3	.	.	3	.	3	7	83	61	167	3	13	3	17	.	3	.	3
981	.	3	17	3	13	41	59	7	3	.	3		11	3	13	3	17	.	7	61
82	283	7	.	17	3	.	3	11	.	3	.	3	7	23	193	31	3	17	3	19
83	3	197	3	37	17	3	.	3	.	.	.	7	3	107	3	29	43	3	.	3
84	19	3	.	3	.	7	11	.	3	13	3	.	257	3	173	3	7	.	17	13
85	13	137	.	23	3	29	3	.	83	3	11	3	37	.	211	7	3	.	3	11
986	3	151	3	7	31	3	17	3	.	7	.	19	3	53	3	.	.	3	23	3
87	89	3	7	3	.	.	.	17	3	269	3	.	.	3	.	3	293	19	11	7
88	.	29	.	.	3	11	3	7	17	3	37	3	23	7	.	13	3	97	3	.
89	3	7	3	.	.	3	7	3	31	11	.	.	3	19	3	.	163	3	.	3
90	7	3	181	3	11	.		83	3	.	3	7	167	3	97	3	.	7	13	37
991	113		23	.	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	.	.	3	11	3	.
92	3	13	3	11	7	3	47	3	313	.	67	13	3	.	3	7	.	3	61	3
93	199	3	13	3	47	19	.	11	3	7	3	71	17	3	7	3	11	41	.	.
94	.	107	7	.	3	89	3	37	7	3	19	3	.	17	13	.	3	277	3	7
95	3	19	3	151	191	3	11	3	23	.	.		3	7	3	11	13	3	7	3
996	103	3	.	3	.	23	7	13	3	.	3	67	7	3	17	3	37	.	251	11
97	7	179	.	.	3	.	3	.	.	3	31	3	19	.	11	17	3	7	3	13
98	3	11	3	.	151	3	.	3	173	.	7	.	3	.	3	.	7	3	11	3
999	.	3	.	3	7	11	41	163	3	.	3	.	13	3	37	3	139	17	89	127
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

TAVOLA DEGLI ARCHI CIRCOLARI RIDOTTI IN PARTI DEL RAGGIO = 1

Arco	Valore	Arco	Valore
1°	0,01745 32925 19943 29577	16°	0,27925 26803 19092 73231
2	0 03490 65850 39886 59154	17	0 29670 59728 39036 02808
3	0 05235 98775 59829 88731	18	0 31415 92653 58979 32385
4	0 06981 31700 79773 18308	19	0 33161 25578 78922 61962
5	0 08726 64625 99716 47885	20	0 34906 58503 98865 91538
6	0 10471 97551 19659 77462	30	0 52359 87755 98298 87308
7	0 12217 30476 39603 07038	40	0 69813 17007 97731 83077
8	0 13962 63401 59546 36615	50	0 87266 46259 97164 78846
9	0 15707 96326 79489 66192	60	1 04719 75511 96597 74615
10	0 17453 29251 99432 95769	70	1 22173 04763 96030 70385
11	0 19198 62177 19376 25346	80	1 39626 34015 95463 66154
12	0 20943 95102 39319 54923	90	1 57079 63267 94896 61923
13	0 22689 28027 59262 84500	100	1 7453 29251 99432 957692
14	0 24434 60952 79206 14077	200	3 4906 58503 98865 915384
15	0 26179 93877 99149 43654	300	5 2359 87755 98298 873078

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
961	11	3	.	3	13	23	.	17	3	3	3	.	.	3	7	3	43	29	19	.
62	29	101	7	.	3	.	3	.	7	7	43	3	.	11	73	.	3	.	3	7
63	3	.	3	167	173	3	29	3	11	17	.	31	3	7	3	113	41	3	7	3
64	.	3	.	3	.	19	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	47	.	.	13
65	7	.	.	223	3	61	3	11	269	3	13	3	.	59	.	.	3	7	3	29
966	3	19	3	163	.	3	.	3	.	277	7	11	3	109	3	31	7	3	.	3
67	31	3	.	3	7	.	11	.	3	29	3	.	17	3	.	3	151	43	.	.
68	.	23	.	7	3	13	3	157	73	3	11	3	19	17	7	13	3	.	3	11
69	3	.	3	.	47	3	13	3	7	.	37	.	3	293	3	.	23	3	.	3
70	37	3	71	3	31	29	113	7	3	.	3	193	.	3	17	3	79	151	7	89
971	.	7	.	.	3	11	3	.	.	3	.	3	7	157	.	17	3	83	3	37
72	3	13	3	.	19	3	23	3	211	11	89	7	3	.	3	271	17	3	149	3
73	67	3	13	3	11	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	17	.	173
74	19	.	41	.	3	.	3	29	11	3	107	3	43	71	13	7	3	11	3	.
75	3	.	3	7	.	3	43	3	.	7	.	.	3	.	3	23	13	3	17	3
976	.	3	7	3	61	127	101	11	3	.	3	19	23	3	.	3	11	211	151	7
77	239	67	11	29	3	59	3	7	.	3	.	3	277	7	.	.	3	19	3	13
78	3	7	3	.	.	3	7	3	.	97	13	.	3	.	3	11	53	3	223	3
79	7	3	23	3	.	163	.	313	3	.	3	7	13	3	.	3	29	7	43	11
80	71	31	.	13	3	7	3	281	101	3	7	3	.	43	11	47	3	233	3	263
981	3	11	3	103	7	3	89	3	127	19	31	.	3	47	3	7	149	3	11	3
82	.	3	.	3	97	11	43	.	3	7	3	23	29	3	7	3	227	13	.	.
83	11	59	7	41	3	19	3	.	7	3	.	3	131	37	.	.	3	61	3	7
84	3	.	3	.	11	3	.	3	59	.	19	.	3	7	3	149	.	3	7	3
85	139	3	67	3	.	.	7	241	3	.	3	13	7	3	311	3	19	11	.	43
986	7	47	13	11	3	.	3	.	79	3	101	3	11	13	29	.	3	7	3	229
87	3	17	3	61	13	3	283	3	43	.	7	.	3	173	3	223	7	3	31	3
88	41	3	11	3	7	109	.	.	3	.	3	11	61	3	.	3	13	.	.	.
89	53	.	17	7	3	.	3	13	19	3	29	3	.	31	7	11	3	.	3	.
90	3	.	3	17	23	3	157	3	7	13	11	.	3	.	3	.	197	3	41	3
991	13	3	229	3	17	53	131	7	3	.	3	41	.	3	11	3	.	281	7	19
92	.	7	.	.	3	17	3	53	37	3	.	3	7	101	43	.	3	31	3	109
93	3	73	3	13	67	3	.	3	.	43	.	7	3	23	3	19	.	3	.	3
94	11	3	271	3	79	7	17	.	3	11	3	31	53	3	.	3	7	37	.	29
95	.	113	29	.	3	.	3	17	.	3	.	3	.	11	53	7	3	13	3	137
996	3	227	3	7	.	3	.	3	11	7	263	.	3	83	3	.	131	3	13	3
97	23	3	7	3	.	67	.	19	3	17	3	113	11	3	.	3	73	.	23	7
98	31	13	61	.	3	37	3	7	.	3	.	3	.	7	59	23	3	191	3	283
999	3	7	3	19	.	3	7	3	.	257	17	11	3	13	3	.	.	3	19	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

1′	0,00029 08882 08665 72160
2	0 00058 17764 17331 44319
3	0 00087 26646 25997 16479
4	0 00116 35528 34662 88638
5	0 00145 44410 43328 60798
6	0 00174 53292 51994 32958
7	0 00203 62174 60660 05117
8	0 00232 71056 69325 77277
9	0 00261 79938 77991 49437
10	0 00290 88820 86657 21596
20	0 00581 77641 73314 43192
30	0 00872 66462 59971 64788
40	0 01163 55283 46628 86385
50	0 01454 44104 33286 07981
60	0 01745 32925 19943 29577

1″	0.00000 48481 36811 09536
2	0 00000 96962 73622 19072
3	0 00001 45444 10433 28608
4	0 00001 93925 47244 38144
5	0 00002 42406 84055 47680
6	0 00002 90888 20866 57216
7	0 00003 39369 57677 66752
8	0 00003 87850 94488 76288
9	0 00004 36332 31299 85824
10	0 00004 84813 68110 95360
20	0 00009 69627 36221 90720
30	0 00014 54441 04332 86080
40	0 00019 39254 72443 81440
50	0 00024 24068 40554 76800
60	0 00029 08882 08665 72160

N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3
1	1	1	61	3721	226981	121	14641	1771561	181	32761	5929741
2	4	8	62	3844	238328	22	14884	1815848	82	33124	6028568
3	9	27	63	3969	250047	23	15129	1860867	83	33489	6128487
4	16	64	64	4096	262144	24	15376	1906624	84	33856	6229504
5	25	125	65	4225	274625	25	15625	1953125	85	34225	6331625
6	36	216	66	4356	287496	126	15876	2000376	186	34596	6434856
7	49	343	67	4489	300763	27	16129	2048383	87	34969	6539203
8	64	512	68	4624	314432	28	16384	2097152	88	35344	6644672
9	81	729	69	4761	328509	29	16641	2146689	89	35721	6751269
10	100	1000	70	4900	343000	30	16900	2197000	90	36100	6859000
11	121	1331	71	5041	357911	131	17161	2248091	191	36481	6967871
12	144	1728	72	5184	373248	32	17424	2299968	92	36864	7077888
13	169	2197	73	5329	389017	33	17689	2352637	93	37249	7189057
14	196	2744	74	5476	405224	34	17956	2406104	94	37636	7301384
15	225	3375	75	5625	421875	35	18225	2460375	95	38025	7414875
16	256	4096	76	5776	438976	136	18496	2515456	96	38416	7529536
17	289	4913	77	5929	456533	37	18769	2571353	97	38809	7645373
18	324	5832	78	6084	474552	38	19044	2628072	98	39204	7762392
19	361	6859	79	6241	493039	39	19321	2685619	99	39601	7880599
20	400	8000	80	6400	512000	40	19600	2744000	200	40000	8000000
21	441	9261	81	6561	531441	141	19881	2803221	201	40401	8120601
22	484	10648	82	6724	551368	42	20164	2863288	02	40804	8242408
23	529	12167	83	6889	571787	43	20449	2924207	03	41209	8365427
24	576	13824	84	7056	592704	44	20736	2985984	04	41616	8489664
25	625	15625	85	7225	614125	45	21025	3048625	05	42025	8615125
26	676	17576	86	7396	636056	146	21316	3112136	206	42436	8741816
27	729	19683	87	7569	658503	47	21609	3176523	07	42849	8869743
28	784	21952	88	7744	681472	48	21904	3241792	08	43264	8998912
29	841	24389	89	7921	704969	49	22201	3307949	09	43681	9129329
30	900	27000	90	8100	729000	50	22500	3375000	10	44100	9261000
31	961	29791	91	8281	753571	151	22801	3442951	211	44521	9393931
32	1024	32768	92	8464	778688	52	23104	3511808	12	44944	9528128
33	1089	35937	93	8649	804357	53	23409	3581577	13	45369	9663597
34	1156	39304	94	8836	830584	54	23716	3652264	14	45796	9800344
35	1225	42875	95	9025	857375	55	24025	3723875	15	46225	9938375
36	1296	46656	96	9216	884736	156	24336	3796416	216	46656	10077696
37	1369	50653	97	9409	912673	57	24649	3869893	17	47089	10218313
38	1444	54872	98	9604	941192	58	24964	3944312	18	47524	10360232
39	1521	59319	99	9801	970299	59	25281	4019679	19	47961	10503459
40	1600	64000	100	10000	1000000	60	25600	4096000	20	48400	10648000
41	1681	68921	101	10201	1030301	161	25921	4173281	221	48841	10793861
42	1764	74088	02	10404	1061208	62	26244	4251528	22	49284	10941048
43	1849	79507	03	10609	1092727	63	26569	4330747	23	49729	11089567
44	1936	85184	04	10816	1124864	64	26896	4410944	24	50176	11239424
45	2025	91125	05	11025	1157625	65	27225	4492125	25	50625	11390625
46	2116	97336	106	11236	1191016	166	27556	4574296	226	51076	11543176
47	2209	103823	07	11449	1225043	67	27889	4657463	27	51529	11697083
48	2304	110592	08	11664	1259712	68	28224	4741632	28	51984	11852352
49	2401	117649	09	11881	1295029	69	28561	4826809	29	52441	12008989
50	2500	125000	10	12100	1331000	70	28900	4913000	30	52900	12167000
51	2601	132651	111	12321	1367631	171	29241	5000211	231	53361	12326391
52	2704	140608	12	12544	1404928	72	29584	5088448	32	53824	12487168
53	2809	148877	13	12769	1442897	73	29929	5177717	33	54289	12649337
54	2916	157464	14	12996	1481544	74	30276	5268024	34	54756	12812904
55	3025	166375	15	13225	1520875	75	30625	5359375	35	55225	12977875
56	3136	175616	116	13456	1560896	176	30976	5451776	236	55696	13144256
57	3249	185193	17	13689	1601613	77	31329	5545233	37	56169	13312053
58	3364	195112	18	13924	1643032	78	31684	5639752	38	56644	13481272
59	3481	205379	19	14161	1685159	79	32041	5735339	39	57121	13651919
60	3600	216000	120	14400	1728000	80	32400	5832000	240	57600	13824000
N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3

N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3
241	58081	13997521	301	90601	27270901	361	130321	47045881	421	177241	74618461
42	58564	14172488	02	91204	543608	62	1044	437928	22	8084	75151448
43	59049	14348907	03	91809	818127	63	1769	832147	23	8929	75686967
44	59536	14526784	04	92416	28094464	64	2496	48228544	24	9776	76225024
45	60025	14706125	05	93025	372625	65	3225	627125	25	180625	76765625
246	60516	14886936	306	93636	28652616	366	133956	49027896	426	181476	77308776
47	61009	15069223	07	94249	934443	67	4689	430863	27	2329	854483
48	61504	15252992	08	94864	29218112	68	5424	836032	28	3184	78402752
49	62001	15438249	09	95481	503629	69	6161	50243409	29	4041	953589
50	62500	15625000	10	96100	791000	70	6900	653000	30	4900	79507000
251	63001	15813251	311	96721	30080231	371	137641	51064811	431	185761	80062991
52	63504	16003008	12	97344	371328	72	8384	478848	32	6624	621568
53	64009	16194277	13	97969	664297	73	9129	895117	33	7489	81182737
54	64516	16387064	14	98596	959144	74	9876	52313624	34	8356	746504
55	65025	16581375	15	99225	31255875	75	140625	734375	35	9225	82312875
256	65536	16777216	316	99856	31554496	376	141376	53157376	436	190096	82881856
57	66049	16974593	17	100489	855013	77	2129	582633	37	0969	83453453
58	66564	17173512	18	1124	32157432	78	2884	54010152	38	1844	84027672
59	67081	17373979	19	1761	461759	79	3641	439939	39	2721	604519
60	67600	17576000	20	2400	768000	80	4400	872000	40	3600	85184000
261	68121	17779581	321	103041	33076161	381	145161	55306341	441	194481	85766121
62	68644	17984728	22	3684	386248	82	5924	742968	42	5364	86350888
63	69169	18191447	23	4329	698267	83	6689	56181887	43	6249	938307
64	69696	18399744	24	4976	34012224	84	7456	623104	44	7136	87528384
65	70225	18609625	25	5625	328125	85	8225	57066625	45	8025	88121125
266	70756	18821096	326	106276	34645976	386	148996	57512456	446	198916	88716536
67	71289	19034163	27	6929	965783	87	9769	960603	47	9809	89314623
68	71824	19248832	28	7584	35287552	88	150544	58411072	48	200704	915392
69	72361	19465109	29	8241	611289	89	1321	863869	49	1601	90518849
70	72900	19683000	30	8900	937000	90	2100	59319000	50	2500	91125000
271	73441	19902511	331	109561	36264691	391	152881	59776471	451	203401	91733851
72	73984	20123648	32	110224	594368	92	3664	60236288	52	4304	92345408
73	74529	20346417	33	0889	926037	93	4449	698457	53	5209	959677
74	75076	20570824	34	1556	37259704	94	5236	61162984	54	6116	93576664
75	75625	20796875	35	3225	595375	95	6025	629875	55	7025	94196375
276	76176	21024576	336	112896	37933056	396	156816	62099136	456	207936	94818816
77	76729	21253933	37	3569	38272753	97	7609	570773	57	8849	95443993
78	77284	21484952	38	4244	614472	98	8404	63044792	58	9764	96071912
79	77841	21717639	39	4921	958219	99	9201	521199	59	210681	702579
80	78400	21952000	40	5600	39304000	400	160000	64000000	60	1600	97336000
281	78961	22188041	341	116281	39651821	401	160801	64481201	461	212521	97972181
82	79524	22425768	42	6964	40001688	02	1604	964808	62	3444	98611128
83	80089	22665187	43	7649	353607	03	2409	65450827	63	4369	99252847
84	80656	22906304	44	8336	707584	04	3216	939264	64	5296	897344
85	81225	23149125	45	9025	41063625	05	4025	66430125	65	6225	100544625
286	81796	23393656	346	119716	41421736	406	164836	66923416	466	217156	101194696
87	82369	23639903	47	120409	781923	07	5649	67419143	67	8089	1847563
88	82944	23887872	48	1104	42144192	08	6464	917312	68	9024	2503232
89	83521	24137569	49	1801	508549	09	7281	68417929	69	9961	3161709
90	84100	24389000	50	2500	875000	10	8100	921000	70	220900	3823000
291	84681	24642171	351	123201	43243551	411	168921	69426531	471	221841	104487111
92	85264	24897088	52	3904	614208	12	9744	934528	72	2784	5154048
93	85849	25153757	53	4609	986977	13	170569	70444997	73	3729	5823817
94	86436	25412184	54	5316	44361864	14	1396	957944	74	4676	6496424
95	87025	25672375	55	6025	738875	15	2225	71473375	75	5625	7171875
296	87616	25934336	356	126736	45118016	416	173056	71991296	476	226576	107850176
97	88209	26198073	57	7449	499293	17	3889	2511713	77	7529	8531333
98	88804	26463592	58	8164	882712	18	4724	3034632	78	8484	9215352
99	89401	26730899	59	8881	46268279	19	5561	560059	79	9441	9902239
300	90000	27000000	360	9600	656000	420	6400	74088000	480	230400	110592000
N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3

N	N^2	N^3
481	231361	111284641
82	2324	1980168
83	3289	2678587
84	4256	3379904
85	5225	4084125
486	236196	114791256
87	7169	5501303
88	8144	6214272
89	9121	6930169
90	240100	7649000
491	241081	118370771
92	2064	9095488
93	3049	9823157
94	4036	120553784
95	5025	1287375
496	246016	122023936
97	7009	2763473
98	8004	3505992
99	9001	4251499
500	250000	5000000
501	251001	125751501
02	2004	6506008
03	3009	7263527
04	4016	8024064
05	5025	8787625
506	256036	129554216
07	7049	130323843
08	8064	1096512
09	9081	1872229
10	260100	2651000
511	261121	133432831
12	2144	4217728
13	3169	5005697
14	4196	5796744
15	5225	6590875
516	266256	137388096
17	7289	8188413
18	8324	8991832
19	9361	9798359
20	270400	140608000
521	271441	141420761
22	2484	2236648
23	3529	3055667
24	4576	3877824
25	5625	4703125
526	276676	145531576
27	7729	6363183
28	8784	7197952
29	9841	8035889
30	280900	8877000
531	281961	149721291
32	3024	150568768
33	4089	1419437
34	5156	2273304
35	6225	3130375
536	287296	153990656
37	8369	4854153
38	9444	5720872
39	290521	6590819
540	1600	7464000
N	N^2	N^3

N	N^2	N^3
541	292681	158340421
42	3764	9220088
43	4849	160103007
44	5936	0989184
45	7025	1878625
546	298116	162771336
47	9209	3667323
48	300304	4566592
49	1401	5469149
50	2500	6375000
551	303601	167284151
52	4704	8196608
53	5809	9112377
54	6916	170031464
55	8025	0953875
556	309136	171879616
57	310249	2808693
58	1364	3741112
59	2481	4676879
60	3600	5616000
561	314721	176558481
62	5844	7504328
63	6969	8453547
64	8096	9406144
65	9225	180362125
566	320356	181321496
67	1489	2284263
68	2624	3250432
69	3761	4220009
70	4900	5193000
571	326041	186169411
72	7184	7149248
73	8329	8132517
74	9476	9119224
75	330625	190109375
576	331776	191102976
77	2929	2100033
78	4084	3100552
79	5241	4104539
80	6400	5112000
581	337561	196122941
82	8724	7137368
83	9889	8155287
84	341056	9176704
85	2225	200201625
586	343396	201230056
87	4569	2262003
88	5744	3297472
89	6921	4336469
90	8100	5379000
591	349281	206425071
92	350464	7474688
93	1649	8527857
94	2836	9584584
95	4025	210644875
596	355216	211708736
97	6409	2776173
98	7604	3847192
99	8801	4921799
600	360000	6000000
N	N^2	N^3

N	N^2	N^3
601	361201	217081801
02	2404	8167208
03	3609	9256227
04	4816	220348864
05	6025	1445125
606	367236	222545016
07	8449	3648543
08	9664	4755712
09	370881	5866529
10	2100	6981000
611	373321	228099131
12	4544	9220928
13	5769	230346397
14	6996	1475544
15	8225	2608375
616	379456	233744896
17	380689	4885113
18	1924	6029032
19	3161	7176659
20	4400	8328000
621	385641	239483061
22	6884	240641848
23	8129	1804367
24	9376	2970624
25	390625	4140625
626	391876	245314376
27	3129	491883
28	4384	7673152
29	5641	8858189
30	6900	250047000
631	398161	251239591
32	9424	2435968
33	400689	3636137
34	1956	4840104
35	3225	6047875
636	404496	257259456
37	5769	8474853
38	7044	9694072
39	8321	260917119
40	9600	2144000
641	410881	263374721
42	2164	4609288
43	3449	5847707
44	4736	7089984
45	6025	8336125
646	417316	269586136
47	8609	270840023
48	9904	2097792
49	421201	3359449
50	2500	4625000
651	423801	275894451
52	5104	7167808
53	6409	8445077
54	7716	9726264
55	9025	281011375
656	430336	282300416
57	1649	3593393
58	2964	4890312
59	4281	6191179
660	5600	7496000
N	N^2	N^3

N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3
661	436921	288804781	721	519841	374805361	781	609961	476379541
62	8244	290117528	22	521284	6367048	82	611524	8211768
63	9569	1434247	23	2729	7933067	83	3089	480048687
64	440896	2754944	24	4176	9503424	84	4656	1890304
65	2225	4079625	25	5625	381078125	85	6225	3736625
666	443556	295408296	726	527076	382657176	786	617796	485587656
67	4889	6740963	27	8529	4240583	87	9369	7443403
68	6224	8077632	28	9984	5828352	88	620944	9303872
69	7561	9418309	29	531441	7420489	89	2521	491169069
70	8900	300763000	30	2900	9017000	90	4100	3039000
671	450241	302111711	731	534361	390617891	791	625681	494913671
72	1584	3464448	32	5824	2223168	92	7264	6793088
73	2929	4821217	33	7289	3832837	93	8849	8677257
74	4276	6182024	34	8756	5446904	94	630436	500566184
75	5625	7546875	35	540225	7065375	95	2025	2459875
676	456976	308915776	736	541696	398688256	796	633616	504358336
77	8329	310288733	37	3169	400315553	97	5209	6261573
78	9684	1665752	38	4644	1947272	98	6804	8169592
79	461041	3046839	39	6121	3583419	99	8401	510082399
80	2400	4432000	40	7600	5224000	800	640000	2000000
681	463761	315821241	741	549081	406869021	801	641601	513922401
82	5124	7214568	42	550564	8518488	02	3204	5849608
83	6489	8611987	43	2049	410172407	03	4809	7781627
84	7856	320013504	44	3536	1830784	04	6416	9718464
85	9225	1419125	45	5025	3493625	05	8025	521660125
686	470596	322828856	746	556516	415160936	806	649636	523606616
87	1969	4242703	47	8009	6832723	07	651249	5557943
88	3344	5660672	48	9504	8508992	08	2864	7514112
89	4711	7082769	49	561001	420189749	09	4481	9475129
90	6100	8509000	50	2500	1875000	10	6100	531441000
691	477481	329939371	751	564001	423564751	811	657721	533411731
92	8864	331373888	52	5504	5259008	12	9344	5387328
93	480249	2812557	53	7009	6957777	13	660969	7367797
94	1636	4255384	54	8516	8661064	14	2596	9353144
95	3025	5701375	55	570025	430368875	15	4225	541343375
696	484416	337153536	756	571536	432081216	816	665856	543338496
97	5809	8608873	57	3049	3798093	17	7489	5338513
98	7204	340068392	58	4564	5519512	18	9124	7343432
99	8601	1532099	59	6081	7245479	19	670761	9353259
700	490000	3000000	60	7600	8976000	20	2400	551368000
701	491401	344472101	761	579121	440711081	821	674041	553387661
02	2804	5948408	62	580644	2450728	22	5684	5412248
03	4209	7428927	63	2169	4194947	23	7329	7441767
04	5616	8913664	64	3606	5943744	24	8976	9476224
05	7025	350402625	65	5225	7697125	25	680625	561515625
706	498436	351895816	766	586756	449455096	826	682276	563559976
07	9849	3393243	67	8289	451217663	27	3929	5609283
08	501264	4894912	68	9824	2984832	28	5584	7663552
09	2681	6400829	69	591361	4756609	29	7241	9722789
10	4100	7911000	70	2900	6533000	30	8900	571787000
711	505521	359425431	771	594441	458314011	831	690561	573856191
12	6944	360944128	72	5984	460099648	32	2224	5930368
13	8369	2467097	73	7529	1889917	33	3889	8009537
14	9796	3994344	74	9076	3684824	34	5556	580093704
15	511225	5525875	75	600625	5484375	35	7225	2182875
716	512656	367061696	776	602176	467288576	836	698896	584277056
17	4089	8601813	77	3729	9097433	37	700569	6376253
18	5524	370146232	78	5284	470910952	38	2244	8480472
19	6961	1694959	79	6841	2729139	39	3921	590589719
720	8400	3248000	80	8400	4552000	840	5600	2704000
N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3

N	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
841	707281	594823321	901	811801	731432701	961	923521	887503681
42	8964	6947688	02	3604	3870808	62	5444	890277128
43	710649	9077107	03	5409	6314327	63	7369	3056347
44	2336	601211584	04	7216	8763264	64	9296	5841344
45	4025	3351125	05	9025	741217625	65	931225	8632125
846	715716	605495736	906	820836	743677416	966	933156	901428696
47	7409	7645423	07	2649	6142643	67	5089	4231063
48	9104	9800192	08	4464	8613312	68	7024	7039232
49	720801	611960049	09	6281	751089429	69	8961	9853209
50	2500	4125000	10	8100	3571000	70	940900	912673000
851	724201	616295051	911	829921	756058031	971	942841	915498611
52	5904	8470208	12	831744	8550528	72	4784	8330048
53	7609	620650477	13	3569	761048497	73	6729	921167317
54	9316	2835864	14	5396	3551944	74	8676	4010424
55	731025	5026375	15	7225	6060875	75	950625	6859375
856	732736	627222016	916	839056	768575296	976	952576	929714176
57	4449	9422793	17	840889	771095213	77	4529	932574833
58	6164	631628712	18	2724	3620632	78	6484	5441352
59	7881	3839779	19	4561	6151559	79	8441	8313739
60	9600	6056000	20	6400	8688000	80	960400	941192000
861	741321	638277381	921	848241	781229961	981	962361	944076141
62	3044	640503928	22	850084	3777448	82	4324	6966168
63	4769	2735647	23	1929	6330467	83	6289	9862087
64	6496	4972548	24	3776	8890024	84	8256	952763904
65	8225	7214625	25	5625	791453125	85	970225	5671625
866	749956	649461896	926	857476	794022776	986	972196	958585256
67	751689	651714363	27	9329	6597983	87	4169	961504803
68	3424	3972032	28	861184	9178752	88	6144	4430272
69	5161	6234909	29	3041	801765089	89	8121	7361669
70	6900	8503000	30	4900	4357000	90	980100	970299000
871	758641	660776311	931	866761	806954491	991	982081	973242271
72	760384	3054848	32	8624	9557568	92	4064	6191488
73	2129	5338617	33	870489	812166237	93	6049	9146657
74	3876	7627624	34	2356	4780504	94	8036	982107784
75	5625	9921875	35	4225	7400375	95	990025	5074875
876	767376	672221376	936	876096	820025856	96	992016	988047936
77	9129	4526133	37	7969	2656953	97	4009	991026973
78	770884	6836152	38	9844	5293672	98	6004	4011992
79	2641	9151439	39	881721	7936019	99	8001	7002999
80	4400	681472000	40	3600	830584000	1000	1000000	1000000000
881	776161	683797841	941	885481	833237621	1001	1002001	1003003001
82	7924	6128968	42	7364	5896888	02	04004	06012008
83	9689	8465387	43	9249	8561807	03	06009	09027027
84	781456	690807104	44	891136	841232384	04	08016	12048064
85	3225	3154125	45	3025	3908625	05	10025	15075125
886	784996	695506456	946	894916	846590536	1006	1012036	1018108216
87	6769	7864103	47	6809	9278123	07	14049	21147343
88	8544	700227072	48	8704	851971392	08	16064	24192512
89	790321	2595369	49	900601	4670349	09	18081	27243729
90	2100	4969000	50	2500	7375000	10	20100	30301000
891	793881	707347971	951	904401	860085351	1011	1022121	1033364331
92	5664	9732288	52	6304	2801408	12	24144	36433728
93	7449	712121957	53	8209	5523177	13	26169	39509197
94	9236	4516984	54	910116	8250664	14	28196	42590744
95	801025	6917375	55	2025	870983875	15	30225	45678375
896	802816	719323136	956	913936	873722816	1016	1032256	1048772096
97	4609	721734273	57	5849	6467493	17	34289	51871913
99	6404	4150792	58	7764	9217912	18	36324	54977832
90	8201	6572699	59	9681	881974079	19	38361	58089859
900	810000	9000000	60	921600	4736000	1020	40400	61208000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3
1021	1042441	1064332261	1081	1168561	1263214441	1141	1301881	1485446221
22	44484	67462648	82	70724	66723368	42	04164	89355288
23	46529	70599167	83	72889	70238787	43	06449	93271207
24	48576	73741824	84	75056	73760704	44	08736	97193984
25	50625	76890625	85	77225	77289125	45	11025	1501123625
1026	1052676	1080045576	1086	1179396	1280824056	1146	1313316	1505060136
27	54729	83206683	87	81569	84365503	47	15609	09003523
28	56784	86373952	88	83744	87913472	48	17904	12953792
29	58841	89547389	89	85921	91467969	49	20201	16910949
30	60900	92727000	90	88100	95029000	50	22500	20875000
1031	1062961	1095912791	1091	1190281	1298596571	1151	1324801	1524845951
32	65024	99104768	92	92464	1302170688	52	27104	28823808
33	67089	1102302937	93	94649	05751357	53	29409	32808577
34	69156	05507304	94	96836	09338584	54	31716	36800264
35	71225	08717875	95	99025	12932375	55	34025	40798875
1036	1073296	1111934656	1096	1201216	1316532736	1156	1336336	1544804416
37	75369	15157653	97	03409	20139673	57	38649	48816893
38	77444	18386872	98	05604	23753192	58	40964	52836312
39	79521	21622319	99	07801	27373299	59	43281	56862679
40	81600	24864000	1100	10000	31000000	60	45600	60896000
1041	1083681	1128111921	1101	1212201	1334633301	1161	1347921	1564936281
42	85764	31366088	02	14404	38273208	62	50244	68983528
43	87849	34626507	03	16609	41919727	63	52569	73037747
44	89936	37893184	04	18816	45572864	64	54896	77098944
45	92025	41166125	05	21025	49232625	65	57225	81167125
1046	1094116	1144445336	1106	1223236	1352899016	1166	1359556	1585242296
47	96209	47730823	07	25449	56572043	67	61889	89324463
48	98304	51022592	08	27664	60251712	68	64224	93413632
49	1100401	54320649	09	29881	63938029	69	66561	97509809
50	02500	57625000	10	32100	67631000	70	68900	1601613000
1051	1104601	1160935651	1111	1234321	1371330631	1171	1371241	1605723211
52	06704	64252608	12	36544	75036928	72	73584	09840448
53	08809	67575877	13	38769	78749897	73	75929	13964717
54	10916	70905464	14	40996	82469544	74	78276	18096024
55	13025	74241375	15	43225	86195875	75	80625	22234375
1056	1115136	1177583616	1116	1245456	1389928896	1176	1382976	1626379776
57	17249	80932193	17	47689	93668613	77	85329	30532233
58	19364	84287112	18	49924	97415032	78	87684	34691752
59	21481	87648379	19	52161	1401168159	79	90041	38858339
60	23600	91016000	20	54400	04928000	80	92400	43032000
1061	1125721	1194389981	1121	1256641	1408694561	1181	1394761	1647212741
62	27844	97770328	22	58884	12467848	82	97124	51400568
63	29969	1201157047	23	61129	16247867	83	99489	55595487
64	32096	04550144	24	63376	20034624	84	1401856	59797504
65	34225	07949625	25	65625	23828125	85	04225	64006625
1066	1136356	1211355496	1126	1267876	1427628376	1186	1406596	1668222856
67	38489	14767763	27	70129	31435383	87	08969	72446203
68	40624	18186432	28	72384	35249152	88	11344	76676672
69	42761	21611509	29	74641	39069689	89	13721	80914269
70	44900	25043000	30	76900	42897000	90	16100	85159000
1071	1147041	1228480911	1131	1279161	1446731091	1191	1418481	1689410871
72	49184	31925248	32	81424	50571968	92	20864	93669888
73	51329	35376017	33	83689	54419637	93	23249	97936057
74	53476	38833224	34	85956	58274104	94	25636	1702209384
75	55625	42296875	35	88225	62135375	95	28025	06489875
1076	1157776	1245766976	1136	1290496	1466003456	1196	1430416	1710777536
77	59929	49243533	37	92769	69878353	97	32809	15072373
78	62084	52726552	38	95044	73760072	98	35204	19374392
79	64241	56216039	39	97321	77648619	99	37601	23683599
1080	66400	59712000	1140	99600	81544000	1200	40000	28000000
N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
781	.	83	37	19	3	7	3	191	.	3	7	3	23	11	.	.	3	13	3	17
82	3	.	3	197	7	3	17	3	11	19	137	.	3	.	3	7	.	3	13	3
83	.	3	.	3	.	71	.	17	3	7	3	29	11	3	7	3	.	157	.	47
84	.	13	7	89	3	19	3	11	7	3	.	3	107	41	.	.	3	47	3	7
85	3	29	3	.	.	3	.	3	233	17	19	11	3	7	3	.	.	3	7	3
786	83	3	.	3	13	127	7	29	3	.	3	61	7	3	13	3	19	.	31	.
87	7	211	.	31	3	.	3	223	.	3	11	3	131	43	.	71	3	7	3	11
88	3	.	3	.	53	3	269	3	23	.	7	17	3	31	3	.	7	3	37	3
89	.	3	19	3	7	23	53	.	3	13	3	.	17	3	193	3	.	89	11	13
90	13	199	41	7	3	11	3	31	19	3	13	3	.	17	7	.	3	.	3	137
791	3	.	3	239	.	3	61	3	7	11	67	53	3	.	3	.	29	3	.	3
92	.	3	103	3	11	113	37	7	3	227	3	.	.	3	17	3	.	109	7	19
93	.	7	71	.	3	13	3	.	11	3	23	3	7	.	.	13	3	11	3	.
94	3	271	3	11	.	3	13	3	43	.	.	7	3	.	3	19	17	3	53	3
95	107	3	43	3	23	7	131	11	3	281	3	67	.	3	.	3	7	17	13	.
796	.	23	11	.	3	.	3	103	.	3	.	3	.	.	97	7	3	73	3	23
97	3	13	3	7	79	3	11	3	29	7	61	13	3	71	3	11	23	3	17	3
98	.	3	7	3	.	.	.	19	3	.	3	.	97	3	29	3	.	.	.	7
99	.	.	.	41	3	157	5	7	229	3	257	3	67	7	11	.	3	.	3	31
800	3	7	3	19	29	3	7	3	.	43	79	191	3	163	3	.	13	3	11	3
801	7	3	.	3	.	11	113	13	3	19	3	7	227	3	127	3	.	7	.	.
02	11	139	.	.	3	7	3	97	.	3	7	3	.	.	19	.	3	29	3	13
03	3	131	3	.	7	3	.	3	31	47	13	.	3	11	3	7	.	3	.	3
04	37	3	.	3	191	97	29	137	3	7	3	.	13	3	7	3	257	11	.	.
05	79	19	7	11	3	.	3	73	7	3	.	3	11	29	.	43	3	239	3	7
806	3	.	3	149	.	3	19	3	.	37	.	.	3	7	3	13	11	3	7	3
07	.	3	11	3	43	.	7	53	3	89	3	11	7	3	.	3	263	13	.	.
08	7	.	19	.	3	211	3	.	13	3	131	3	.	.	229	11	3	7	3	.
09	3	17	3	.	.	3	.	3	19	.	7	.	3	.	3	29	7	3	61	3
10	.	3	59	3	7	.	.	.	3	.	3	13	.	3	11	3	.	.	.	.
811	.	11	13	7	3	29	3	.	23	3	31	3	.	13	7	41	3	53	3	19
12	3	.	3	17	13	3	241	3	7	.	43	29	3	.	3	.	137	3	113	3
13	11	3	.	3	17	31	233	7	3	11	3	167	.	3	163	3	13	.	7	.
14	.	7	127	.	3	17	3	13	.	3	107	3	7	11	31	.	3	23	3	79
15	3	149	3	.	37	3	.	3	11	13	.	7	3	.	3	67	73	3	.	3
816	13	3	79	3	.	7	17	.	3	31	3	.	11	3	.	3	7	19	.	.
17	.	.	.	101	3	41	3	11	71	3	.	3	13	37	.	7	3	43	3	.
18	3	179	3	7	23	3	.	3	17	7	47	11	3	19	3	.	223	3	.	3
19	.	3	7	3	101	13	11	.	3	17	3	.	.	3	.	3	67	.	19	7
20	43	.	.	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	.	.	3	13	3	11
821	3	7	3	47	157	3	7	3	13	41	17	.	3	23	3	.	.	3	13	3
22	7	3	.	3	229	19	.	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	11	233
23	.	13	.	53	3	7	3	263	191	3	7	3	17	281	137	.	3	67	3	.
24	3	19	3	23	7	3	73	3	.	11	139	31	3	13	3	7	19	3	29	3
25	17	3	.	3	11	109	19	179	3	7	3	.	.	3	7	3	59	197	23	.
826	.	17	7	.	3	.	3	.	7	3	53	3	19	.	17	23	3	11	3	7
27	3	191	3	11	107	3	181	3	.	.	.	.	3	7	3	17	97	3	7	3
28	31	3	17	3	.	.	7	11	3	13	3	113	7	3	.	3	11	37	.	13
29	7	.	11	17	3	.	3	283	101	3	13	3	127	239	197	.	3	7	3	109
30	3	.	3	.	17	3	11	3	61	.	7	79	3	43	3	11	7	3	.	3
831	.	3	41	3	7	17	.	43	3	101	3	97	59	3	.	3	71	29	17	11
32	19	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	.	.	7	13	3	.	3	17
33	3	11	3	227	.	3	13	3	7	97	103	23	3	167	3	.	.	3	11	3
34	.	3	.	3	239	11	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	181	.	7	.
35	11	7	113	37	3	23	3	47	17	3	101	3	7	103	.	139	3	19	3	29
836	3	13	3	.	11	3	.	3	.	17	241	7	3	11	3	.	.	3	233	3
37	.	3	13	3	97	7	.	.	3	29	3	101	31	3	.	3	7	11	83	89
38	47	181	43	11	3	.	3	79	109	3	17	3	11	.	13	7	3	.	3	191
39	3	.	3	7	.	3	31	3	.	7	23	17	3	.	3	.	11	3	127	3
40	167	3	7	3	.	29	.	13	3	73	3	11	17	3	19	3	31	229	.	7
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
781	31	3	.	3	47	.	.	7	3	.	3	.	37	3	41	3	.	.	7	11
82	17	7	139	.	3	61	3	23	29	3	.	3	7	.	11	79	3	59	3	13
83	3	11	3	127	23	3	.	3	109	181	13	7	3	103	3	43	277	3	11	3
84	19	3	67	3	31	7	.	131	3	97	3	.	13	3	.	3	7	53	.	23
85	11	.	17	13	3	251	3	.	.	3	.	3	179	.	89	7	3	.	3	53
786	3	.	3	7	11	3	97	3	151	7	29	19	3	11	3	13	.	3	.	3
87	61	3	7	3	17	79	13	227	3	37	3	.	.	3	.	3	.	11	.	7
88	29	.	.	11	3	17	3	7	13	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	257
89	3	7	3	23	281	3	7	3	157	151	.	.	3	19	3	.	11	3	197	3
90	7	3	11	3	173	.	17	37	3	107	3	7	31	3	.	3	139	7	19	83
791	.	.	13	.	3	7	3	17	41	3	7	3	.	13	.	11	3	.	3	29
92	3	41	3	.	7	3	31	3	17	.	11	.	3	.	3	7	37	3	179	3
93	73	3	.	3	61	19	.	139	3	7	3	.	163	3	7	3	13	.	.	.
94	.	11	7	181	3	229	3	13	7	3	19	3	.	61	101	29	3	.	3	7
95	3	19	3	.	.	3	251	3	47	13	17	.	3	7	3	.	19	3	7	3
796	11	3	.	3	37	29	7	.	3	11	3	17	7	3	.	3	.	.	.	.
97	7	173	.	47	3	31	3	.	241	3	.	3	13	11	23	73	3	7	3	199
98	3	47	3	13	.	3	.	3	11	.	7	23	3	17	3	.	7	3	109	3
99	17	3	37	3	7	13	.	211	3	.	3	.	11	3	.	3	41	167	.	.
800	.	17	223	7	3	23	3	11	.	3	.	3	73	53	7	283	3	13	3	173
801	3	.	3	71	19	3	.	3	7	.	.	11	3	181	3	17	.	3	13	3
02	.	3	17	3	83	.	11	7	3	.	3	.	43	3	.	3	17	23	7	59
03	19	7	107	17	3	.	3	.	179	3	11	3	7	31	.	19	3	7	3	11
04	3	43	3	61	17	3	67	3	.	.	23	7	3	13	3	.	.	3	101	3
05	109	3	.	3	13	7	.	23	3	197	3	19	61	3	13	3	7	83	11	.
806	.	59	.	79	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	17
07	3	23	3	7	.	3	17	3	37	7	.	.	3	.	3	.	173	3	43	3
08	233	3	7	3	11	.	193	17	3	13	3	31	29	3	47	3	23	41	.	7
09	13	.	73	19	3	.	3	7	11	3	13	3	47	7	109	.	3	11	3	107
10	3	7	3	11	103	3	7	3	.	17	.	89	3	.	3	131	83	3	.	3
811	7	3	.	3	277	.	23	11	3	.	3	7	.	3	19	3	11	7	.	.
12	31	193	11	23	3	7	3	181	67	3	7	3	.	.	29	13	3	.	3	.
13	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	19	17	3	97	3	7	199	3	23	3
14	47	3	.	3	29	.	41	257	3	7	3	59	17	3	7	3	19	227	13	11
15	.	.	7	.	3	.	3	.	7	3	29	3	23	17	11	83	3	139	3	7
816	3	11	3	37	127	3	.	3	.	23	.	13	3	7	3	.	151	3	7	3
17	29	3	13	3	.	11	7	.	3	.	3	53	7	3	17	3	89	263	157	.
18	7	.	23	109	3	71	3	.	19	3	41	3	37	.	13	17	3	7	3	.
19	3	.	3	41	11	3	.	3	.	.	7	73	3	11	3	163	7	3	167	3
20	.	3	31	3	7	137	.	13	3	.	3	211	79	3	23	3	103	11	53	19
821	113	.	29	7	3	.	3	127	.	3	37	3	11	.	7	.	3	.	3	13
22	3	83	3	43	.	3	.	3	7	29	13	.	3	107	3	19	11	3	17	3
23	.	3	11	3	.	23	31	7	3	.	3	11	13	3	.	3	47	.	7	17
24	41	7	.	13	3	.	3	.	.	3	67	3	7	.	.	11	3	.	3	.
25	3	31	3	.	.	3	.	3	.	71	11	7	3	269	3	13	.	3	151	3
826	.	3	.	3	131	7	13	19	3	47	3	29	89	3	11	3	7	13	41	.
27	83	11	.	.	3	.	3	37	13	3	23	3	.	19	.	7	3	.	3	.
28	3	29	3	7	41	3	173	3	79	7	179	67	3	.	3	.	.	3	19	3
29	11	3	7	3	23	.	163	29	3	11	3	13	.	3	31	3	37	149	.	7
30	53	23	13	.	3	.	3	7	.	3	.	3	251	7	19	.	3	.	3	23
831	3	7	3	137	13	3	7	3	11	31	.	223	3	193	3	41	23	3	271	3
32	7	3	.	3	139	53	.	.	3	.	3	7	11	3	37	3	13	7	31	.
33	17	19	.	31	3	7	3	11	263	3	7	3	199	.	61	.	3	89	3	.
34	3	17	3	.	7	3	19	3	.	13	.	11	3	31	3	7	29	3	.	3
35	13	3	.	3	.	.	11	193	3	7	3	.	19	3	7	3	.	179	.	41
836	23	.	7	269	3	.	3	31	7	3	11	3	13	67	53	.	3	127	3	7
37	3	61	3	13	.	3	211	3	19	.	.	199	3	7	3	23	.	3	7	3
38	71	3	.	3	17	13	7	.	3	.	3	37	7	3	149	3	.	43	11	53
39	7	37	59	113	3	11	3	.	131	3	79	3	137	.	.	47	3	7	3	19
840	3	.	3	.	.	3	.	3	13	11	7	83	3	47	3	.	7	3	13	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
841	37	31	151	241	3	19	3	7	.	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	13
42	3	7	3	107	.	3	7	3	.	.	11	.	3	131	3	.	61	3	.	3
43	7	3	.	3	59	.	.	.	3	37	3	7	13	3	11	3	19	7	.	.
44	.	11	.	13	3	7	3	29	.	3	7	3	.	23	.	17	3	.	3	.
5	3	.	3	.	7	3	223	3	.	.	181	137	3	.	3	7	17	3	59	3
846	11	3	19	3	211	191	13	37	3	7	3	.	.	3	7	3	53	13	47	.
47	.	71	7	23	3	.	3	.	7	3	193	3	.	11	.	101	3	83	3	7
48	3	137	3	.	.	3	89	3	11	271	.	41	3	7	3	43	37	3	7	3
49	59	3	197	3	19	.	7	.	3	163	3	13	7	3	157	3	29	173	.	17
50	7	167	13	.	3	151	3	11	.	3	.	3	23	13	.	277	3	7	3	.
851	3	.	3	.	13	3	47	3	.	23	7	11	3	.	3	19	7	3	.	3
52	.	3	139	3	7	.	11	31	3	.	3	.	29	3	.	3	13	.	.	163
53	197	.	23	7	3	.	3	13	41	3	11	3	.	.	7	61	3	31	3	11
54	3	41	3	223	.	3	229	3	7	13	.	.	3	37	3	.	43	3	.	3
55	13	3	37	3	233	.	.	7	3	.	3	31	.	3	23	3	113	131	7	.
856	.	7	.	59	3	11	3	.	.	3	.	3	7	19	29	.	3	.	3	41
57	3	.	3	13	.	3	.	3	23	11	59	7	3	.	3	83	179	3	19	3
58	139	3	53	3	11	7	.	.	3	19	3	.	.	3	.	3	7	.	.	293
59	17	.	271	.	3	53	3	151	11	3	29	3	.	.	19	7	3	11	3	61
60	3	17	3	7	.	3	.	3	13	7	.	.	3	227	3	97	139	3	13	3
861	19	3	7	3	.	.	.	11	3	71	3	43	.	3	.	3	11	.	277	7
62	.	13	11	.	3	73	3	7	151	3	23	3	53	7	83	.	3	.	3	.
63	3	7	3	17	.	3	7	3	37	.	173	131	3	13	3	11	.	3	79	3
64	7	3	71	3	13	.	103	89	3	.	3	7	19	3	13	3	.	7	137	11
65	.	23	19	.	3	7	3	241	31	3	7	3	.	.	11	.	3	37	3	23
866	3	11	3	257	7	3	37	3	19	29	.	.	3	41	3	7	23	3	11	3
67	277	3	31	3	.	11	17	.	3	7	3	.	43	3	7	3	127	.	223	13
68	11	61	7	47	3	.	3	17	7	3	13	3	31	71	.	37	3	.	3	.
69	3	43	3	233	11	3	23	3	17	.	.	.	3	7	3	.	227	3	7	3
70	19	3	167	3	.	.	7	173	3	17	3	29	7	3	.	3	.	11	61	.
871	7	.	.	11	3	13	3	.	.	3	151	3	11	.	79	13	3	7	3	.
72	3	29	3	37	.	3	13	3	.	.	7	19	3	83	3	23	7	3	43	3
73	67	3	11	3	7	.	.	29	3	.	3	11	23	3	.	3	167	19	13	113
74	71	.	.	7	3	61	3	19	.	3	.	3	17	.	7	11	3	.	3	157
75	3	13	3	.	.	3	.	3	7	.	11	13	3	17	3	.	.	3	.	3
876	17	3	13	3	79	.	41	7	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	7	.
77	.	7	229	139	3	239	3	.	.	3	37	3	7	59	13	.	3	.	3	47
78	3	.	3	277	.	3	137	3	53	31	71	7	3	.	3	17	13	3	107	3
79	11	3	17	3	.	7	.	13	3	11	3	23	.	3	47	3	7	.	31	37
80	.	.	.	17	3	283	3	.	23	3	19	3	47	11	.	7	3	17	3	13
881	3	19	3	7	17	3	.	3	11	7	13	.	3	31	3	53	19	3	181	3
82	193	3	7	3	.	17	19	47	3	.	3	83	11	3	.	3	.	79	17	7
83	.	227	233	13	3	47	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	23	3	17
84	3	7	3	211	.	3	7	3	29	.	.	11	3	191	3	13	59	3	241	3
85	7	3	67	3	61	.	11	17	3	.	3	7	223	3	29	3	37	7	.	73
886	41	251	.	.	3	7	3	23	13	3	7	3	263	61	151	137	3	.	3	11
87	3	107	3	43	7	3	79	3	.	17	83	.	3	89	3	7	.	3	.	3
88	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	13	211	3	7	3	73	.	11	23
89	19	.	7	67	3	11	3	.	7	3	17	3	113	13	.	19	3	29	3	7
90	3	.	3	.	13	3	.	3	.	11	127	17	3	7	3	269	.	3	7	3
891	.	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	13	97	239	59
92	7	.	37	.	3	.	3	13	11	3	.	3	.	17	.	233	3	7	3	31
93	3	.	3	11	31	3	.	3	179	13	7	.	3	157	3	41	7	3	47	3
94	13	3	29	3	7	.	.	11	3	223	3	37	.	3	17	3	11	.	23	.
95	.	37	11	7	3	.	3	.	.	3	.	3	13	.	7	17	3	151	3	149
896	3	.	3	13	.	3	11	3	7	19	.	47	3	.	3	11	17	3	157	3
97	271	3	109	3	283	13	73	7	3	23	3	53	61	3	19	3	43	17	7	11
98	89	7	31	.	3	19	3	.	.	3	43	3	7	.	11	.	3	13	3	.
99	3	11	3	.	47	3	.	3	13	.	19	7	3	139	3	.	53	3	11	3
900	.	3	.	3	.	7	.	.	3	.	3	197	.	3	179	3	7	127	53	17
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
841	19	3	213	3	7	.	17	73	3	41	3	.	.	3	29	3	.	59	269	.
42	173	13	109	7	3	.	3	17	11	3	71	3	271	89	7	31	3	11	3	.
43	3	67	3	11	29	3	239	3	7	139	.	19	3	13	3	.	.	3	37	3
44	79	3	.	3	13	.	.	7	3	17	3	23	.	3	13	3	11	19	7	.
45	.	7	11	.	3	103	3	19	23	3	83	3	7	41	251	.	3	29	3	31
846	3	1	3	.	31	3	11	3	227	.	17	7	3	19	3	11	.	3	.	3
47	.	3	131	3	.	7	29	103	3	13	3	17	149	3	.	3	7	.	19	11
48	13	53	.	.	3	113	3	.	.	3	13	3	17	29	11	7	3	23	3	73
49	3	11	3	7	.	3	.	3	31	7	.	.	3	17	3	37	.	3	11	3
50	17	3	7	3	.	11	257	97	3	241	3	149	.	3	.	3	.	.	43	7
851	11	17	31	.	3	13	3	7	53	3	19	3	103	7	17	13	3	.	3	.
52	3	7	3	.	11	3	7	3	71	269	53	107	3	11	3	17	19	3	.	3
53	7	3	17	3	.	.	19	.	3	59	3	7	.	3	103	3	17	7	13	23
54	.	.	97	11	3	7	3	.	127	3	7	3	11	73	.	53	3	17	3	193
55	3	13	3	67	7	3	41	3	.	83	.	13	3	23	3	7	11	3	.	3
856	97	3	11	3	.	17	.	.	3	7	3	11	47	3	7	3	.	67	17	43
57	.	29	7	191	3	139	3	199	7	3	31	3	.	109	13	11	3	.	3	7
58	3	.	3	23	19	3	17	3	43	79	11	157	3	7	3	.	13	3	7	3
59	23	3	43	3	67	31	7	13	3	149	3	127	7	3	11	3	.	113	23	.
60	7	11	47	41	3	89	3	.	17	3	.	3	59	.	31	19	3	7	3	13
861	3	101	3	29	.	3	199	3	.	17	7	.	3	.	3	79	7	3	.	3
62	11	3	.	3	7	.	281	.	3	11	3	19	13	3	.	3	.	.	3	211
63	.	.	.	7	3	67	3	.	.	3	17	3	.	11	7	.	3	19	.	.
64	3	.	3	31	.	3	.	3	7	43	.	17	3	197	3	13	.	3	67	3
65	41	3	101	3	.	107	13	7	3	.	3	.	11	3	.	3	131	13	7	.
866	73	7	193	19	3	79	3	11	13	3	.	3	7	17	23	.	3	.	3	181
67	3	.	3	101	53	3	.	3	.	19	107	7	3	.	3	59	229	3	29	3
68	.	3	.	3	.	7	11	.	3	109	3	13	283	3	17	3	7	31	113	67
69	.	89	13	.	3	19	3	.	29	3	11	3	.	13	37	7	3	.	3	11
70	3	263	3	7	13	3	83	3	.	7	19	31	3	.	3	73	17	3	251	3
871	.	3	7	3	43	101	67	61	3	179	3	.	.	3	.	3	13	17	11	7
72	.	.	.	71	3	11	3	7	197	3	.	3	.	7	191	41	3	.	3	.
73	3	7	3	.	199	3	7	3	41	11	23	59	3	.	3	31	281	3	17	3
74	7	3	19	3	11	149	47	23	3	.	3	7	.	3	89	3	.	7	59	17
75	29	.	.	.	3	7	3	67	11	3	7	3	13	.	.	.	3	11	3	251
876	3	23	3	11	7	3	29	3	.	73	43	.	3	.	3	7	.	3	.	3
77	.	3	127	3	19	13	.	11	3	7	3	61	41	3	7	3	11	.	.	19
78	59	.	7	103	3	41	3	.	7	3	.	3	.	23	.	179	3	13	3	7
79	3	281	3	.	.	3	11	3	13	.	.	97	3	7	3	11	.	3	7	3
80	191	3	173	3	107	83	7	.	3	29	3	.	7	3	59	3	137	.	37	11
881	7	13	199	23	3	131	3	.	37	3	.	3	109	163	11	29	3	7	3	89
82	3	11	3	.	.	3	61	3	103	41	7	43	3	13	3	.	7	3	11	3
83	53	3	149	3	7	11	97	19	3	67	3	.	31	3	13	3	157	37	.	109
84	11	197	53	7	3	.	3	.	.	3	103	3	23	19	7	107	3	.	3	.
85	3	17	3	19	11	3	31	3	7	23	101	283	3	11	3	.	.	3	19	3
886	.	3	.	3	.	.	.	7	3	13	3	71	.	3	131	3	31	11	7	13
87	13	7	17	11	3	37	3	29	.	3	13	3	7	47	19	.	3	.	3	.
88	3	.	3	17	.	3	.	3	181	.	31	7	3	.	3	103	11	3	.	3
89	.	3	11	3	17	7	43	.	3	193	3	11	101	3	23	3	7	.	.	61
90	.	19	.	29	3	13	3	.	.	3	281	3	229	.	.	7	3	41	3	139
891	3	.	3	7	163	3	13	3	23	7	11	257	3	101	3	.	79	3	191	3
92	149	3	7	3	.	23	17	.	3	.	3	73	19	3	11	3	29	.	13	7
93	199	11	19	193	3	.	3	7	.	3	139	3	.	7	.	71	3	.	3	.
94	3	7	3	.	137	3	7	3	17	131	.	13	3	43	3	109	.	3	31	3
95	7	3	13	3	.	.	.	43	3	11	3	7	29	3	101	3	.	7	.	.
896	37	.	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	13	.	3	257	3	19
97	3	.	3	.	7	3	.	3	11	107	17	.	3	.	3	7	13	3	.	3
98	19	3	59	3	23	73	.	13	3	7	3	17	11	3	7	3	.	241	.	.
99	293	23	7	.	3	.	3	11	7	3	.	13	17	.	29	.	3	31	3	7
900	3	.	3	.	113	3	.	3	.	.	13	11	3	7	3	.	23	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
901	11	13	.	251	3	97	3	227	.	3	.	3	193	173	23	7	3	109	3	.
02	3	.	3	7	11	3	.	3	83	7	.	23	3	11	3	.	31	3	.	3
03	73	3	7	3	13	.	37	181	3	41	3	59	103	3	13	3	61	11	167	7
04	.	.	.	11	3	23	3	7	19	3	31	3	11	7	.	.	3	149	3	151
05	3	7	3	29	.	3	7	3	131	.	.	.	3	.	3	37	11	3	.	3
906	7	3	11	3	19	31	.	.	3	13	3	7	.	3	233	3	.	7	.	13
07	13	.	61	.	3	7	3	83	257	3	7	3	.	41	31	11	3	103	3	.
08	3	.	3	71	7	3	197	3	.	.	11	61	3	.	3	7	.	3	.	3
09	.	3	.	3	.	229	.	23	3	7	3	79	.	3	7	3	211	199	.	103
10	17	11	7	.	3	13	3	.	7	3	227	3	29	.	59	13	3	181	3	7
911	3	17	3	31	179	3	13	3	.	293	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3
12	11	3	223	3	197	53	7	19	3	11	3	.	7	3	.	3	23	.	13	.
13	7	.	17	.	3	127	3	53	29	3	271	3	.	11	149	241	3	7	3	167
14	3	13	3	17	.	3	113	3	11	.	7	13	3	.	3	61	7	3	19	3
15	37	3	13	3	7	.	23	71	3	19	3	.	11	3	239	3	.	31	43	83
916	139	47	101	7	3	17	3	11	.	3	59	3	.	43	7	.	3	113	3	37
17	3	.	3	293	.	3	41	3	7	37	29	11	3	.	3	199	13	3	23	3
18	.	3	.	3	.	.	11	7	3	.	3	229	131	3	.	.	.	29	7	53
19	29	7	73	.	3	107	3	17	.	3	11	3	7	149	89	.	3	.	3	11
20	3	.	3	.	101	3	19	3	17	23	13	7	3	.	3	31	.	3	83	3
921	31	3	.	3	.	7	251	.	3	17	3	181	13	3	199	3	7	.	11	43
22	137	.	19	13	3	11	3	.	.	3	.	3	149	.	.	7	3	.	3	29
23	3	241	3	7	.	3	.	3	19	7	17	127	3	.	3	13	107	3	.	3
24	.	3	7	3	11	.	13	.	3	29	3	17	.	3	23	3	97	13	193	7
25	233	.	.	79	3	71	3	7	11	3	67	3	17	7	37	29	3	11	3	19
926	3	7	3	11	37	3	7	3	23	.	.	211	3	17	3	.	.	3	.	3
27	7	3	.	3	83	23	.	11	3	.	3	7	47	3	.	3	11	7	163	137
28	.	17	11	.	3	7	3	101	.	3	7	3	.	13	17	263	3	227	3	.
29	3	61	3	53	7	3	11	3	.	43	.	19	3	199	3	7	.	3	41	3
30	.	3	17	3	281	47	191	167	3	7	3	41	31	3	7	3	13	19	.	11
931	157	.	7	17	3	.	3	13	7	3	23	3	.	.	11	.	3	17	3	7
32	3	11	3	83	17	3	31	3	73	13	53	.	3	7	3	.	.	3	7	3
33	13	3	.	3	23	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	31	269	17	277
34	7	23	.	29	3	109	3	.	103	3	.	3	13	233	223	41	3	7	3	17
35	3	.	3	13	11	3	17	3	41	.	7	.	3	11	3	89	7	3	139	3
936	.	3	.	3	7	13	179	17	3	251	3	.	109	3	.	3	29	11	37	71
37	.	.	83	7	3	31	3	.	17	3	19	3	11	67	7	.	3	13	3	241
38	3	19	3	.	.	3	23	3	7	17	.	101	3	103	3	107	11	3	13	3
39	.	3	11	3	.	.	19	7	3	.	3	11	29	3	.	3	.	37	7	.
40	23	7	.	.	3	41	3	149	167	3	17	3	7	.	271	11	3	157	3	.
941	3	139	3	.	.	3	.	3	.	61	11	7	3	13	3	23	47	3	31	3
42	.	3	.	3	13	7	71	.	3	59	3	.	17	3	11	3	7	73	79	307
43	181	11	.	.	3	37	3	257	.	3	.	3	.	17	29	7	3	.	3	.
44	3	67	3	7	19	3	263	3	.	7	.	89	3	.	3	.	.	3	.	3
45	11	3	7	3	29	.	47	31	3	11	3	.	.	3	17	3	.	.	.	7
946	13	.	89	37	3	.	3	7	.	3	13	3	173	7	101	17	3	31	3	.
47	3	7	3	.	53	3	7	3	11	.	.	43	3	61	3	211	17	3	.	3
48	7	3	113	3	.	59	53	.	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.
49	43	.	.	107	3	7	3	11	23	3	7	3	59	.	139	13	3	19	3	.
50	3	.	3	.	7	3	13	3	.	167	.	11	3	29	3	7	101	3	17	3
951	.	3	.	3	.	227	11	73	3	7	3	251	.	3	7	3	89	.	13	17
52	31	.	7	19	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	131	.	3	23	3	7
53	3	13	3	191	.	3	.	3	199	19	.	13	3	7	3	.	67	3	7	3
54	.	3	13	3	73	.	7	.	3	37	3	.	7	3	19	3	.	.	11	31
55	7	43	.	149	3	11	3	23	59	3	.	3	.	83	13	.	3	7	3	.
956	3	.	3	67	23	3	.	3	.	11	7	.	3	.	3	59	7	3	101	3
57	.	3	.	3	7	.	.	13	3	.	3	29	.	3	.	3	19	67	.	23
58	.	.	149	7	3	.	3	.	11	3	79	3	61	47	7	239	3	11	3	13
59	3	29	3	11	.	3	.	3	7	.	13	.	3	23	3	197	37	3	.	3
960	.	3	19	3	67	.	.	7	3	131	3	109	13	3	137	3	11	.	7	139
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
901	17	3	89	3	29	.	7	37	3	.	3	31	7	3	.	3	.	19	.	.
02	7	17	43	13	3	.	3	19	.	3	11	3	.	137	117	.	3	7	3	11
03	3	.	3	.	109	3	23	3	.	.	7	.	3	19	3	13	7	3	.	3
04	29	3	17	3	7	61	13	.	3	.	3	173	.	3	41	3	17	13	11	.
05	23	83	137	7	3	11	3	41	13	3	53	3	239	.	7	157	3	17	3	.
906	3	269	3	.	17	3	71	3	7	11	.	.	3	29	3	23	89	3	.	3
07	151	3	47	3	11	17	139	7	3	43	3	13	23	3	.	3	103	.	7	29
08	47	7	13	43	3	.	3	89	11	3	19	3	7	13	.	97	3	11	3	17
09	3	19	3	11	13	3	17	3	.	29	.	7	3	37	3	.	19	3	.	3
10	83	3	23	3	41	7	19	11	3	61	3	.	.	3	79	3	7	71	.	.
911	.	.	11	.	3	.	3	13	17	3	73	3	19	.	67	7	3	.	3	.
12	3	.	3	7	263	3	11	3	107	7	97	37	3	.	3	11	.	3	.	3
13	13	3	7	3	103	211	.	.	3	.	3	23	.	3	.	3	59	.	.	7
14	109	.	.	.	3	.	3	7	23	3	17	3	13	7	11	191	3	.	3	.
15	3	7	3	13	19	3	7	3	.	.	.	17	3	.	3	67	.	3	11	3
916	7	3	151	3	71	11	31	29	3	.	3	7	17	3	277	3	.	7	47	107
17	11	.	.	89	3	7	3	163	.	3	7	3	.	17	263	19	3	13	3	41
18	3	31	3	97	7	3	.	3	13	.	79	139	3	11	3	7	43	3	13	3
19	.	3	.	3	.	41	.	.	3	7	3	19	59	3	7	3	67	11	.	197
20	.	13	7	11	3	43	3	23	7	3	.	3	11	.	71	17	3	19	3	7
921	3	.	3	157	23	3	37	3	61	.	.	.	3	7	3	.	11	3	7	3
22	.	3	11	3	13	257	7	.	3	53	3	11	7	3	13	3	41	17	.	23
23	7	.	.	19	3	.	3	.	71	3	.	3	.	.	.	11	3	7	3	.
24	3	59	3	.	.	3	.	3	89	19	7	.	3	23	3	.	7	3	17	3
25	.	3	.	3	7	151	.	.	3	13	3	43	.	3	11	3	53	.	29	13
926	13	11	.	7	3	19	3	.	.	3	13	3	.	.	7	59	3	.	3	.
27	3	.	3	23	.	3	.	3	7	113	19	.	3	31	3	.	.	3	71	3
28	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	131	293	3	29	3	19	.	7	.
29	.	7	.	.	3	13	3	31	239	3	109	3	7	11	.	13	3	.	3	113
30	3	.	3	.	29	3	13	3	11	163	.	7	3	.	3	.	127	3	.	3
931	.	3	19	3	59	7	151	.	3	23	3	.	11	3	.	3	7	41	13	.
32	.	.	.	179	3	.	3	11	19	3	37	3	.	.	.	7	3	29	3	79
33	3	13	3	7	89	3	73	3	.	7	.	11	3	.	3	47	61	3	59	3
34	113	3	7	3	19	.	11	151	3	211	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
35	17	.	.	.	3	.	3	7	137	3	11	3	.	7	13	31	3	173	3	11
936	3	7	3	73	229	3	7	3	47	283	113	23	3	.	3	19	13	3	43	3
37	7	3	29	3	.	.	41	13	3	79	3	7	191	3	.	3	71	7	11	97
38	.	127	17	47	3	7	3	37	.	3	7	3	269	223	.	.	3	.	3	13
39	3	47	3	17	7	3	.	3	.	11	13	.	3	.	3	7	193	3	.	3
940	163	3	.	3	11	.	109	19	3	7	3	.	13	3	7	3	37	23	73	.
941	.	.	7	13	3	17	3	.	7	3	41	3	53	19	97	131	3	11	3	7
42	3	.	3	11	.	3	107	3	31	.	23	29	3	7	3	13	.	3	7	3
43	.	3	157	3	127	197	7	11	3	19	3	.	7	3	37	3	11	13	.	.
44	7	29	11	59	3	.	3	17	13	3	.	3	107	.	19	61	3	7	3	53
45	3	23	3	.	.	3	11	3	17	.	7	271	3	.	3	11	7	3	.	3
946	.	3	103	3	7	181	137	41	3	17	3	13	73	3	.	3	23	.	281	11
47	41	19	13	7	3	193	3	97	.	3	.	3	.	13	7	.	3	.	3	47
48	3	11	3	29	13	3	19	3	7	.	17	79	3	239	3	.	31	3	11	3
49	.	3	269	3	.	11	23	7	3	73	3	17	19	3	43	3	13	.	7	.
50	11	7	19	23	3	.	3	13	.	3	31	3	7	.	.	.	3	.	3	61
951	3	.	3	43	11	3	59	3	19	13	.	7	3	11	3	.	.	3	23	3
52	13	3	.	3	.	7	.	47	3	.	3	.	151	3	.	3	7	11	233	157
53	97	17	167	11	3	47	3	.	283	3	127	3	11	.	17	7	3	.	3	19
54	3	53	3	7	.	3	.	3	.	7	307	.	3	.	3	17	11	3	29	3
55	19	3	7	3	.	13	227	.	3	31	3	11	.	3	61	3	17	109	.	7
956	.	41	23	17	3	271	3	7	29	3	241	3	163	7	103	11	3	13	3	83
57	3	7	3	31	17	3	7	3	13	.	11	19	3	.	3	.	.	3	13	3
58	7	3	.	3	257	17	37	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	17	41
59	239	11	.	.	3	7	3	19	.	3	7	3	41	53	.	.	3	59	3	17
960	3	.	3	.	7	3	17	3	23	191	29	.	3	13	3	7	307	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
961	17	7	11	.	3	223	3	277	19	3	97	3	7	251		127	3	79	3	.
62	3	17	3	23	.	3	11	3		.	41	7	3	.	3	11	157	3	109	3
63	23	3	193	3	19	7	13	61	3	.	3	.	.	3	.	3	7	13	23	11
64	.	149	17	229	3	67	3	.	13	3	211	3	.	73	11	7	3	.	3	43
65	3	11	3	7	103	3	.	3	263	7	.	83	3	37	3	19	29	3	11	3
966	.	3	7	3	17	11	79	53	3	23	3	13	71	3	41	3	241	.	127	7
67	11	.	13	97	3	17	3	7	311	3	197	3	.	7	.	.	3	89	3	.
68	3	7	3	131	11	3	7	3	.	.	.	37	3	11	3	179	113	3	.	3
69	7	3	.	3	.	199	17	19	3	103	3	7	.	3	31	3	13	7	29	67
70	.	.	.	11	3	7	3	13	.	3	7	3	11	19	23	.	3	53	3	107
971	3	.	3	19	7	3	.	3	17	13	.	23	3	137	3	7	11	3	19	3
72	13	3	11	3	41	.	67	191	3	7	3	11	.	3	7	3	.	47	31	79
73	.	.	7	31	3	23	3	307	7	3	.	3	13	131	19	11	3	311	3	7
74	3	257	3	13	29	3	61	3	37	.	11	.	3	7	3	139	.	3	7	3
75	.	3	281	3	.	13	7	113	3	.	3	17	7	3	11	3	103	23	.	.
976	7	11	.	.	3	.	3	31	41	3	233	3	17	89	163	251	3	7	3	.
77	3	41	3	199	.	3	19	3	13	79	7	.	3	17	3	43	7	3	13	3
78	11	3	47	3	7	.	29	23	3	11	3	.	19	3	227	3	.	.	.	.
79	47	13	19	7	3	179	3	.	181	3	.	3	.	11	7	37	3	.	3	41
80	3	23	3	.	.	3	.	3	7	83	61	167	3	13	3	17	.	3	.	3
981	.	3	17	3	13	41	59	7	3	.	3	.	11	3	13	3	17	.	7	61
82	283	7	.	17	3	.	3	11	.	3	.	3	7	23	193	31	3	17	3	19
83	3	197	3	37	17	3	.	3	.	.	.	7	3	107	3	29	43	3	.	3
84	19	3	.	3	.	7	11	.	3	13	2	.	257	3	173	3	7	.	17	13
85	13	157	.	23	3	29	3	.	83	3	11	3	37	.	211	7	3	.	3	11
986	3	151	3	7	31	3	17	3	.	7	.	19	3	53	3	.	.	3	23	3
87	89	3	7	3	.	.	.	17	3	269	3	.	.	3	.	3	293	19	11	7
88	.	29	.	.	3	11	3	7	17	3	37	3	23	7	.	13	3	97	3	.
89	3	7	3	.	.	3	7	3	31	11	.	.	3	19	3	.	163	3	.	3
90	7	3	181	3	11	.		83	3	.	3	7	167	3	97	3	.	7	13	37
991	113		23	.	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	.	.	3	11	3	.
92	3	13	3	11	7	3	47	3	313	.	67	13	3	.	3	7	.	3	61	3
93	199	3	13	3	47	19	.	11	3	7	3	71	17	3	7	3	11	41	.	.
94	.	107	7	.	3	89	3	37	7	3	19	3	.	17	13	.	3	277	3	7
95	3	19	3	151	191	3	11	3	23	.	.	.	3	7	3	11	13	3	7	3
996	103	3	.	3	.	23	7	13	3	.	3	67	7	3	17	3	37	.	251	11
97	7	179	.	.	3	.	3	.	.	3	31	3	19	.	11	17	3	7	3	13
98	3	11	3	.	151	3	.	3	173	.	7	.	3	.	3	.	7	3	11	3
999	.	3	.	3	7	11	41	163	3	.	3	.	13	3	37	3	139	17	89	127
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

TAVOLA DEGLI ARCHI CIRCOLARI RIDOTTI IN PARTI DEL RAGGIO = 1

1°	0,01745 32925 19943 29577	16°	0,27925 26803 19092 73231
2	0 03490 65850 39886 59154	17	0 29670 59728 39036 02808
3	0 05235 98775 59829 88731	18	0 31415 92653 58979 32385
4	0 06981 31700 79773 18308	19	0 33161 25578 78922 61962
5	0 08726 64625 99716 47885	20	0 34906 58503 98865 91538
6	0 10471 97551 19659 77462	30	0 52359 87755 98298 87308
7	0 12217 30476 39603 07038	40	0 69813 17007 97731 83077
8	0 13962 63401 59546 36615	50	0 87266 46259 97164 78846
9	0 15707 96326 79489 66192	60	1 04719 75511 96597 74615
10	0 17453 29251 99432 95769	70	1 22173 04763 96030 70385
11	0 19198 62177 19376 25346	80	1 39626 34015 95463 66154
12	0 20943 95102 39319 54923	90	1 57079 63267 94896 61923
13	0 22689 28027 59262 84500	100	1 7453 29251 99432 957692
14	0 24434 60952 79206 14077	200	3 4906 58503 98865 915384
15	0 26179 93877 99149 43654	300	5 2359 87755 98298 873078

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
961	11	3	.	3	13	23	.	17	3	3	3	.	.	3	7	3	43	29	19	.
62	29	101	7	.	3	.	3	.	7	7	43	3	.	11	73	.	3	.	3	7
63	3	.	3	167	173	3	29	3	11	17	.	31	3	7	3	113	41	3	7	3
64	.	3	.	3	.	19	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	47	.	.	13
65	7	.	.	223	3	61	3	11	269	3	13	3	.	59	.	.	3	7	3	29
966	3	19	3	163	.	3	.	3	.	277	7	11	3	109	3	31	7	3	.	3
67	31	3	.	3	7	.	11	.	3	29	3	.	17	3	.	3	151	43	.	.
68	.	23	.	7	3	13	3	157	73	3	11	3	19	17	7	13	3	.	3	11
69	3	.	3	.	47	3	13	3	7	.	37	.	3	293	3	.	23	3	.	3
70	37	3	71	3	31	29	113	7	3	.	3	193	.	3	17	3	79	151	7	89
971	.	7	.	.	3	11	3	.	.	3	.	3	7	157	.	17	3	83	3	37
72	3	13	3	.	19	3	23	3	211	11	89	7	3	.	3	271	17	3	149	3
73	67	3	13	3	11	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	17	.	173
74	19	.	41	.	3	.	3	29	11	3	107	3	43	71	13	7	3	11	3	.
75	3	.	3	7	.	3	43	3	.	7	.	.	3	.	3	23	13	3	17	3
976	.	3	7	3	61	127	101	11	3	.	3	19	23	3	.	3	11	211	151	7
77	239	67	11	29	3	59	3	7	.	3	.	3	277	7	.	.	3	19	3	13
78	3	7	3	.	.	3	7	3	.	97	13	.	3	.	3	11	53	3	223	3
79	7	3	23	3	.	163	.	313	3	.	3	7	13	3	.	3	29	7	43	11
80	71	31	.	13	3	7	3	281	101	3	7	3	.	43	11	47	3	233	3	263
981	3	11	3	103	7	3	89	3	127	19	31	.	3	47	3	7	149	3	11	3
82	.	3	.	3	97	11	53	.	3	7	3	23	29	3	7	3	227	13	.	.
83	11	59	7	41	3	19	3	.	7	3	.	3	131	37	.	.	3	61	3	7
84	3	.	3	.	11	3	.	3	59	.	19	.	3	7	3	149	.	3	7	3
85	139	3	67	3	.	.	7	241	3	.	3	13	7	3	311	3	19	11	.	43
986	7	47	13	11	3	.	3	.	79	3	101	3	11	13	29	.	3	7	3	229
87	3	17	3	61	13	3	283	3	43	.	7	.	3	173	3	223	7	3	31	3
88	41	3	11	3	7	109	.	.	3	.	3	11	61	3	.	3	13	.	.	.
89	53	.	17	7	3	.	3	13	19	3	29	3	.	31	7	11	3	.	3	.
90	3	.	3	17	23	3	157	3	7	13	11	.	3	.	3	.	197	3	41	3
991	13	3	229	3	17	53	131	7	3	.	3	41	.	3	11	3	.	281	7	19
92	.	7	.	.	3	17	3	53	37	3	.	3	7	101	43	.	3	31	3	109
93	3	23	3	13	67	3	.	3	.	43	.	7	3	23	3	19	.	3	.	3
94	11	3	271	3	29	7	17	.	3	11	3	31	53	3	.	3	7	37	.	29
95	.	113	29	.	3	.	3	17	.	3	.	3	.	11	53	7	3	13	3	137
996	3	227	3	7	.	3	.	3	11	7	263	.	3	83	3	.	131	3	13	3
97	23	3	7	3	.	67	.	19	3	17	3	113	11	3	.	3	23	.	23	7
98	31	13	61	.	3	37	3	7	.	3	.	3	.	7	59	23	3	191	3	283
999	3	7	3	19	.	3	7	3	.	257	17	11	3	13	3	.	.	3	19	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

1'	0,00029 08882 08665 72160
2	0 00058 17764 17331 44319
3	0 00087 26646 25997 16479
4	0 00116 35528 34662 88638
5	0 00145 44410 43328 60798
6	0 00174 53292 51994 32958
7	0 00203 62174 60660 05117
8	0 00232 71056 69325 77277
9	0 00261 79938 77991 49437
10	0 00290 88820 86657 21596
20	0 00581 77641 73314 43192
30	0 00872 66462 59971 64788
40	0 01163 55283 46628 86385
50	0 01454 44104 33286 07981
60	0 01745 32925 19943 29577

1"	0,00000 48481 36811 09536
2	0 00000 96962 73622 19072
3	0 00001 45444 10433 28608
4	0 00001 93925 47244 38144
5	0 00002 42406 84055 47680
6	0 00002 90888 20866 57216
7	0 00003 39369 57677 66752
8	0 00003 87850 94488 76288
9	0 00004 36332 31299 85824
10	0 00004 84813 68110 95360
20	0 00009 69627 36221 90720
30	0 00014 54441 04332 86080
40	0 00019 39254 72443 81440
50	0 00024 24068 40554 76800
60	0 00029 08882 08665 72160

N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3
1	1	1	61	3721	226981	121	14641	1771561	181	32761	5929741
2	4	8	62	3844	238328	22	14884	1815848	82	33124	6028568
3	9	27	63	3969	250047	23	15129	1860867	83	33489	6128487
4	16	64	64	4096	262144	24	15376	1906624	84	33856	6229504
5	25	125	65	4225	274625	25	15625	1953125	85	34225	6331625
6	36	216	66	4356	287496	126	15876	2000376	186	34596	6434856
7	49	343	67	4489	300763	27	16129	2048383	87	34969	6539203
8	64	512	68	4624	314432	28	16384	2097152	88	35344	6644672
9	81	729	69	4761	328509	29	16641	2146689	89	35721	6751269
10	100	1000	70	4900	343000	30	16900	2197000	90	36100	6859000
11	121	1331	71	5041	357911	131	17161	2248091	191	36481	6967871
12	144	1728	72	5184	373248	32	17424	2299968	92	36864	7077888
13	169	2197	73	5329	389017	33	17689	2352637	93	37249	7189057
14	196	2744	74	5476	405224	34	17956	2406104	94	37636	7301384
15	225	3375	75	5625	421875	35	18225	2460375	95	38025	7414875
16	256	4096	76	5776	438976	136	18496	2515456	96	38416	7529536
17	289	4913	77	5929	456533	37	18769	2571353	97	38809	7645373
18	324	5832	78	6084	474552	38	19044	2628072	98	39204	7762392
19	361	6859	79	6241	493039	39	19321	2685619	99	39601	7880599
20	400	8000	80	6400	512000	40	19600	2744000	200	40000	8000000
21	441	9261	81	6561	531441	141	19881	2803221	201	40401	8120601
22	484	10648	82	6724	551368	42	20164	2863288	02	40804	8242408
23	529	12167	83	6889	571787	43	20449	2924207	03	41209	8365427
24	576	13824	84	7056	592704	44	20736	2985984	04	41616	8489664
25	625	15625	85	7225	614125	45	21025	3048625	05	42025	8615125
26	676	17576	86	7396	636056	146	21316	3112136	206	42436	8741816
27	729	19683	87	7569	658503	47	21609	3176523	07	42849	8869743
28	784	21952	88	7744	681472	48	21904	3241792	08	43264	8998912
29	841	24389	89	7921	704969	49	22201	3307949	09	43681	9129329
30	900	27000	90	8100	729000	50	22500	3375000	10	44100	9261000
31	961	29791	91	8281	753571	151	22801	3442951	211	44521	9393931
32	1024	32768	92	8464	778688	52	23104	3511808	12	44944	9528128
33	1089	35937	93	8649	804357	53	23409	3581577	13	45369	9663597
34	1156	39304	94	8836	830584	54	23716	3652264	14	45796	9800344
35	1225	42875	95	9025	857375	55	24025	3723875	15	46225	9938375
36	1296	46656	96	9216	884736	156	24336	3796416	216	46656	10077696
37	1369	50653	97	9409	912673	57	24649	3869893	17	47089	10218313
38	1444	54872	98	9604	941192	58	24964	3944312	18	47524	10360232
39	1521	59319	99	9801	970299	59	25281	4019679	19	47961	10503459
40	1600	64000	100	10000	1000000	60	25600	4096000	20	48400	10648000
41	1681	68921	101	10201	1030301	161	25921	4173281	221	48841	10793861
42	1764	74088	02	10404	1061208	62	26244	4251528	22	49284	10941048
43	1849	79507	03	10609	1092727	63	26569	4330747	23	49729	11089567
44	1936	85184	04	10816	1124864	64	26896	4410944	24	50176	11239424
45	2025	91125	05	11025	1157625	65	27225	4492125	25	50625	11390625
46	2116	97336	106	11236	1191016	166	27556	4574296	226	51076	11543176
47	2209	103823	07	11449	1225043	67	27889	4657463	27	51529	11697083
48	2304	110592	08	11664	1259712	68	28224	4741632	28	51984	11852352
49	2401	117649	09	11881	1295029	69	28561	4826809	29	52441	12008989
50	2500	125000	10	12100	1331000	70	28900	4913000	30	52900	12167000
51	2601	132651	111	12321	1367631	171	29241	5000211	231	53361	12326391
52	2704	140608	12	12544	1404928	72	29584	5088448	32	53824	12487168
53	2809	148877	13	12769	1442897	73	29929	5177717	33	54289	12649337
54	2916	157464	14	12996	1481544	74	30276	5268024	34	54756	12812904
55	3025	166375	15	13225	1520875	75	30625	5359375	35	55225	12977875
56	3136	175616	116	13456	1560896	176	30976	5451776	236	55696	13144256
57	3249	185193	17	13689	1601613	77	31329	5545233	37	56169	13312053
58	3364	195112	18	13924	1643032	78	31684	5639752	38	56644	13481272
59	3481	205379	19	14161	1685159	79	32041	5735339	39	57121	13651919
60	3600	216000	120	14400	1728000	80	32400	5832000	240	57600	13824000
N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
241	58081	13997521	301	90601	27270901	361	130321	47045881	421	177241	74618461
242	58564	14172488	302	91204	27543608	362	131044	47437928	422	178084	75151448
243	59049	14348907	303	91809	27818127	363	131769	47832147	423	178929	75686967
244	59536	14526784	304	92416	28094464	364	132496	48228544	424	179776	76225024
245	60025	14706125	305	93025	28372625	365	133225	48627125	425	180625	76765625
246	60516	14886936	306	93636	28652616	366	133956	49027896	426	181476	77308776
247	61009	15069223	307	94249	28934443	367	134689	49430863	427	182329	77854483
248	61504	15252992	308	94864	29218112	368	135424	49836032	428	183184	78402752
249	62001	15438249	309	95481	29503629	369	136161	50243409	429	184041	78953589
250	62500	15625000	310	96100	29791000	370	136900	50653000	430	184900	79507000
251	63001	15813251	311	96721	30080231	371	137641	51064811	431	185761	80062991
252	63504	16003008	312	97344	30371328	372	138384	51478848	432	186624	80621568
253	64009	16194277	313	97969	30664297	373	139129	51895117	433	187489	81182737
254	64516	16387064	314	98596	30959144	374	139876	52313624	434	188356	81746504
255	65025	16581375	315	99225	31255875	375	140625	52734375	435	189225	82312875
256	65536	16777216	316	99856	31554496	376	141376	53157376	436	190096	82881856
257	66049	16974593	317	100489	31855013	377	142129	53582633	437	190969	83453453
258	66564	17173512	318	101124	32157432	378	142884	54010152	438	191844	84027672
259	67081	17373979	319	101761	32461759	379	143641	54439939	439	192721	84604519
260	67600	17576000	320	102400	32768000	380	144400	54872000	440	193600	85184000
261	68121	17779581	321	103041	33076161	381	145161	55306341	441	194481	85766121
262	68644	17984728	322	103684	33386248	382	145924	55742968	442	195364	86350888
263	69169	18191447	323	104329	33698267	383	146689	56181887	443	196249	86938307
264	69696	18399744	324	104976	34012224	384	147456	56623104	444	197136	87528384
265	70225	18609625	325	105625	34328125	385	148225	57066625	445	198025	88121125
266	70756	18821096	326	106276	34645976	386	148996	57512456	446	198916	88716536
267	71289	19034163	327	106929	34965783	387	149769	57960603	447	199809	89314623
268	71824	19248832	328	107584	35287552	388	150544	58411072	448	200704	89915392
269	72361	19465109	329	108241	35611289	389	151321	58863869	449	201601	90518849
270	72900	19683000	330	108900	35937000	390	152100	59319000	450	202500	91125000
271	73441	19902511	331	109561	36264691	391	152881	59776471	451	203401	91733851
272	73984	20123648	332	110224	36594368	392	153664	60236288	452	204304	92345408
273	74529	20346417	333	110889	36926037	393	154449	60698457	453	205209	92959677
274	75076	20570824	334	111556	37259704	394	155236	61162984	454	206116	93576664
275	75625	20796875	335	112225	37595375	395	156025	61629875	455	207025	94196375
276	76176	21024576	336	112896	37933056	396	156816	62099136	456	207936	94818816
277	76729	21253933	337	113569	38272753	397	157609	62570773	457	208849	95443993
278	77284	21484952	338	114244	38614472	398	158404	63044792	458	209764	96071912
279	77841	21717639	339	114921	38958219	399	159201	63521199	459	210681	96702579
280	78400	21952000	340	115600	39304000	400	160000	64000000	460	211600	97336000
281	78961	22188041	341	116281	39651821	401	160801	64481201	461	212521	97972181
282	79524	22425768	342	116964	40001688	402	161604	64964808	462	213444	98611128
283	80089	22665187	343	117649	40353607	403	162409	65450827	463	214369	99252847
284	80656	22906304	344	118336	40707584	404	163216	65939264	464	215296	99897344
285	81225	23149125	345	119025	41063625	405	164025	66430125	465	216225	100544625
286	81796	23393656	346	119716	41421736	406	164836	66923416	466	217156	101194696
287	82369	23639903	347	120409	41781923	407	165649	67419143	467	218089	101847563
288	82944	23887872	348	121104	42144192	408	166464	67917312	468	219024	102503232
289	83521	24137569	349	121801	42508549	409	167281	68417929	469	219961	103161709
290	84100	24389000	350	122500	42875000	410	168100	68921000	470	220900	103823000
291	84681	24642171	351	123201	43243551	411	168921	69426531	471	221841	104487111
292	85264	24897088	352	123904	43614208	412	169744	69934528	472	222784	105154048
293	85849	25153757	353	124609	43986977	413	170569	70444997	473	223729	105823817
294	86436	25412184	354	125316	44361864	414	171396	70957944	474	224676	106496424
295	87025	25672375	355	126025	44738875	415	172225	71473375	475	225625	107171875
296	87616	25934336	356	126736	45118016	416	173056	71991296	476	226576	107850176
297	88209	26198073	357	127449	45499293	417	173889	72511713	477	227529	108531333
298	88804	26463592	358	128164	45882712	418	174724	73034632	478	228484	109215352
299	89401	26730899	359	128881	46268279	419	175561	73560059	479	229441	109902239
300	90000	27000000	360	129600	46656000	420	176400	74088000	480	230400	110592000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³
481	231361	111284641	541	292681	158340421	601	361201	217081801
82	2324	1980168	42	3764	9220088	02	2404	8167208
83	3289	2678587	43	4849	160103007	03	3609	9256227
84	4256	3379904	44	5936	0989184	04	4816	220348864
85	5225	4084125	45	7025	1878625	05	6025	1445125
486	236196	114791256	546	298116	162771336	606	367236	222545016
87	7169	5501303	47	9209	3667323	07	8449	3648543
88	8144	6214272	48	300304	4566592	08	9664	4755712
89	9121	6930169	49	1401	5469149	09	370881	5866529
90	240100	7649000	50	2500	6375000	10	2100	6981000
491	241081	118370771	551	303601	167284151	611	373321	228099131
92	2064	9095488	52	4704	8196608	12	4544	9220928
93	3049	9823157	53	5809	9112377	13	5769	230346397
94	4036	120553784	54	6916	170031464	14	6996	1475544
95	5025	1287375	55	8025	0953875	15	8225	2608375
496	246016	122023936	556	309136	171879616	616	379456	233744896
97	7009	2763473	57	310249	2808693	17	380689	4885113
98	8004	3505992	58	1364	3741112	18	1924	6029032
99	9001	4251499	59	2481	4676879	19	3161	7176659
500	250000	5000000	60	3600	5616000	20	4400	8328000
501	251001	125751501	561	314721	176558481	621	385641	239483061
02	2004	6506008	62	5844	7504328	22	6884	240641848
03	3009	7263527	63	6969	8453547	23	8129	1804367
04	4016	8024064	64	8096	9406144	24	9376	2970624
05	5025	8787625	65	9225	180362125	25	390625	4140625
506	256036	129554216	566	320356	181321496	626	391876	245314376
07	7049	130323843	67	1489	2284263	27	3129	491883
08	8064	1096512	68	2624	3250432	28	4384	7673152
09	9081	1872229	69	3761	4220009	29	5641	8858189
10	260100	2651000	70	4900	5193000	30	6900	250047000
511	261121	133432831	571	326041	186169411	631	398161	251239591
12	2144	4217728	72	7184	7149248	32	9424	2435968
13	3169	5005697	73	8329	8132517	33	400689	3636137
14	4196	5796744	74	9476	9119224	34	1956	4840104
15	5225	6590875	75	330625	190109375	35	3225	6047875
516	266256	137388096	576	331776	191102976	636	404496	257259456
17	7289	8188413	77	2929	2100033	37	5769	8474853
18	8324	8991832	78	4084	3100552	38	7044	9694072
19	9361	9798359	79	5241	4104539	39	8321	260917119
20	270400	140608000	80	6400	5112000	40	9600	2144000
521	271441	141420761	581	337561	196122941	641	410881	263374721
22	2484	2236648	82	8724	7137368	42	2164	4609288
23	3529	3055667	83	9889	8155287	43	3449	5847707
24	4576	3877824	84	341056	9176704	44	4736	7089984
25	5625	4703125	85	2225	200201625	45	6025	8336125
526	276676	145531576	586	343396	201230056	646	417316	269586136
27	7729	6363183	87	4569	2262003	47	8609	270840023
28	8784	7197952	88	5744	3297472	48	9904	2097792
29	9841	8035889	89	6921	4336469	49	421201	3359449
30	280900	8877000	90	8100	5379000	50	2500	4625000
531	281961	149721291	591	349281	206425071	651	423801	275894451
32	3024	150568768	92	350464	7474688	52	5104	7167808
33	4089	1419437	93	1649	8527857	53	6409	8445077
34	5156	2273304	94	2836	9584584	54	7716	9726264
35	6225	3130375	95	4025	210644875	55	9025	281011375
536	287296	153990656	596	355216	211708736	656	430336	282300416
37	8369	4854153	97	6409	2776173	57	1649	3593393
38	9444	5720872	98	7604	3847192	58	2964	4890312
39	290521	6590819	99	8801	4921799	59	4281	6191179
540	1600	7464000	600	360000	6000000	660	5600	7496000
N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³

N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³
661	436921	288804781	721	519841	374805361	781	609961	476379541
62	8244	290117528	22	521284	6367048	82	611524	8211768
63	9569	1434247	23	2729	7933067	83	3089	480048687
64	440896	2754944	24	4176	9503424	84	4656	1890304
65	2225	4079625	25	5625	381078125	85	6225	3736625
666	443556	295408296	726	527076	382657176	786	617796	485587656
67	4889	6740963	27	8529	4240583	87	9369	7443403
68	6224	8077632	28	9984	5828352	88	620944	9303872
69	7561	9418309	29	531441	7420489	89	2521	491169069
70	8900	300763000	30	2900	9017000	90	4100	3039000
671	450241	302111711	731	534361	390617891	791	625681	494913671
72	1584	3464448	32	5824	2223168	92	7264	6793088
73	2929	4821217	33	7289	3832837	93	8849	8677257
74	4276	6182024	34	8756	5446904	94	630436	500566184
75	5625	7546875	35	540225	7065375	95	2025	2459875
676	456976	308915776	736	541696	398688256	796	633616	504358336
77	8329	310288733	37	3169	400315553	97	5209	6261573
78	9684	1665752	38	4644	1947272	98	6804	8169592
79	461041	3046839	39	6121	3583419	99	8401	510082399
80	2400	4432000	40	7600	5224000	800	640000	2000000
681	463761	315821241	741	549081	406869021	801	641601	513922401
82	5124	7214568	42	550564	8518488	02	3204	5849608
83	6489	8611987	43	2049	410172407	03	4809	7781627
84	7856	320013504	44	3536	1830784	04	6416	9718464
85	9225	1419125	45	5025	3493625	05	8025	521660125
686	470596	322828856	746	556516	415160936	806	649636	523606616
87	1969	4242703	47	8009	6832723	07	651249	5557943
88	3344	5660672	48	9504	8508992	08	2864	7514112
89	4721	7082769	49	561001	420189749	09	4481	9475129
90	6100	8509000	50	2500	1875000	10	6100	531441000
691	477481	329939371	751	564001	423564751	811	657721	533411731
92	8864	331373888	52	5504	5259008	12	9344	5387328
93	480249	2812557	53	7009	6957777	13	660969	7367797
94	1636	4255384	54	8516	8661064	14	2596	9353144
95	3025	5701375	55	570025	430368875	15	4225	541343375
696	484416	337153536	756	571536	432081216	816	665856	543338496
97	5809	8608873	57	3049	3798093	17	7489	5338513
98	7204	340068392	58	4564	5519512	18	9124	7343432
99	8601	1532099	59	6081	7245479	19	670761	9353259
700	490000	3000000	60	7600	8976000	20	2400	551368000
701	491401	344472101	761	579121	440711081	821	674041	553387661
02	2804	5948408	62	580644	2450728	22	5684	5412248
03	4209	7428927	63	2169	4194947	23	7329	7441767
04	5616	8913664	64	3696	5943744	24	8976	9476224
05	7025	350402625	65	5225	7697125	25	680625	561515625
706	498436	351895816	766	586756	449455096	826	682276	563559976
07	9849	3393243	67	8289	451217663	27	3929	5609283
08	501264	4894912	68	9824	2984832	28	5584	7663552
09	2681	6400829	69	591361	4756609	29	7241	9722789
10	4100	7911000	70	2900	6533000	30	8900	571787000
711	505521	359425431	771	594441	458314011	831	690561	573856191
12	6944	360944128	72	5984	460099648	32	2224	5930368
13	8369	2467097	73	7529	1889917	33	3889	8009537
14	9796	3994344	74	9076	3684824	34	5556	580093704
15	511225	5525875	75	600625	5484375	35	7225	2182875
716	512656	367061696	776	602176	467288576	836	698896	584277056
17	4089	8601813	77	3729	9097433	37	700569	6376253
18	5524	370146232	78	5284	470910952	38	2244	8480472
19	6961	1694959	79	6841	2729139	39	3921	590589719
720	8400	3248000	80	8400	4552000	840	5600	2704000
N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1021	1042441	1064332261	1081	1168561	1263214441	1141	1301881	1485446221
22	44484	67462648	82	70724	66723368	42	04164	89355288
23	46529	70599167	83	72889	70238787	43	06449	93271207
24	48576	73741824	84	75056	73760704	44	08736	97193984
25	50625	76890625	85	77225	77289125	45	11025	1501123625
1026	1052676	1080045576	1086	1179396	1280824056	1146	1313316	1505060136
27	54729	83206683	87	81569	84365503	47	15609	09003523
28	56784	86373952	88	83744	87913472	48	17904	12953792
29	58841	89547389	89	85921	91467969	49	20201	16910949
30	60900	92727000	90	88100	95029000	50	22500	20875000
1031	1062961	1095912791	1091	1190281	1298596571	1151	1324801	1524845951
32	65024	99104768	92	92464	1302170688	52	27104	28823808
33	67089	1102302937	93	94649	05751357	53	29409	32808577
34	69156	05507304	94	96836	09338584	54	31716	36800264
35	71225	08717875	95	99025	12932375	55	34025	40798875
1036	1073296	1111934656	1096	1201216	1316532736	1156	1336336	1544804416
37	75369	15157653	97	03409	20139673	57	38649	48816893
38	77444	18386872	98	05604	23753192	58	40964	52836312
39	79521	21622319	99	07801	27373299	59	43281	56862679
40	81600	24864000	1100	10000	31000000	60	45600	60896000
1041	1083681	1128111921	1101	1212201	1334633301	1161	1347921	1564936281
42	85764	31366088	02	14404	38273208	62	50244	68983528
43	87849	34626507	03	16609	41919727	63	52569	73037747
44	89936	37893184	04	18816	45572864	64	54896	77098944
45	92025	41166125	05	21025	49232625	65	57225	81167125
1046	1094116	1144445336	1106	1223236	1352899016	1166	1359556	1585242296
47	96209	47730823	07	25449	56572043	67	61889	89324463
48	98304	51022592	08	27664	60251712	68	64224	93413632
49	1100401	54320649	09	29881	63938029	69	66561	97509809
50	02500	57625000	10	32100	67631000	70	68900	1601613000
1051	1104601	1160935651	1111	1234321	1371330631	1171	1371241	1605723211
52	06704	64252608	12	36544	75036928	72	73584	09840448
53	08809	67575877	13	38769	78749897	73	75929	13964717
54	10916	70905464	14	40996	82469544	74	78276	18096024
55	13025	74241375	15	43225	86195875	75	80625	22234375
1056	1115136	1177583616	1116	1245456	1389928896	1176	1382976	1626379776
57	17249	80932193	17	47689	93668613	77	85329	30532233
58	19364	84287112	18	49924	97415032	78	87684	34691752
59	21481	87648379	19	52161	1401168159	79	90041	38858339
60	23600	91016000	20	54400	04928000	80	92400	43032000
1061	1125721	1194389981	1121	1256641	1408694561	1181	1394761	1647212741
62	27844	97770328	22	58884	12467848	82	97124	51400568
63	29969	1201157047	23	61129	16247867	83	99489	55595487
64	32096	04550144	24	63376	20034624	84	1401856	59797504
65	34225	07949625	25	65625	23828125	85	04225	64006625
1066	1136356	1211355496	1126	1267876	1427628376	1186	1406596	1668222856
67	38489	14767763	27	70129	31435383	87	08969	72446203
68	40624	18186432	28	72384	35249152	88	11344	76676672
69	42761	21611509	29	74641	39069689	89	13721	80914269
70	44900	25043000	30	76900	42897000	90	16100	85159000
1071	1147041	1228480911	1131	1279161	1446731091	1191	1418481	1689410871
72	49184	31925248	32	81424	50571968	92	20864	93669888
73	51329	35376017	33	83689	54419637	93	23249	97936057
74	53476	38833224	34	85956	58274104	94	25636	1702209384
75	55625	42296875	35	88225	62135375	95	28025	06489875
1076	1157776	1245766976	1136	1290496	1466003456	1196	1430416	1710777536
77	59929	49243533	37	92769	69878353	97	32809	15072373
78	62084	52726552	38	95044	73760072	98	35204	19374392
79	64241	56216039	39	97321	77648619	99	37601	23683599
1080	66400	59712000	1140	99600	81544000	1200	40000	28000000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³
1201	1442401	1732323601	1261	1590121	2005142581	1321	1745041	2305199161
02	44804	36654408	62	92644	09916728	22	47684	10438248
03	47209	40992427	63	95169	14698447	23	50329	15685267
04	49616	45337664	64	97696	19487744	24	52976	20940224
05	52025	49690125	65	1600225	24284625	25	55625	26203125
1206	1454436	1754049816	1266	1602756	2029089096	1326	1758276	2331473976
07	56849	58416743	67	05289	33901163	27	60929	36752783
08	59264	62790912	68	07824	38720832	28	63584	42039552
09	61681	67172329	69	10361	43548109	29	66241	47334289
10	64100	71561000	70	12900	48383000	30	68900	52637000
1211	1466521	1775956931	1271	1615441	2053225511	1331	1771561	2357947691
12	68944	80360128	72	17984	58075648	32	74224	63266368
13	71369	84770597	73	20529	62933417	33	76889	68593037
14	73796	89188344	74	23076	67798824	34	79556	73927704
15	76225	93613375	75	25625	72671875	35	82225	79270375
1216	1478656	1798045696	1276	1628176	2077552576	1336	1784896	2384621056
17	81089	1802485313	77	30729	82440933	37	87569	89979753
18	83524	06932232	78	33284	87336952	38	90244	95346472
19	85961	11386459	79	35841	92240639	39	92921	2400721219
20	88400	15848000	80	38400	97152000	40	95600	06104000
1221	1490841	1820316861	1281	1640961	2102071041	1341	1798281	2411494821
22	93284	24793048	82	43524	06997768	42	1800964	16893688
23	95729	29276567	83	46089	11932187	43	03649	22300607
24	98176	33767424	84	48656	16874304	44	06336	27715584
25	1500625	38265625	85	51225	21824125	45	09025	33138625
1226	1503076	1842771176	1286	1653796	2126781656	1346	1811716	2438569736
27	05529	47284083	87	56369	31746903	47	14409	44008923
28	07984	51804352	88	58944	36719872	48	17104	49456192
29	10441	56331989	89	61521	41700569	49	19801	54911549
30	12900	60867000	90	64100	46689000	50	22500	60375000
1231	1515361	1865409391	1291	1666681	2151685171	1351	1825201	2465846551
32	17824	69959168	92	69264	56689088	52	27904	71326208
33	20289	74516337	93	71849	61700757	53	30609	76813977
34	22756	79080904	94	74436	66720184	54	33316	82309864
35	25225	83652875	95	77025	71747375	55	36025	87813875
1236	1527696	1888232256	1296	1679616	2176782336	1356	1838736	2493326016
37	30169	92819053	97	82209	81825073	57	41449	98846293
38	32644	97413272	98	84804	86875592	58	44164	2504374712
39	35121	1902014919	99	87401	91933899	59	46881	09911279
40	37600	06624000	1300	90000	97000000	60	49600	15456000
1241	1540081	1911240521	1301	1692601	2202073901	1361	1852321	2521008881
42	42564	15864488	02	95204	07155608	62	55044	26569928
43	45049	20495907	03	97809	12245127	63	57769	32139147
44	47536	25134784	04	1700416	17342464	64	60496	37716544
45	50025	29781125	05	03025	22447625	65	63225	43302125
1246	1552516	1934434936	1306	1705636	2227560616	1366	1865956	2548895896
47	55009	39096223	07	08249	32681443	67	68689	54497863
48	57504	43764992	08	10864	37810112	68	71424	60108032
49	60001	48441249	09	13481	42946629	69	74161	65726409
50	62500	53125000	10	16100	48091000	70	76900	71353000
1251	1565001	1957816251	1311	1718721	2253243231	1371	1879641	2576987811
52	67504	62515008	12	21344	58403328	72	82384	82630848
53	70009	67221277	13	23969	63571297	73	85129	88282117
54	72516	71935064	14	26596	68747144	74	87876	93941624
55	75025	76656375	15	29225	73930875	75	90625	99609375
1256	1577536	1981385216	1316	1731856	2279122496	1376	1893376	2605285376
57	80049	86121593	17	34489	84322013	77	96129	10969633
58	82564	90865512	18	37124	89529432	78	98884	16662152
59	85081	95616979	19	39761	94744759	79	1901641	22362939
1260	87600	2000376000	1320	42400	99968000	1380	04400	28072000
N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³

N	N^2	N^3
1381	1907161	2633789341
82	09924	39514968
83	12689	45248887
84	15456	50991104
85	18225	56741625
1386	1920996	2662500456
87	23769	68267603
88	26544	74043072
89	29321	79826869
90	32100	85619000
1391	1934881	2691419471
92	37664	97228288
93	40449	2703045457
94	43236	08870984
95	46025	14704875
1396	1948816	2720547136
97	51609	26397773
98	54404	32256792
99	57201	38124199
1400	60000	44000000
1401	1962801	2749884201
02	65604	55776808
03	68409	61677827
04	71216	67587264
05	74025	73505125
1406	1976836	2779431416
07	79649	85366143
08	82464	91309312
09	85281	97260929
10	88100	2803221000
1411	1990921	2809189531
12	93744	15166528
13	96569	21151997
14	99396	27145944
15	2002225	33148375
1416	2005056	2839159296
17	07889	45178713
18	10724	51206632
19	13561	57243059
20	16400	63288000
1421	2019241	2869341461
22	22084	75403448
23	24929	81473967
24	27776	87553024
25	30625	93640625
1426	2033476	2899736776
27	36329	2905841483
28	39184	11954752
29	42041	18076589
30	44900	24207000
1431	2047761	2930345991
32	50624	36493568
33	53489	42649737
34	56356	48814504
35	59225	54987875
1436	2062096	2961169856
37	64969	67360453
38	67844	73559672
39	70721	79767519
1440	73600	85984000
1441	2076481	2992209121
42	79364	98442888
43	82249	3004685307
44	85136	10936384
45	88025	17196125
1446	2090916	3023464536
47	93809	29741623
48	96704	36027392
49	99601	42321849
50	2102500	48625000
1451	2105401	3054936851
52	08304	61257408
53	11209	67586677
54	14116	73924664
55	17025	80271375
1456	2119936	3086626816
57	22849	92990993
58	25764	99363912
59	28681	3105745579
60	31600	12136000
1461	2134521	3118535181
62	37444	24943128
63	40369	31359847
64	43296	37785344
65	46225	44219625
1466	2149156	3150662696
67	52089	57114563
68	55024	63575232
69	57961	70044709
70	60900	76523000
1471	2163841	3183010111
72	66784	89506048
73	69729	96010817
74	72676	3202524424
75	75625	09046875
1476	2178576	3215578176
77	81529	22118333
78	84484	28667352
79	87441	35225239
80	90400	41792000
1481	2193361	3248367641
82	96324	54952168
83	99289	61545587
84	2202256	68147904
85	05225	74759125
1486	2208196	3281379256
87	11169	88008303
88	14144	94646272
89	17121	3301293169
90	20100	07949000
1491	2223081	3314613771
92	26064	21287488
93	29049	27970157
94	32036	34661784
95	35025	41362375
1496	2238016	3348071936
97	41009	54790473
98	44004	61517992
99	47001	68254499
1500	50000	75000000
1501	2253001	3381754501
02	56004	88518008
03	59009	95290527
04	62016	3402072064
05	65025	08862625
1506	2268036	3415662216
07	71049	22470843
08	74064	29288512
09	77081	36115229
10	80100	42951000
1511	2283121	3449795831
12	86144	56649728
13	89169	63512697
14	92196	70384744
15	95225	77265875
1516	2298256	3484156096
17	2301289	91055413
18	04324	97963832
19	07361	3504881359
20	10400	11808000
1521	2313441	3518743761
22	16484	25688648
23	19529	32642667
24	22576	39605824
25	25625	46578125
1526	2328676	3553559576
27	31729	60550183
28	34784	67549952
29	37841	74558889
30	40900	81577000
1531	2343961	3588604291
32	47024	95640768
33	50089	3602686437
34	53156	09741304
35	56225	16805375
1536	2359296	3623878656
37	62369	30961153
38	65444	38052872
39	68521	45153819
40	71600	52264000
1541	2374681	3659383421
42	77764	66512088
43	80849	73650007
44	83936	80797184
45	87025	87953625
1546	2390116	3695119336
47	93209	3702294323
48	96304	09478592
49	99401	16672149
50	2402500	23875000
1551	2405601	3731087151
52	08704	38308608
53	11809	45539377
54	14916	52779464
55	18025	60028875
1556	2421136	3767287616
57	24249	74555693
58	27364	81833112
59	30481	89119879
1560	33600	96416000

N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³
1561	2436721	3803721481	1621	2627641	4259406061	1681	2825761	4750104241
62	39844	11036328	22	30884	67293848	82	29124	58586568
63	42969	18360547	23	34129	75191367	83	32489	67078987
64	46096	25694144	24	37376	83098624	84	35856	75581504
65	49225	33037125	25	40625	91015625	85	39225	84094125
1566	2452356	3840389496	1626	2643876	4298942376	1686	2842596	4792616856
67	55489	47751263	27	47129	4306878883	87	45969	4801149703
68	58624	55122432	28	50384	14825152	88	49344	09692672
69	61761	62503009	29	53641	22781189	89	52721	18245769
70	64900	69893000	30	56900	30747000	90	56100	26809000
1571	2468041	3877292411	1631	2660161	4338722591	1691	2859481	4835382371
72	71184	84701248	32	63424	46707968	92	62864	43965888
73	74329	92119517	33	66689	54703137	93	66249	52559557
74	77476	99547224	34	69956	62708104	94	69636	61163384
75	80625	3906984375	35	73225	70722875	95	73025	69777375
1576	2483776	3914430976	1636	2676496	4378747456	1696	2876416	4878401536
77	86929	21887033	37	79769	86781853	97	79809	87035873
78	90084	29352552	38	83044	94826072	98	83204	95680392
79	93241	36827539	39	86321	4402880119	99	86601	4904335099
80	96400	44312000	40	89600	10944000	1700	90000	13000000
1581	2499561	3951805941	1641	2692881	4419017721	1701	2893401	4921675101
82	2502724	59309368	42	96164	27101288	02	96804	30360408
83	05889	66822287	43	99449	35194707	03	2900209	39055927
84	09056	74344704	44	2702736	43297984	04	03616	47761664
85	12225	81876625	45	06025	51411125	05	07025	56477625
1586	2515396	3989418056	1646	2709316	4459534136	1706	2910436	4965203816
87	18569	96969003	47	12609	67667023	07	13849	73940243
88	21744	4004529472	48	15904	75809792	08	17264	82686912
89	24921	12099469	49	19201	83962449	09	20681	91443829
90	28100	19679000	50	22500	92125000	10	24100	5000211000
1591	2531281	4027268071	1651	2725801	4500297451	1711	2927521	5008988431
92	34464	34866688	52	29104	08479808	12	30944	17776128
93	37649	42474857	53	32409	16672077	13	34369	26574097
94	40836	50092584	54	35716	24874264	14	37796	35382344
95	44025	57719875	55	39025	33086375	15	41225	44200875
1596	2547216	4065356736	1656	2742336	4541308416	1716	2944656	5053029696
97	50409	73003173	57	45649	49540393	17	48089	61868813
98	53604	80659192	58	48964	57782312	18	51524	70718232
99	56801	88324799	59	52281	66034179	19	54961	79577959
1600	60000	96000000	60	55600	74296000	20	58400	88448000
1601	2563201	4103684801	1661	2758921	4582567781	1721	2961841	5097328361
02	66404	11379208	62	62244	90849528	22	65284	5106219048
03	69609	19083227	63	65569	99141247	23	68729	15120067
04	72816	26796864	64	68896	4607442944	24	72176	24031424
05	76025	34520125	65	72225	15754625	25	75625	32953125
1606	2579236	4142253016	1666	2775556	4624076296	1726	2979076	5141885176
07	82449	49995543	67	78889	32407963	27	82529	50827583
08	85664	57747712	68	82224	40749632	28	85984	59780352
09	88881	65509529	69	85561	49101309	29	89441	68743489
10	92100	73281000	70	88900	57463000	30	92900	77717000
1611	2595321	4181062131	1671	2792241	4665834711	1731	2996361	5186700891
12	98544	88852928	72	95584	74216448	32	99824	95695168
13	2601769	96653397	73	98929	82608217	33	3003289	5204699837
14	04996	4204463544	74	2802276	91010024	34	06756	13714904
15	08225	12283375	75	05625	99421875	35	10225	22740375
1616	2611456	4220112896	1676	2808976	4707843776	1736	3013696	5231776256
17	14689	27952113	77	12329	16275733	37	17169	40822553
18	17924	35801032	78	15684	24717752	38	20644	49879272
19	21161	43659659	79	19041	33169839	39	24121	58946419
1620	24400	51528000	80	22400	41632000	40	27600	68024000
N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³

N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³
1741	3031081	5277112021	1801	3243601	5841725401	1861	3463321	6445240381
42	34564	86210488	02	47204	51461608	62	67044	55635928
43	38049	95319407	03	50809	61208627	63	70769	66042647
44	41536	5304438784	04	54416	70966464	64	74496	76460544
45	45025	13568625	05	58025	80735125	65	78225	86889625
1746	3048516	5322708936	1806	3261636	5890514616	1866	3481956	6497329896
47	52009	31859723	07	65249	5900304943	67	85689	6507781363
48	55504	41020992	08	68864	10106112	68	89424	18244032
49	59001	50192749	09	72481	19918129	69	93161	28717909
50	62500	59375000	10	76100	29741000	70	96900	39203000
1751	3066001	5368567751	1811	3279721	5939574731	1871	3500641	6549699311
52	69504	77771008	12	83344	49419328	72	04384	60206848
53	73009	86984777	13	86969	59274797	73	08129	70725617
54	76516	96209064	14	90596	69141144	74	11876	81255624
55	80025	5405443875	15	94225	79018375	75	15625	91796875
1756	3083536	5414689216	1816	3297856	5988906496	1876	3519376	6602349376
57	87049	23945093	17	3301489	98805513	77	23129	12913133
58	90564	33211512	18	05124	6008715432	78	26884	23488152
59	94081	42488479	19	08761	18636259	79	30641	34074439
60	97600	51776000	20	12400	28568000	80	34400	44672000
1761	3101121	5461074081	1821	3316041	6038510661	1881	3538161	6655280841
62	04644	70382728	22	19684	48464248	82	41924	65900968
63	08169	79701947	23	23329	58428767	83	45689	76532387
64	11696	89031744	24	26976	68404224	84	49456	87175104
65	15225	98372125	25	30625	78390625	85	53225	97829125
1766	3118756	5507723096	1826	3334276	6088387976	1886	3556996	6708494456
67	22289	17084663	27	37929	98396283	87	60769	19171103
68	25824	26456832	28	41584	6108415552	88	64544	29859072
69	29361	35839609	29	45241	18445789	89	68321	40558369
70	32900	45233000	30	48900	28487000	90	72100	51269000
1771	3136441	5554637011	1831	3352561	6138539191	1891	3575881	6761990971
72	39984	64051648	32	56224	48602368	92	79664	72724288
73	43529	73476917	33	59889	58676537	93	83449	83468957
74	47076	82912824	34	63556	68761704	94	87236	94224984
75	50625	92359375	35	67225	78857875	95	91025	6804992375
1776	3154176	5601816576	1836	3370896	6188965056	1896	3594816	6815771136
77	57729	11284433	37	74569	99083253	97	98609	26561273
78	61284	20762952	38	78244	6209212472	98	3602404	37362792
79	64841	30252139	39	81921	19352719	99	06201	48175699
80	68400	39752000	40	85600	29504000	1900	10000	59000000
1781	3171961	5649262541	1841	3389281	6239666321	1901	3613801	6869835701
82	75524	58783768	42	92964	49839688	02	17604	80682808
83	79089	68315687	43	96649	60024107	03	21409	91541327
84	82656	77858304	44	3400336	70219584	04	25216	6902411264
85	86225	87411625	45	04025	80426125	05	29025	13292625
1786	3189796	5696975656	1846	3407716	6290643736	1906	3632836	6924185416
87	93369	5706550403	47	11409	6300872423	07	36649	35089643
88	96944	16135872	48	15104	11112192	08	40464	46005312
89	3200521	25732069	49	18801	21363049	09	44281	56932429
90	04100	35339000	50	22500	31625000	10	48100	67871000
1791	3207681	5744956671	1851	3426201	6341898051	1911	3651921	6978821031
92	11264	54585088	52	29904	52182208	12	55744	89782528
93	14849	64224257	53	33609	62477477	13	59569	7000755497
94	18436	73874184	54	37316	72783864	14	63396	11739944
95	22025	83534875	55	41025	83101375	15	67225	22735875
1796	3225616	5793206336	1856	3444736	6393430016	1916	3671056	7033743296
97	29209	5802888573	57	48449	6403769793	17	74889	44762213
98	32804	12581592	58	52164	14120712	18	78724	55792632
99	36401	22285399	59	55881	24482779	19	82561	66834559
1800	40000	32000000	1860	59600	34856000	20	86400	77888000
N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1921	3690241	7088952961	1981	3924361	7774159141	2041	4165681	8502154921
22	94084	7100029448	82	28324	85938168	42	69764	14658088
23	97929	11117467	83	32289	97729087	43	73849	27173507
24	3701776	22217024	84	36256	7809531904	44	77936	39701184
25	05625	33328125	85	40225	21346625	45	82025	52241125
1926	3709476	7144450776	1986	3944196	7833173256	2046	4186116	8564793336
27	13329	55584983	87	48169	45011803	47	90209	77357823
28	17184	66730752	88	52144	56862272	48	94304	89934592
29	21041	77888089	89	56121	68724669	49	98401	8602523649
30	24900	89057000	90	60100	80599000	50	02500	15125000
1931	3728761	7200237491	1991	3964081	7892485271	2051	4206601	8627738651
32	32624	11429568	92	68064	04383488	52	10704	40364608
33	36489	22633237	93	72049	7916293657	53	14809	53002877
34	40356	33848504	94	76036	28215784	54	18916	65652464
35	44225	45075375	95	80025	40149875	55	23025	78316375
1936	3748096	7256313856	1996	3984016	7952095936	2056	4227136	8690991616
37	51969	67563953	97	88009	64053973	57	31249	8703679193
38	55844	78825672	98	92004	76023992	58	35364	16379112
39	59721	90099019	99	96001	88005999	59	39481	29091379
40	63600	7301384000	2000	4000000	8000000000	60	43600	41816000
1941	3767481	7312680621	2001	4004001	8012006001	2061	4247721	8754552981
42	71364	23988888	02	08004	24024008	62	51844	67302328
43	75249	35308807	03	12009	36054027	63	55969	80064047
44	79136	46640384	04	16016	48096064	64	60096	92838144
45	83025	57983625	05	20025	60150125	65	64225	8805624625
1946	3786916	7369338536	2006	4024036	8072216216	2066	4268356	8818423496
47	90809	80705123	07	28049	84294343	67	72489	31234763
48	94704	92083392	08	32064	96384512	68	76624	44058432
49	98601	03473349	09	36081	8108486729	69	80761	56894509
50	3802500	14875000	10	40100	20601000	70	84900	69743000
1951	3806401	7426288351	2011	4044121	8132727331	2071	4289041	8882603911
52	10304	37713408	12	48144	44865728	72	93184	95477248
53	14209	49150177	13	52169	57016197	73	97329	8908363017
54	18116	60598664	14	56196	69178744	74	4301476	21261224
55	22025	72058875	15	60225	81353375	75	05625	34171875
1956	3825936	7483530816	2016	4064256	8193540096	2076	4309776	8947094976
57	29849	95014493	17	68289	8205738913	77	13929	60030533
58	33764	06509912	18	72324	17949832	78	18084	72978552
59	37681	18017079	19	76361	30172859	79	22241	85939039
60	41600	29536000	20	80400	42408000	80	26400	08912000
1961	3845521	7541066681	2021	4084441	8254655261	2081	4330561	9011897441
62	49444	52609128	22	88484	66914648	82	34724	24895368
63	53369	64163347	23	92529	79186167	83	38889	37905787
64	57296	75729344	24	96576	91469824	84	43056	50938704
65	61225	87307125	25	4100625	8303765625	85	47225	63964125
1966	3865156	7598896696	2026	4104676	8316073576	2086	4351396	9077012056
67	69089	7610498063	27	08729	28393683	87	55569	90072503
68	73024	22111232	28	12784	40725952	88	59744	9103145472
69	76961	33736209	29	16841	53070389	89	63921	16230969
70	80900	45373000	30	20900	65427000	90	68100	29329000
1971	3884841	7657021611	2031	4124961	8377795791	2091	4372281	9142439571
72	88784	68682048	32	29024	90176768	92	76464	55562688
73	92729	80354317	33	33089	8402569937	93	80649	68698357
74	96676	92038424	34	37156	14975304	94	84836	81846584
75	3900625	7703734375	35	41225	27392875	95	89025	95007375
1976	3904576	7715442176	2036	4145296	8439822656	2096	4393216	9208180736
77	08529	27161833	37	49369	52264653	97	97409	21366673
78	12484	38893352	38	53444	64718872	98	4401604	34565192
79	16441	50636739	39	57521	77185319	99	05801	47776299
1980	20400	62392000	40	4161600	89664000	2000	10000	61000000
N^1	N^2	N	N^1	N^2	N	N^1	N	N

Tavola dei valori di b, ec. da $l=2$ fino a $l=251$ (par. 118.)

- **2**: 1|1, 1|2
- **3**: 1|1, 2|1, 1|2
- **5**: 1|2, 1|4
- **6**: 1|2, 2|2, 1|4
- **7**: 1|2, 3|1, 2|1, 3|1, 1|4
- **10**: 1|3, 1|6
- **11**: 1|3, 2|3, 1|6
- **13**: 1|3, 4|1, 3|1, 3|1, 4|1, 1|6
- **14**: 1|3, 5|1, 2|2, 5|1, 1|6
- **15**: 1|3, 6|1, 1|6

- **17**: 1|4, 1|8
- **19**: 1|4, 3|2, 5|1, 2|3, 5|1, 3|2, 1|8
- **21**: 1|4, 5|1, 4|1, 3|2, 4|1, 5|1, 1|8
- **22**: 1|4, 6|1, 3|2, 2|4, 3|2, 6|1, 1|8
- **23**: 1|4, 7|1, 2|3, 7|1, 1|8
- **26**: 1|5, 1|10
- **29**: 1|5, 4|2, 5|1, 5|1, 4|2, 1|10
- **30**: 1|5, 5|2, 1|10

- **31**: 1|5, 6|1, 5|1, 3|3, 2|5, 3|3, 5|1, 6|1, 1|10
- **33**: 1|5, 8|1, 3|2, 8|1, 1|10
- **34**: 1|5, 9|1, 2|4, 9|1, 1|10
- **35**: 1|5, 10|1, 1|10
- **37**: 1|6, 1|12
- **38**: 1|6, 2|6, 1|12
- **39**: 1|6, 3|4, 1|12
- **41**: 1|6, 5|2, 5|2, 1|12
- **42**: 1|6, 6|2, 1|12

- **43**: 1|6, 7|1, 6|1, 3|3, 9|1, 2|5, 9|1, 3|3, 6|1, 7|1, 1|12
- **46**: 1|6, 10|1, 3|3, 7|1, 6|1, 5|2, 2|6, 5|2, 6|1, 7|1, 3|3, 10|1, 1|12
- **47**: 1|6, 11|1, 2|5, 11|1, 1|12
- **51**: 1|7, 2|7, 1|14
- **53**: 1|7, 4|3, 7|1, 7|1, 4|3, 1|14
- **55**: 1|7, 6|2, 5|2, 6|2, 1|14

- **57**: 1|7, 8|1, 7|1, 3|4, 7|1, 8|1, 1|14
- **58**: 1|7, 9|1, 6|1, 7|1, 6|1, 9|1, 1|14
- **59**: 1|7, 10|1, 5|2, 2|7, 5|2, 10|1, 1|14
- **61**: 1|7, 12|1, 3|4, 4|3, 9|1, 5|2, 5|2, 9|1, 4|3, 3|4, 12|1, 1|14
- **62**: 1|7, 13|1, 2|6, 13|1, 1|14
- **65**: 1|8, 1|16
- **66**: 1|8, 2|8, 1|16

- **67**: 1|8, 3|5, 6|2, 7|1, 9|1, 2|7, 9|1, 7|1, 6|2, 3|5, 1|16
- **69**: 1|8, 5|3, 4|3, 11|1, 3|4, 11|1, 4|3, 5|3, 1|16
- **70**: 1|8, 6|2, 9|1, 5|2, 9|1, 6|2, 1|16
- **71**: 1|8, 7|2, 5|2, 11|1, 2|7, 11|1, 5|2, 7|2, 1|16
- **73**: 1|8, 9|1, 8|1, 3|5, 3|5, 8|1, 9|1, 1|16
- **74**: 1|8, 10|1, 7|1, 7|1, 10|1, 1|16

- **77**: 1|8, 13|1, 4|3, 7|2, 4|3, 13|1, 1|16
- **78**: 1|8, 14|1, 3|4, 14|1, 1|16
- **79**: 1|8, 15|1, 2|7, 15|1, 1|16
- **82**: 1|9, 1|18
- **83**: 1|9, 2|9, 1|18
- **85**: 1|9, 4|4, 9|1, 9|1, 4|4, 1|18
- **86**: 1|9, 5|3, 10|1, 7|1, 2|8, 11|1, 7|1, 10|1, 5|3, 1|18
- **87**: 1|9, 6|3, 1|18

- **89**: 1|9, 8|2, 5|3, 5|3, 8|2, 1|18
- **91**: 1|9, 10|1, 9|1, 3|5, 14|1, 3|5, 9|1, 10|1, 1|18
- **93**: 1|9, 12|1, 7|1, 11|1, 4|4, 3|6, 4|4, 11|1, 7|1, 12|1, 1|18
- **94**: 1|9, 13|1, 6|2, 5|3, 9|1, 10|1, 3|5, 15|1, 2|8, 15|1, 3|5, 10|1, 9|1, 5|3, 6|2, 13|1, 1|18
- **95**: 1|9, 14|1, 5|2, 14|1, 1|18

- **97**: 1|9, 16|1, 3|5, 11|1, 8|1, 9|1, 9|1, 8|1, 11|1, 3|5, 16|1, 1|18
- **101**: 1|10, 1|20
- **102**: 1|10, 2|10, 1|20
- **103**: 1|10, 3|6, 13|1, 6|2, 9|1, 11|1, 2|9, 11|1, 9|1, 6|2, 13|1, 3|6, 1|20
- **105**: 1|10, 5|4, 1|20
- **106**: 1|10, 6|3, 7|2, 10|1, 9|1, 9|1, 10|1, 7|2, 6|3, 1|20

- **107**: 1|10, 7|2, 13|1, 2|9, 13|1, 7|2, 1|20
- **109**: 1|10, 9|2, 5|3, 12|1, 7|2, 4|4, 15|1, 3|6, 3|6, 15|1, 4|4, 7|2, 12|1, 5|3, 9|2, 1|20
- **110**: 1|10, 10|2, 1|20
- **111**: 1|10, 11|1, 10|1, 3|6, 10|1, 11|1, 1|20
- **113**: 1|10, 13|1, 8|1, 11|1, 7|2, 7|2, 11|1, 8|1, 13|1, 1|20
- **114**: 1|10, 14|1, 7|2, 2|10, 7|2, 14|1, 1|20

- **115**: 1|10, 15|1, 6|2, 11|1, 9|1, 10|1, 9|1, 11|1, 6|2, 15|1, 1|20
- **118**: 1|10, 18|1, 3|6, 6|3, 9|2, 2|10, 9|2, 6|3, 3|6, 18|1, 1|20
- **119**: 1|10, 19|1, 2|9, 19|1, 1|20
- **122**: 1|11, 1|22
- **123**: 1|11, 2|11, 1|22
- **127**: 1|11, 6|3, 13|1, 7|2, 9|2, 3|7, 2|11, 3|7, 9|2, 7|2, 13|1, 6|3, 1|22

- **129**: 1|11, 8|2, 13|1, 5|3, 16|1, 3|6, 16|1, 5|3, 13|1, 8|2, 1|22
- **130**: 1|11, 9|2, 9|2, 1|22
- **131**: 1|11, 10|2, 5|4, 2|11, 5|4, 10|2, 4|22
- **133**: 1|11, 12|1, 11|1, 3|7, 4|5, 13|1, 9|1, 12|1, 7|2, 12|1, 9|1, 13|1, 4|5, 3|7, 11|1, 12|1, 1|22
- **137**: 1|11, 16|1, 7|2, 8|2, 11|1, 11|1, 8|2, 7|2, 16|1, 1|22

- **138**: 1|11, 17|1, 6|2, 17|1, 1|22
- **139**: 1|11, 18|1, 5|3, 15|1, 6|3, 3|7, 13|1, 10|1, 9|2, 2|11, 9|2, 10|1, 13|1, 3|7, 6|3, 15|1, 5|3, 18|1, 1|22
- **141**: 1|11, 20|1, 3|6, 20|1, 1|22
- **142**: 1|11, 21|1, 2|10, 21|1, 1|22
- **143**: 1|11, 22|1, 1|22
- **145**: 1|12, 1|24
- **146**: 1|12, 2|12, 1|24

Logaritmi dei rapporti delle misure Toscane con alcune delle corrispondenti estere

N. B. Per convertire una misura Toscana T in un' estera S o viceversa, chiamato L il logaritmo di rapporto dato dalla presente Tavola, dovrà farsi nel 1°. caso $\log S = \log T + L$, nel 2°. $\log T = \log S - L$. Volendo poi convertire l'una nell' altra due misure straniere S, S' chiamati L, L' i logaritmi dei loro rapporti con la misura Toscana corrispondente, si farà $\log S = \log S' + L - L'$. Si vedano i num. 128, 129 alla pag. 60, 61.

Misure lineari

Braccia Fiorentine	in Metri		9,7661346
«	«	in Tese Francesi	9,4763146
«	«	in Klafter di Vienna	9,4881556
«	«	in Yards Inglesi	9,8050000
«	«	in Aunes di Parigi	9,6911578
«	«	in Piedi Francesi	0,2544659
«	«	di Vienna	0,2663069
«	«	Inglesi	0,2821212
«	«	Russi	0,0352313
«	«	d'Amsterdam	0,3142561
«	«	d'Anversa	0,3103916
«	«	di Berlino	0,2694125
«	«	di Copenhaghen	0,2697308
«	«	di Stockolm	0,3136122
«	«	di Varsavia	0,2922537
«	«	d'Ancona	0,1538065
«	«	di Bologna	0,1862367
«	«	di Brescia	0,0931229
«	«	di Cesena	0,0359731
«	«	di Faenza	0,0851015
«	«	d'Imola	0,1230176
«	«	di Milano	0,1274607
«	«	di Modena	0,0175914
«	«	d'Osimo	0,1865979
«	«	di Parma	0,0922386
«	«	di Pesaro	0,2243869
«	«	di Ravenna	9,9992684
«	«	di Reggio	0,0411219
«	«	di Rimini	0,0313748
«	«	Romani antichi	0,2974240
«	«	di Torino, piedi di Luitprando	0,0548509
«	«	d'Urbino	0,1538065
«	«	in palmi Romani	0,4170090
«	«	detti Architettonici	0,2920703

«	«	in palmi di Genova	0,3697696
		di Napoli	0,3478084
«	«	in Miglia Toscane di 67,304 al grado	6,5477024
Soldi del Brac. Fior.		in Pollici Francesi	0,0326472
«	«	in Pollici Inglesi	0,0602725
Miglia Toscane		in Tese	2,9286123
«	«	in Gradi d'Equatore	8,4749800
«	«	in Miglia Tedesche di 15 al gr°.	9,3480716
«	«	in Leghe Francesi di 25 al gr°.	9,5699200
«	«	in Leghe Marine di 20 al grado	9,4730100
«	«	in Miglia Inglesi di 69 al grado	0,0108292
«	«	in Miglia Italiane o Geografiche di 60 al grado	9,9504313
«	«	in Miglia Romane	0,0453984
«	«	in Miriametri	9,2484325

Misure di superficie

Quadrati Toscani		in Ettari	9,5322592
«	«	in Arpenti di Parigi di 900 tese quadrate	9,9983828
«	«	in Acri Inglesi di 1135 tese quadrate	9,8976307
«	«	in Rubbia Romane	9,2654647
«	«	in Stiori	0,8121039

Misure di capacità

Barili di vino Toscani		in Ettolitri	9,6588123
«	«	in Piedi cubici Francesi	0,4238069
«	«	in *Barrels* Inglesi di poll. c. fr. 601336,6	9,5822452
«	«	in Barili da Olio Toscani	0,1346890
«	«	in Br. cubiche Fiorentine	9,3604092
Staia Toscane		in Ettolitri	9,3867308
«	«	in Piedi cubici Francesi	9,8517253
«	«	in *Bushels* Inglesi	9,8405192
«	«	in Br. Cubiche Fiorentine	9,0883276

Pesi

Libbre Toscane		in Chilogrammi	9,5308909
«	«	in Libbre Francesi	9,8441337
«	«	in Libbre Inglesi (Troy)	9,9592752
«	«	in Libbre Inglesi (Avoir dupois)	9,8740073
Oncie Toscane		in Grammi	1,4517097
«	«	in Oncie Francesi	9,9661392
«	«	in Oncie Inglesi (Avoir dupois)	9,9989461
«	«	in Oncie Inglesi (Troy)	9,9592752

5
6
7
8
12
13
14
18
19
22
24
28
29
32
33

III

92
93
97
98
100
104
106
107